# 目　录

# 第一章

## 模糊数学在地质科学技术中的应用

地质学是研究地壳的构造、物质组成、发展变化以及矿产的形成和分布规律的科学。数学、物理、化学等基础学科日益向地质科学渗透，其结果是一方面出现了如数学地质、地球化学、地质力学等许多边缘学科；另一方面促使地质科学更加成熟、完善、严密。新技术和电子计算机的广泛应用，使地质科学研究领域更广阔更深入，向着海洋、宇宙、地球深部发展，向着矿物和元素的更深层次发展。当代地质科学技术已发展到定量、理论概括、宏观和微观结合的新阶段。特别是数学化或定量化将是地质科学技术发展的一大趋势。

由于地质现象、条件的多样性、变异性和复杂性，因而存在大量的不确定性、不精确性。这种不确定性、不精确性既具有随机性，更具有模糊性。应用模糊数学处理和研究地质科学技术中的模糊现象更具有理论与实际意义。从模糊数学在地质科学技术中的一些初步应用来看，利用模糊数学所建立的数学模型更深刻地揭示了地质现象的本质和规律性，所得出的结论更为切合实际。可以预言，由于模糊数学向地质科学技术的渗透，将会产生一门新的边缘学科—模糊数学地质。

### §1-1　模糊关系聚类法在地质学中的应用[1]

1982年，方开泰利用模糊关系聚类法对阳起石岩进行分类。

#### 一、模糊分类关系

考虑以$n$个标品之全体所组成的集合$X$作为全域。令

$$X \times X = \{(x,\ y) \mid x \in X,\ y \in X\}$$

称为$X$的乘积空间。

若用一个$n \times n$的矩阵$R$来表达$X$中元素的某种分类关系，则$R$是$X \times X$上的一个集合，且$R$的元素$r_{ij}$满足如下性质，

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & (x_i,\ x_j) \in R \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

例如：$X = \{x_1,\ x_2,\ \cdots x_6\}$，它分为三类：$G = \{x_1,\ x_2\}$，$G_2 = \{x_3, x_4, x_5\}$，$G_3 = \{x_6\}$，则$R$可以定义为

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然，$X$上的任一分类关系$R$应满足

1.反身性　$(x, y)\in R$

2.对称性　$(x, y)\in R\Longrightarrow(y, x)\in R$

3.传递性　$(x, y)\in R$，$(y, z)\in R\Longrightarrow(x, z)\in R$

反身性表示任一物体总和与它自己属同一类；对称性表示，若$x$与$y$属一类，则$y$与$x$也属于同一类；传递性是说，若$x$与$y$属一类，$y$与$z$属一类，必有$x$与$z$也属同一类。$X\times X$上的一个集合$R$，若满足上述三条性质，则称$R$为一分类关系。

为了将上述性质以矩阵的语言来表述，这里先引入模糊矩阵及其乘法的概念。

**定义 1-1-1**　一个矩阵的元素若取值于[0，1]，则称为模糊矩阵。

模糊单位矩阵记为$I$，零矩阵记为$O$，元素皆为1的矩阵用$J$表示。

**定义 1-1-2**　若$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$分别为$n\times m$，$m\times l$的模糊矩阵，则它们的乘积$\underset{\sim}{C}$为$n\times l$矩阵，其元素为

$$C_{ij}=\bigvee_{k=1}^{m}(a_{ik}\wedge b_{kj})$$

并记成：

$$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$$

即在模糊矩阵的乘法中，“+”代之以“∨”（max），“×”代之以“∧”（min）。

例如，$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$为两个模糊矩阵

$$\underset{\sim}{A}=\begin{pmatrix}1 & 0.8\\ 0.7 & 0.9\end{pmatrix};\quad \underset{\sim}{B}=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0.3\\ 0.1 & 0.6 & 0.2\end{pmatrix}$$

则它们的乘积$\underset{\sim}{C}=(C_{ij})$的元素为

$C_{11}=(1\wedge 1)\vee(0.8\wedge 0.1)=1\vee 0.1=1$；

$C_{12}=(1\wedge 0.5)\vee(0.8\wedge 0.6)=0.5\vee 0.6=0.6$；

……………………………………………………

$C_{23}=(0.7\wedge 0.3)\vee(0.9\wedge 0.2)=0.3\vee 0.2=0.3$

即　$$\begin{pmatrix}1 & 0.8\\ 0.7 & 0.9\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0.3\\ 0.1 & 0.6 & 0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.6 & 0.3\\ 0.7 & 0.6 & 0.3\end{pmatrix}。$$

可以验证模糊矩阵乘法有如下性质：

1.结合律　$(\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B})\circ\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\circ(\underset{\sim}{B}\circ\underset{\sim}{C})$

2.$\underset{\sim}{A}\circ I=I\circ\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$；$\underset{\sim}{A}\circ O=O\circ\underset{\sim}{A}=O$；$\underset{\sim}{A}\circ J=J\circ\underset{\sim}{A}$（当$\underset{\sim}{A}$ $J$为同阶方阵时）。

$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$两个模糊矩阵，若其元素有$a_{ij}\leqslant b_{ij}$（一切$i$，$j$）则记作$\underset{\sim}{A}\leqslant\underset{\sim}{B}$。

3.若$\underset{\sim}{A}\leqslant\underset{\sim}{B}$，则$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{C}\leqslant\underset{\sim}{B}\circ\underset{\sim}{C}$，$\underset{\sim}{C}\circ\underset{\sim}{A}\leqslant\underset{\sim}{C}\circ\underset{\sim}{B}$。

利用模糊矩阵的乘法可以更好地刻画分类关系。

**定理 1-1-1**　$R$为$X$的一个分类关系的充要条件为：（1）$r_{ii}=1$；（2）$r_{ij}=r_{ji}$；（3）$R\circ R\leqslant R$。

当分类关系$R$的元素非零即1时，即为普通分类关系；当分类还不确定时，$r_{ij}$有可能位于0与1之间，它的值愈大，$x_i$与$x_j$同属一类就愈肯定。这就把普通的分类关系推广为模糊分类关系，其更确切的定义为：

**定义 1-1-3**　$X$的模糊分类关系$\underset{\sim}{R}$是一个$n\times n$的模糊矩阵，且满足：（1）$r_{ii}=1$　$i=1, 2, \cdots, n$。（2）$r_{ij}=r_{ji}$，对于一切$i$，$j$；（3）$\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}\leqslant\underset{\sim}{R}$。

例如：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0.47 & 0.62 & 0.42 & 0.46 \\ 0.47 & 1 & 0.47 & 0.42 & 0.46 \\ 0.62 & 0.47 & 1 & 0.42 & 0.46 \\ 0.42 & 0.42 & 0.42 & 1 & 0.42 \\ 0.46 & 0.46 & 0.46 & 0.42 & 1 \end{bmatrix} \tag{1-1-1}$$

是一个模糊分类关系，性质1和性质2显然成立，且 $\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{R}$，故性质3也成立。

**定义 1-1-4** 若 $\underset{\sim}{R}$ 为 $X$ 的一个模糊分类关系，对任一 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，定义

$$\lambda r_{ij}=\begin{cases}1 & 若 r_{ij}\geqslant\lambda \\ 0 & 若 r_{ij}\leqslant\lambda\end{cases}$$

$R_\lambda=(\lambda r_{ij})$，则称 $R_\lambda$ 为 $\underset{\sim}{R}$ 的 $\lambda$ 显示。

**定理 1-1-2** $\underset{\sim}{R}$ 为 $X$ 上的一个模糊分类关系的充要条件是对每一个 $\lambda, 0<\lambda<1$，$R_\lambda$ 为普通的分类关系。

**证** （$\Longrightarrow$），若 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊分类关系，对任一 $\lambda\in[0.1]$，有（1），因 $r_{ii}=1$，故 $\lambda r_{ii}=1$（$i=1, 2, \cdots, n$）；（2），因 $r_{ij}=r_{ji}$，故 $\lambda r_{ij}=\lambda r_{ji}$；（3）因 $\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}\leqslant\underset{\sim}{R}$，欲证 $R_\lambda\circ R_\lambda=R_\lambda$。若 $R_\lambda\circ R_\lambda$ 的元素 $\lambda r^*_{ij}=1\Longrightarrow$ 存在 $k$，使得 $\lambda r_{ik}=\lambda r_{kj}=1\Longrightarrow$ 存在 $k$，使得 $r_{ik}\geqslant\lambda$，$r_{kj}\geqslant\lambda\Longrightarrow$ 存在 $k$，使得 $r_{ik}\wedge r_{kj}\geqslant\lambda\Longrightarrow r^*_{ij}\geqslant\lambda\Longrightarrow r_{ij}\geqslant r^*_{ij}\geqslant\lambda\Longrightarrow\lambda r^*_{ij}=1$，故 $R_\lambda\circ R_\lambda=R_\lambda$。（$\Longleftarrow$）亦成立。[证毕]。

利用这个定理可以从某个模糊分类关系得到分类。例如由（1-1-1）式这个模糊分类关系，分别取 $\lambda=1$；$\lambda=0.62$；$\lambda=0.47$；$\lambda=0.46$；$\lambda=0.42$ 时有如下的分类：

$$R_1=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad R_{0.62}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{0.47}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{0.46}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_{0.42}=J_{5\times 5}$。反过来，通过各种 $R_\lambda$ 是否为普通的分类关系来检查 $\underset{\sim}{R}$ 是否为模糊分类关系。

## 二、模 糊 聚 类

模糊分类关系是通过一个模糊矩阵来定义的，这个矩阵的元素可以用样品之间的任一相似系数来表示，也可以根据经验人为地估出。但是，这样得到的模糊矩阵，并不定是模糊分类关系，因此，必须对模糊矩阵作适当改造，才能得到模糊分类关系。

**定理 1-1-3** 设 $\underset{\sim}{R}$ 为定义在 $X\times X$ 上的模糊矩阵且满足反身性与对称性，则极限

$$\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{R}^n=\lim_{n\to\infty}\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}\circ\cdots\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{R}^\infty$$

存在，且 $\underset{\sim}{R}^{\infty}$为一模糊分类关系。

**证** 因$r_{ii}=1$，故$r_{ii}\wedge r_{ij}=r_{ij}$，从而

$$r_{ij}\leqslant \bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge r_{kj})$$

这表明$\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{R}^2\geqslant\underset{\sim}{R}$，于是$\underset{\sim}{R}\leqslant\underset{\sim}{R}^2\leqslant\underset{\sim}{R}^3\leqslant\cdots\leqslant J$，由此$\underset{\sim}{R}^{\infty}$必存在。$\underset{\sim}{R}^{\infty}$显然满足反身性与对称性，只要证明$\underset{\sim}{R}^{\infty}$有$\underset{\sim}{R}^{\infty}\circ\underset{\sim}{R}^{\infty}\leqslant\underset{\sim}{R}^{\infty}$即可。

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{R}^{\infty}\circ\underset{\sim}{R}^{\infty}&=(\lim_{m\to\infty}\underset{\sim}{R}^{m})(\lim_{l\to\infty}\underset{\sim}{R}^{l})\\&=\lim_{m\to\infty}\lim_{l\to\infty}\underset{\sim}{R}^{m+l}=\lim_{m\to\infty}\underset{\sim}{R}^{m}=\underset{\sim}{R}^{\infty}\end{aligned}$$ （证毕）

这个定理表明：若$R$不是模糊分类关系，通过 $R$ 的不断自乘求极限，可得模糊分类关系$\underset{\sim}{R}^{\infty}$。

**定理 1-1-4** 若 $\underset{\sim}{R}$是$n\times n$反身对称模糊矩阵，则存在$l$ 使得：$\underset{\sim}{R}^{l}=\underset{\sim}{R}^{l+1}=\underset{\sim}{R}^{\infty}$。

**证** $\underset{\sim}{R}$至多由$n^2$个数组成，$\underset{\sim}{R}$的任何次幂都由其中一部分数组成，由$n^2$个数组成的$n\times n$矩阵至多只有$n^2!$个，故当$K>n^2!$时，在$\{R^m, m\leqslant K\}$中至少有两个相同的，即存在$t<s\leqslant k$，使$\underset{\sim}{R}^{t}=\underset{\sim}{R}$，因$\underset{\sim}{R}^{t}\leqslant\underset{\sim}{R}^{t+1}\leqslant\cdots\leqslant\underset{\sim}{R}^{s}$，故$\underset{\sim}{R}^{t}=\underset{\sim}{R}^{t+1}=\cdots=\underset{\sim}{R}^{s}$，当$m\geqslant s$时，$\underset{\sim}{R}^{m}=\underset{\sim}{R}^{s}\underset{\sim}{R}^{m-s}=\underset{\sim}{R}^{s-1}\underset{\sim}{R}^{m-s}=\underset{\sim}{R}^{m-1}=\cdots=\underset{\sim}{R}^{s}$。这表明定理成立。即当有限次自乘以后，$\underset{\sim}{R}^{m}$就不变了，正好等于其极限$\underset{\sim}{R}^{\infty}$。为了加快收敛的速度，可以采取$\underset{\sim}{R}\to\underset{\sim}{R}^2\to\underset{\sim}{R}^4\to\cdots$，办法来获得$\underset{\sim}{R}^{\infty}$，最后，再通过$\underset{\sim}{R}^{\infty}$来分类。

## 三、应 用 实 例

我们收集了石碌铁矿区阳起石岩的16个样品，对每个样品测了11种氧化物含量，欲根据这些数据将阳起石样品分类。氧化物含量数据列于表1-1-1。

**阳起石岩氧化物含量数据表** 表 1-1-1

| 变量<br>样品 | $SiO_2$ | $Al_2O_3$ | $Fe_2O_3$ | FeO | MgO | CaO | $Na_2O$ | $K_2O$ | $TiO_2$ | $P_2O_5$ | MnO |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 47.22 | 15.28 | 5.98 | 5.06 | 8.93 | 9.17 | 2.10 | 0.10 | 1.20 | 0.07 | 0.24 |
| 2 | 54.33 | 15.06 | 3.13 | 6.22 | 8.95 | 3.46 | 3.00 | 0.12 | 0.90 | 0.11 | 0.26 |
| 3 | 47.45 | 15.23 | 6.75 | 4.35 | 9.61 | 10.50 | 1.00 | 0.15 | 1.10 | 0.13 | 0.18 |
| 4 | 47.45 | 15.26 | 4.60 | 6.85 | 9.92 | 8.25 | 3.12 | 0.12 | 1.00 | 0.10 | 0.30 |
| 5 | 48.40 | 16.02 | 10.31 | 2.43 | 5.66 | 6.57 | 1.89 | 0.22 | 1.40 | 0.10 | 0.19 |
| 6 | 47.86 | 13.55 | 4.78 | 4.19 | 10.90 | 9.69 | 1.40 | 0.17 | 0.40 | 0.08 | 0.25 |
| 7 | 56.17 | 12.61 | 6.15 | 3.31 | 8.64 | 4.75 | 2.08 | 0.15 | 0.62 | 0.07 | 0.33 |
| 8 | 47.83 | 13.28 | 3.09 | 7.45 | 11.31 | 9.95 | 1.65 | 0.50 | 1.20 | 0.18 | 0.29 |
| 9 | 43.12 | 7.97 | 0.84 | 10.33 | 23.54 | 5.57 | 0.12 | 0.05 | 0.96 | 0.17 | 0.17 |
| 10 | 42.05 | 8.83 | 1.07 | 9.67 | 22.69 | 6.64 | 0.42 | 0.08 | 0.92 | 0.17 | 0.16 |
| 11 | 47.31 | 15.76 | 1.63 | 7.57 | 11.16 | 7.87 | 3.12 | 0.18 | 1.06 | 0.20 | 0.14 |
| 12 | 42.50 | 12.42 | 1.55 | 9.62 | 16.85 | 7.75 | 1.05 | 0.42 | 1.50 | 0.24 | 0.20 |
| 13 | 40.77 | 10.00 | 2.01 | 9.68 | 22.21 | 5.08 | 0.19 | 0.04 | 1.18 | 0.20 | 0.17 |
| 14 | 41.68 | 9.53 | 7.65 | 6.08 | 19.89 | 4.19 | 0.13 | 0.04 | 0.98 | 0.13 | 0.21 |
| 15 | 47.74 | 16.53 | 0.98 | 7.72 | 8.36 | 9.43 | 3.46 | 0.33 | 1.28 | 0.25 | 0.17 |
| 16 | 52.64 | 12.06 | 2.07 | 5.92 | 10.57 | 7.22 | 1.95 | 1.12 | 0.84 | 0.38 | 0.16 |

阳起石岩石分布于石碌铁矿区外围的石炭纪地层中，石炭系地层主要由一套浅质的千枚岩、板岩、变质粉砂岩组成，夹数层白云质结晶灰岩和阳起石岩。阳起石岩主要呈层状产出，在昌江县军营曾经发现其枕状构造，由此推测这种岩石变质前的原岩可能为一套海底喷发基火山岩。

采用夹角余弦公式：

$$C_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_{ki}x_{kj}}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ki}^{2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}x_{kj}^{2}\right)}}$$

作为相似尺度，得矩阵$R^*$，它不是模糊分类关系，因为它的元素在[－1，1]中，为使它成为模糊分类关系，又不改变原来各元素的相对关系，作变换，$r_{ij}=1+r_{ij}^*/2$，得$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})$，它为模糊矩阵，列于表1-1-2。$R$还不是模糊分类关系，故进一步计算$R^2$，$R^4$，$R^8$，$R^{16}$，发现$R^8=R^{16}$，显然，$R^8$为极限$R^\infty$，它是模糊分类关系。$R^8$列于表1-1-3。由表1-1-3可以方便地得到聚类图：

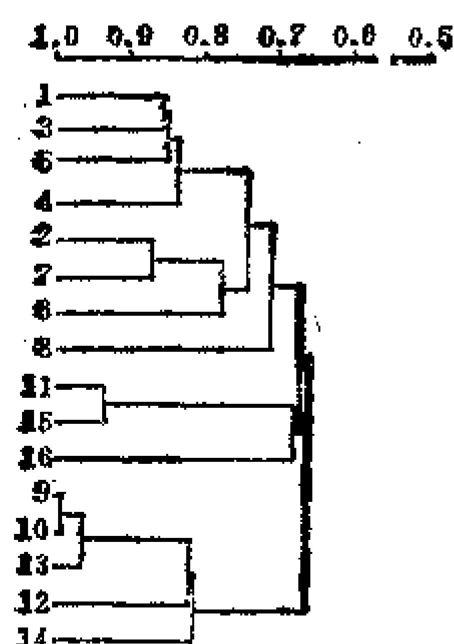



图 1-1-1 聚类图

石碌阳起石岩的模糊矩阵$\underset{\sim}{R}$ 表 1-1-2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.565 | 1.000 | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 0.863 | 0.335 | 1.000 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 0.837 | 0.743 | 0.543 | 1.000 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 0.851 | 0.590 | 0.809 | 0.606 | 1.000 | | | | | | | | | | | |
| 6 | 0.668 | 0.545 | 0.699 | 0.676 | 0.513 | 1.000 | | | | | | | | | | |
| 7 | 0.637 | 0.870 | 0.476 | 0.737 | 0.636 | 0.774 | 1.000 | | | | | | | | | |
| 8 | 0.618 | 0.411 | 0.535 | 0.709 | 0.435 | 0.502 | 0.482 | 1.000 | | | | | | | | |
| 9 | 0.151 | 0.306 | 0.245 | 0.193 | 0.156 | 0.356 | 0.289 | 0.326 | 1.000 | | | | | | | |
| 10 | 0.167 | 0.251 | 0.290 | 0.192 | 0.151 | 0.389 | 0.242 | 0.328 | 0.991 | 1.000 | | | | | | |
| 11 | 0.492 | 0.559 | 0.518 | 0.529 | 0.445 | 0.873 | 0.283 | 0.486 | 0.400 | 0.400 | 1.000 | | | | | |
| 12 | 0.501 | 0.208 | 0.365 | 0.292 | 0.313 | 0.121 | 0.874 | 0.659 | 0.739 | 0.742 | 0.559 | 1.000 | | | | |
| 13 | 0.189 | 0.271 | 0.299 | 0.185 | 0.243 | 0.252 | 0.211 | 0.315 | 0.965 | 0.958 | 0.427 | 0.818 | 1.000 | | | |
| 14 | 0.380 | 0.373 | 0.420 | 0.296 | 0.522 | 0.485 | 0.513 | 0.225 | 0.787 | 0.769 | 0.179 | 0.504 | 0.614 | 1.000 | | |
| 15 | 0.552 | 0.507 | 0.553 | 0.597 | 0.494 | 0.309 | 0.278 | 0.671 | 0.298 | 0.831 | 0.932 | 0.654 | 0.346 | 0.814 | 1.000 | |
| 16 | 0.229 | 0.446 | 0.407 | 0.295 | 0.408 | 0.424 | 0.446 | 0.622 | 0.434 | 0.438 | 0.603 | 0.589 | 0.407 | 0.312 | 0.645 | 1.000 |

石碌阳起石岩的模糊关系矩阵 $\tilde{R}^n$　　表 1-1-3

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.743 | 1.000 | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 0.853 | 0.743 | 1.000 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 0.837 | 0.743 | 0.837 | 1.000 | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 0.851 | 0.743 | 0.851 | 0.837 | 1.000 | | | | | | | | | | | |
| 6 | 0.741 | 0.774 | 0.743 | 0.743 | 0.743 | 1.000 | | | | | | | | | | |
| 7 | 0.713 | 0.870 | 0.743 | 0.743 | 0.743 | 0.774 | 1.000 | | | | | | | | | |
| 8 | 0.909 | 0.709 | 0.709 | 0.709 | 0.709 | 0.709 | 0.709 | 1.000 | | | | | | | | |
| 9 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 1.000 | | | | | | | |
| 10 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.991 | 1.000 | | | | | | |
| 11 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.659 | 0.659 | 1.000 | | | | | |
| 12 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.818 | 0.818 | 0.659 | 1.000 | | | | |
| 13 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.818 | 1.000 | | | |
| 14 | 0.618 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.814 | 0.814 | 0.659 | 0.814 | 0.814 | 1.000 | | |
| 15 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.659 | 0.659 | 0.932 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 1.000 | |
| 16 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.671 | 0.659 | 0.659 | 0.674 | 0.659 | 0.659 | 0.659 | 0.675 | 1.000 |

## 四、模糊聚类程序使用说明

本程序先计算任意两个对象间的相似系数，然后使之变化到[0, 1]中，在这个基础上对相似系数矩阵进行改造，使之成为模糊分类关系，最后形成聚类图。

程序说明：

1.主要标识符

N　对象数；M　变量数；

A[1:N, 1:M]　原始数据矩阵；

NUM　确定原始数据变换方式的参数，规定

NUM=1，原始数据作标准化变换；

NUM=2，原始数据作正规化变换；

NUM=3，原始数据作对数变换，此时原始数据中每个数都必须大于零。其他情况不变换。

R[1:N, 1:N]　相似系数矩阵；

S[1:N, 1:N]　存放矩阵 $R^{n-1}$；

PAIR[1:2, 1:N-1]　存放每次聚类时的对象号码；程序中过程的标识符与功能如下：

TRAN(A, M, N, NUM)　原始数据变换之过程。

SRM(A, R, M, N, S)　计算相似系数并使之压缩在[0, 1]区间内之过程。

MLP(R, S, M)　矩阵褶积过程。

AMIN($N_1$, $N_2$)　进行“∧”运算的函数过程。

AMAX($N_1$, $N_2$)　进行“∨”运算的函数过程。

CRIJ(S, N, LAM, PAIR)　由满足传递性的矩阵 $R^n$ 进行聚类的过程。

2.输入格式，原始数据按下列顺序穿孔：对象数N；变量数M；原始数据矩阵A[1:N, 1:N]

3.开关使用，本程序未使用开关。

4.输出顺序，计算结果按下列顺序由快速打印机输出：

对象数；

变量数；

聚类结果（共N-1组）。

（1）隶属度

（2）对象编号（较小的号码）

（3）对象编号（较大的号码）

5.特殊情况处置：沉程序第3行已置NUM=1，若需进行其它变换或不作变换，可修改此行。前已交代，当NUM=3时，原始数据需大于零，否则将产生错误并停机，此时应改动NUM的值。

```
'BEGIN'
'INTEG'N, M, NUM;
NUM: = 1;
N: = READI; M: = READI;
PRINT(NUM); PRINT(N); PUSH(M, 1);
'BEGIN'
'ARRAY'A[1:N, 1:M], R, S[1:N, 1:N], LAM[1:N-1];
'INTEG''ARRAY'PÁIR[1:2, 1:N-1];
'PROC'TRAN(A, M, N, NUM);
'VALUE'M, N, NUM;
'INTEG'M, N, NUM; 'ARRAY'A;
'BEGIN''INTEG'H, K, L;
'ARRAY'ME, SQ[1:M]
'IF'NUM=1'THEN''BEGIN'
'FOR'H: = 1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
'BEGIN'ME[H]: = SQ[H]: = 0;
'FOR'K: = 1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'ME[H]: = ME[H] + A[K, H];
SQ[H]: = SQ[H] + A[K, H] × A[K, H];
'END';
SQ[H]: = (N × SQ[H]-ME[H] × ME[H])/(N × (N-1))
SQ[H]: = GN2(SQ[H]),
ME[H]: = ME[H]/N;
'FOR'K: = 1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
A[K, H]: = (A[K, H]-ME[H])/SQ[H];
'END';
```

```
'GOTO'T40; 'END';
'IF'NUM=2'THEN'
'BEGIN'FOR'H:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
'BEGIN'ME[H]:=-1018;
SQ[H]:=1018;
'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'
'IF'A[K, H]'GR'ME[H]'THEN'
ME[H]:=A[K, H];
'IF'A[K, H]'LS'SQ[H]'THEN'
SQ[H]:=A[K, H];
'END';
ME[H]:=ME[H]-SQ[H];
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
A[L, H]:=(A[L, H]-SQ[H])/ME[H];
'END';
'GOTO'T40; 'END';
'IF'NUM=3'THEN'
'BEGIN''FOR'H:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
A[H, K]:=LN(A[H, K]);
'END';
T40:'END';
'PROC'SRM(A, R, M, N, S);
'VALUE'M, N; 'INTEG'M, N;
'ARRAY'A, R, S;
'BEGIN''INTEG'H, K, L;
'ARRAY'SQ[1:N];
'FOR'H:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'SQ[H]:=0;
'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
SQ[H]:=SQ[H]+A[H, K]××2;
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
R[L, H]:=0;
SQ[H]:=GN2(SQ[H]);
'END';
'FOR'H:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'FOR'K:=H'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'
```

```
'FOR'L: = 1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
R[H, K]: = R[H, K] + A[H, L] × A[K, L];
'IF'K = H'THEN'
S[H, K]: = R[H, K]: = 1'ELSE'
'BEGIN'R[H, K]: = R[H, K]/(SQ[H] × SQ[K]);
S[H, K]: = R[H, K]: = 0.5 + R[H, K]/2;
S[K, H]: = R[K, H]: = R[H, K]; 'END';
'END';
'END';
'REAL''PROC'AMAX(N1, N2);
'VALUE'N1, N2; 'REAL'N1, N2;
'BEGIN''REAL'MA;
MA: = N1;
'IF'N2'GR'N1'THEN'MA: = N2;
AMAX: = MA;
'END';
'REAL''PROC'AMIN(N1, N2);
'VALUE'N1, N2; 'REAL'N1, N2;
'BEGIN''REAL'M1;
M1: = N1;
'IF'N2'LS'N1'THEN'M1: = N2;
AMIN: = M1;
'END';
'PROC'MLP(R, S, M);
'VALUE'M; 'INTEG'M;
'ARRAY'R, S;
'BEGIN''INTEG'H, K, L;
'ARRAY'RS[1:M, 1:M];
M10: = 'FOR'H: = 1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
'FOR'K: = 1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
'BEGIN'RS[H, K]: = -1018;
'FOR'L: = 1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
RS[H, K]: = AMAX(RS[H, K], AMIN(R[H, L], S[L, K]));
'END';
'FOR'H: = 1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
'FOR'K: = 1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
'IF'RS[H, K]'NQ'S[H, K]'THEN'
'GOTO'M20;
'GOTO'M60;
```

```
M20: 'FOR'H: =1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
'FOR'K: =1'STEP'1'UNTIL'M'DO'
S[H, K]: =RS[H, K];
'GOTO'M10;
M60: 'END';
'PROC'CRIJ(S, N, LAM, PAIR);
'VALUE'N; 'INTEG'N;
'ARRAY'S, LAM; 'INTEG''ARRAY'PAIR;
'BEGIN''INTEG'H, K, L; 'REAL'LMAX;
'INTEG''ARRAY'NS[1:N];
'FOR'H: =1'STEP'1'UNTIL'N'DO' NS[H]: =0;
'FOR'L: =1'STEP'1'UNTIL'N-1'DO'
'BEGIN'
LMAX: =-1018;
'FOR'H: =1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'FOR'K: =H'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN''IF'NS[H]=1'OR'NS[K]=1'THEN''GOTO'C60;
'IF'S[H, K]'GR'LMAX'AND'S[H, K]'NQ'1'THEN'
'BEGIN'LMAX: =S[H, K];
PAIR[1, L]: =H; PAIR[2, L]: =K; 'END';
C60: 'END';
LAM[L]: =LMAX;
NS[PAIR[2, L]]: =1;
PRINT(LAM[L]); PRINT(PAIR[1, L]);
PRINT(PAIR[2, L]);
PUSH(0, -1);
'END';
'END';
READ(A);
TRAN(A, M, N, NUM);
SRM(A, R, M, N, S);
MLP(R, S, N); CRIU(S, N, LAM, PAIR);
'END';
'END'
```

## §1-2 模糊$K$-均值聚类法在地质学中的应用[2]

1983年朱政嘉阐述了模糊$K$-均值聚类法的基本理论和计算，对地质上的 样 品分类的几个典型实例都在6912机上进行了试算，效果良好。

## 一、集合的模糊$C$组分类

1.集合的$C$组分类：

设$X=\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \cdots, \underline{x}_n\}\subset R^p$表示原来信息的特征矢量集，其中$R^p$表示$p$维实数空间，$\underline{x}_i=(x_{i1}, x_{i2}\cdots x_{ip})$，$x_{ij}$是第$i$个样品$\underline{x}_i$的第$j$个指标(变量)的参数。

又把特征矢量集$X$进行适当分类，得到$C$个相斥且非空的类，将此结果表示成$\underline{S}=(\underline{s}_1, \underline{s}_2, \cdots, \underline{s}_c)$。

再设$V_{CN}$是所有$C\times N$阶矩阵的矢量空间，$C$是正整数且让$2<C<n$，对$V_{CN}$中任一矩阵$U=(u_{ik})(i=1, 2, \cdots, C; k=1, 2, \cdots, n)$，若满足如下三条件：

1）元素$u_{ik}$为0或1；

2）$\sum_{i=1}^{c}u_{ik}=1$，$\forall i, k$（每列恰有一个为1的元素）

3）$\sum_{k=1}^{n}u_{ik}>0$，$\forall i$

则叫矩阵$U=(u_{ik})\subset V_{CN}$为$X$的$C$组分类（或分划）。

对$V_{CN}$中任一个$U$，它的第$i$行$U_i=(u_{i1}, u_{i2}, \cdots u_{in})$可以解释为如下的特征函数值：

$$u_{ik}=U_i(\underline{x}_k)=\begin{cases}1, & \underline{x}_k\in Z_i\in X\\ 0, & 否则\end{cases}$$

它表示第$k$个样品矢量$\underline{x}_k$属于第$i$类$\underline{S}_i$的隶属程度，其中$Z_i$是所有$U_i(\underline{x}_k)$取值为1的$X$中元素的集合，这样$U$的每一行就决定了$X$中的一个子集合$Z_i$，从而把$X$分成$C$个子集合$Z_i(i=1, 2, \cdots, C)$，这些子集合的集合$(Z_1, Z_2, \cdots, Z_c)$就构成了$X$的一个$C$组分类。

例如，取样品数$n=7$，分类组数$C=3$的

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

表示样品的一个分类。样品1，6，7属于第一类$Z_1=(\underline{x}_1, \underline{x}_6, \underline{x}_7)$；样品3，4，5，属于第二类$Z_2=(\underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5)$；样品2属于第三类$Z_3=(\underline{x}_2)$。这样，由$Z_1$，$Z_2$，$Z_3$组成的集合$(Z_1, Z_2, Z_3)$构成$X$的一个$C(C=3)$组分类。

然而，在地质样品分类过程中，所遇到的往往不是上面的一类集合。地质样品不论采用何种标准进行分类，分类集合的界限必然是不分明的。例如，岩石中区分“含矿岩石集合”与“非含矿岩石集合”；碎屑岩石中区分“石英岩集合”，“长砂岩集合”，“硬砂岩集合”等一类不分明界限的分类集合。这样，特征矢量集合中的每个样品的从属类的隶属函数值$u_i(\underline{x}_k)$不能单纯用属于或不属于（即1或0）来衡量，而用具有[0，1]区间的数值来表示，因此，我们可把$C$组分类情况推广到模糊集上来。

2.集合的模糊$C$组分类：

设$V_{CN}$表示所有$C\times N$阶模糊矩阵的矢量空间，在$V_{CN}$中任一矩阵$U=(u_{ik})$若满足以下三条件

1.）每个元素$u_{ik}$在区间[0，1]上取值；

2）$\sum_{i=1}^{c}u_{ik}=1$，$\forall k$

3）$\sum_{k=1}^{n} u_{ik}>0$，$\forall i$。

则叫矩阵$U=(u_{ik})\subset V_{CN}$为$X$的一个模糊$C$组分类（或分划）。

这里，任一矩阵$U$表示样品隶属各类的隶属程度，对$U$的第$i$行$U_i=(u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{ik})$可以解释为以下的隶属函数值：$u_{ik}=u_i(\underline{x}_k)\in[0, 1]$。$u_i(\underline{x}_k): X\rightarrow[0, 1]$。它表示第$k$个样品矢量$\underline{x}_k$属于第$i$类$\underset{\sim}{S_i}$的隶属程度。

设$Z_i$是所有取$\max\limits_i\{u_i(\underline{x}_k)\}$值的$X$中的元素（$\underline{x}_k\in Z_i\in X$）的集合。这样，$U$的每一行就决定了$X$中的一个子集合$Z_i$；从而把$X$分成$C$个子集合$Z_i(i=1, 2, \cdots, C)$，这些子集合组成的集合$(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$就构成了一个模糊$C$组分类。

例如，取样品数$n=7$，分类组数$C=3$的

$$U=\begin{pmatrix}0.86 & 0.20 & 0.00 & 0.10 & 0.01 & 0.87 & 0.95\\ 0.10 & 0.03 & 0.90 & 0.81 & 0.96 & 0.03 & 0.00\\ 0.04 & 0.77 & 0.10 & 0.09 & 0.03 & 0.10 & 0.05\end{pmatrix}$$

表示样品的一个分类。样品1，6，7，属于第一类的隶属函数值最大，因此，第一类$Z_1=(\underline{x}_1, \underline{x}_6, \underline{x}_7)$，同理第二类$Z_2=(\underline{x}_3, \underline{x}_4, \underline{x}_5)$，第三类$Z_3=(\underline{x}_2)$。这样$(Z_1, Z_2, Z_3)$就构成了一个模糊$C(C=3)$组分类。

## 二、模糊$K$-均值聚类法

设原信息的特征矢量集合$X$的初始$C$组分类，用模糊矩阵（隶属函数矩阵）表示，即

$$U=(u_{ik}) \quad (i=1, 2, \cdots, C; k=1, 2, \cdots, n)$$

其中
$$u_{ik}\in[0, 1]，且\sum_{i=1}^{C} u_{ik}=1$$

又设$V_i(i=1, 2, \cdots, C)$是第$i$类的聚类中心矢量，现考察下面泛函的最优化问题：

$$J_m(U, V)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{C}(u_{ik})^m\cdot\|\underline{x}_k-V_i\|^2 \quad (1\leqslant m\leqslant\infty) \qquad (1\text{-}2\text{-}1)$$

式中 $U$——模糊矩阵；$V=(V_1, V_2, \cdots, V_c)$；$\|\circ\|$——$R^p$空间中任一种范数；

$m$——大于等于1的任一实数；$J_m$——目标函数。

1.模糊$K$-均值法的聚类准则

在（1-2-1）式中，当$m=1$，$u_{ik}\in\{0, 1\}$时，就成为一般的$K$-均值聚类法。从而，可用最小二乘法找出一个恰当的$C$组分类矩阵$U$与恰当的由聚类中心矢量$\underline{V}_i(i=1, 2, \cdots, C)$组成的$V$，使得$J_1(U, V)$达到最小。当$m>1$，$u_{ik}\in[0, 1]$时，可用加权最小二乘法找出一个恰当的模糊$C$组分类矩阵$U$与恰当的由聚类中心矢量$\underline{V}_i(i=1, 2, \cdots, C)$组成的$V$，使得$J_m(U, V)$达到最小。事实上，这个问题可归结为求一个函数

$$J_m(U, V)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{C}(u_{ik})^m\cdot\|\underline{x}_k-\underline{V}_i\|^2$$

在约束条件$\sum_{i=1}^{C} u_{ik}=1$下的条件极值问题。因此，利用拉格郎日乘数法，当$m>1$时及$\underline{x}_k\neq\underline{V}_i$时，可以证明

$$u_{ik}=1\Bigg/\sum_{j=1}^{C}\left(\frac{\|\underline{x}_k-\underline{V}_i\|}{\|\underline{x}_k-\underline{V}_j\|}\right)^{\frac{2}{m-1}} \qquad (1\text{-}2\text{-}2)$$

$$V_i=\sum_{k=1}^{n}(u_{ik})^m\cdot \underline{x}_k \Big/ \sum_{k=1}^{n}(u_{ik})^m \qquad (1\text{-}2\text{-}3)$$

$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ C;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

2.模糊$K$-均值聚类的计算步骤

1）确定分类数$C$，取$l=0$，给定一个初始$C$组分类$U^{(l)}$；

2）用（1-2-3）式计算初始分类的聚类中心矢量$\underline{V}_i^{(l)}$；

3）用（1-2-2）式计算$U^{(l+1)}$；

4）给定收敛的判别值$\varepsilon$，若$\|u_{ik}^{(l+1)}-u_{ik}^{(l)}\|<\varepsilon$，则$u_{ik}^{(l+1)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ C;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$及相应的$V_i^{(l+1)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ C)$即为所求的$U$和$V$，否则，$l\Longleftarrow l+1$，再回到（2），反复迭代进行以上计算。

3.目标函数$J_m$中$m$的选取。

用模糊$K$-均值聚类法反复计算$u_{ik}$及$\underline{V}_i$的过程中，一般要取定$m$，当$m\to 1$时，可以提供一个关于$J_m$的最终分类的有效算法，这个算法的作用就像ISODATA的分类过程，这时$J_m$的最终分类，有较小的模糊性。当$m>2$逐渐增大时，$J_m$的最终分类将具有较大的模糊性。所以，采取折衷方案选取$m=2$最适宜，使得$J_m$的最终分类达到局部最优，在实例计算中选定$m=2$计算。

## 三、计算实例

1.某地超基性岩的一批样品，经光谱分析得到与矿物有关的某些元素（指标），其资料数据如1-2-1表。

光谱分析得到样品的数据　　　表 1-2-1

| 样品编号 | 岩性特征 | 元素含量 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Ni | CO | Cu | Cr | S | As |
| Ⅰ | 蛇纹岩 | 1903 | 273 | 100 | 1178 | 8163 | 4 |
| Ⅱ | $A$组矿化蛇纹岩 | 2328 | 79 | 6 | 3175 | 586 | 14 |
| Ⅲ | 无矿化蛇纹岩 | 744 | 26 | 1 | 841 | 425 | 3 |
| Ⅳ | 矿化滑镁岩 | 2782 | 273 | 150 | 2400 | 8234 | 37 |
| Ⅴ | $B$组矿化滑镁岩 | 1776 | 94 | 13 | 3140 | 54 | 1 |
| Ⅵ | 无矿化滑镁岩 | 104 | 44 | 6 | 2093 | 104 | 4 |

试用模糊$K$-均值聚类法对样品进行分类。所列元素在岩石中一般遵从对数正态分布，因此，先将原始数据变换为对数值。为了给出初始分类，我们用模糊关系上的聚类法对样品进行分类，可得到聚类图。

为简单起见，取距离系数的置信水平$\lambda$，在$0.367<\lambda<0.42$之间，把样品划分成两类（或多类）作为初始分类$U_0$。即样品Ⅱ，Ⅲ，Ⅴ，Ⅵ号属于$A$类，样品Ⅰ，Ⅳ号属于$B$类，用模糊矩阵表示$U_0$可写成

$$U_0=\begin{pmatrix}0.1 & 0.9 & 0.9 & 0.1 & 0.9 & 0.9\\ 0.9 & 0.1 & 0.1 & 0.9 & 0.1 & 0.1\end{pmatrix}$$

其中行表示分类，列表示样品。

然后以$U_0$作为初始分类，在$C=2$，取$m=2$，$\varepsilon=0.01$，反复利用计算公式(1-2-3)

和(1-2-2)不断修改初始分类。最后算出在置信水平$\lambda$于$0.367<\lambda<0.42$上的最优分类矩阵和聚类中心矩阵$V$分别为：

$$U=\begin{pmatrix} 0.038 & 0.858 & 0.937 & 0.475 & 0.928 & 0.983 \\ 0.962 & 0.142 & 0.063 & 0.525 & 0.072 & 0.017 \end{pmatrix}$$

$$V=\begin{pmatrix} 3.255 & 1.862 & 0.757 & 3.307 & 2.364 & 0.607 \\ 5.581 & 2.423 & 2.162 & 3.149 & 3.880 & 0.825 \end{pmatrix}$$

根据最优分类矩阵可列出样品的分类表如下：

**样 品 分 类 表** 表 1-2-2

| 样品序号 | 隶属函数值 | | 所属类型 |
|---|---|---|---|
| | $u_{1i}$ | $u_{2i}$ | |
| Ⅰ | 0.038 | 0.962 | $B$ |
| Ⅱ | 0.858 | 0.142 | $A$ |
| Ⅲ | 0.937 | 0.063 | $A$ |
| Ⅳ | 0.475 | 0.525 | $B$ |
| Ⅴ | 0.928 | 0.072 | $A$ |
| Ⅵ | 0.983 | 0.017 | $A$ |

其中$u_{ki}$表示第$i$个样品隶属于第k类的隶属函数值。以上所得的样品分类基本上和实际资料的结果相符合，并且与普通的系统聚类法的分类结果比较是完全一致的。

**2.** 某地区震旦纪雾迷山、杨庄、高于庄、大红峪、景儿峪五组地层取样的分析数据（如表1-2-3），及4个未知地层样品的分析数据（如表1-2-4），其中前九项元素的单位为P.P.M，后三项元素的单位为%，试判别未知地层样品归哪一组地层？

设雾迷山地层为$A$类，杨庄地层为$B$类，高于庄地层为$C$类，大红裕地层为$D$类，景儿

**五组地层取样的分析数据** 表 1-2-3

| 地名 | 编号 | K | Li | Sr | Zr | Ba | V | Ti | Cu | Ni | Si(%) | Mg(%) | Ca(%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 雾迷山 | 1 | 41 | 1 | 32 | 5 | 2000 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0.88 | 21.87 | 30.28 |
| | 2 | 33 | 1 | 12 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.54 | 21.63 | 29.65 |
| | 3 | 59 | 2 | 8 | 20 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 23.56 | 16.26 | 23.27 |
| | 4 | 19 | 1 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.64 | 21.66 | 29.62 |
| | 5 | 56 | 1 | 4 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.34 | 21.48 | 29.72 |
| | 6 | 46 | 1 | 15 | 50 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 0.31 | 22.05 | 29.75 |
| | 7 | 110 | 0 | 6 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1.38 | 21.76 | 29.86 |
| | 8 | 33 | 1 | 8 | 10 | 0 | 1 | 10 | 1 | 0 | 9.95 | 19.41 | 19.41 |
| | 9 | 28 | 1 | 4 | 10 | 0 | 1 | 10 | 1 | 0 | 0.73 | 21.73 | 27.31 |
| 杨庄 | 10 | 400 | 1 | 15 | 5 | 51 | 10 | 100 | 2 | 30 | 11.60 | 18.42 | 26.63 |
| | 11 | 3000 | 12 | 15 | 21 | 50 | 100 | 2000 | 5 | 60 | 28.39 | 13.58 | 19.64 |
| | 12 | 100 | 0 | 15 | 0 | 60 | 5 | 0 | 4 | 0 | 1.45 | 21.02 | 29.98 |
| | 13 | 290 | 0 | 20 | 0 | 0 | 8 | 100 | 2 | 30 | 18.16 | 16.55 | 24.12 |
| | 14 | 3200 | 43 | 28 | 0 | 3000 | 10 | 50 | 5 | 51 | 19.91 | 16.21 | 22.17 |
| | 15 | 340 | 5 | 31 | 10 | 1 | 10 | 100 | 100 | 0 | 78.41 | 3.43 | 4.77 |
| | 16 | 2600 | 64 | 17 | 11 | 50 | 30 | 1000 | 30 | 50 | 29.02 | 14.49 | 17.64 |
| | 17 | 1400 | 28 | 10 | 11 | 50 | 30 | 500 | 5 | 30 | 25.23 | 15.63 | 21.02 |
| | 18 | 250 | 1 | 28 | 10 | 90 | 5 | 30 | 20 | 0 | 7.45 | 19.93 | 26.83 |

续表

| 地名 | 编号 | K | Li | Sr | Zn | Ba | V | Ti | Cu | Ni | Si(%) | Mg(%) | Ca(%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 高于庄 | 19 | 64 | 3 | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.24 | 21.04 | 29.71 |
| | 20 | 120 | 4 | 20 | 5 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 8.19 | 19.40 | 27.06 |
| | 21 | 140 | 0 | 40 | 5 | 10000 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0.92 | 20.78 | 28.78 |
| | 22 | 150 | 0 | 36 | 10 | 200 | 5 | 30 | 10 | 0 | 2.34 | 20.84 | 29.34 |
| | 23 | 540 | 2 | 0 | 20 | 0 | 10 | 300 | 100 | 10 | 32.51 | 13.87 | 18.85 |
| | 24 | 34 | 0 | 0 | 5 | 50 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1.70 | 21.10 | 29.18 |
| | 25 | 88 | 0 | 0 | 10 | 200 | 0 | 0 | 100 | 0 | 13.16 | 18.55 | 26.20 |
| | 26 | 150 | 0 | 33 | 10 | 100 | 5 | 30 | 3 | 0 | 1.53 | 20.87 | 29.36 |
| 大红峪 | 27 | 480 | 0 | 11 | 5 | 200 | 5 | 50 | 4 | 0 | 6.19 | 19.23 | 27.85 |
| | 28 | 590 | 0 | 11 | 5 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 48.87 | 10.27 | 14.88 |
| | 29 | 1100 | 1 | 17 | 5 | 300 | 6 | 60 | 4 | 0 | 8.85 | 18.79 | 26.78 |
| | 30 | 440 | 0 | 0 | 10 | 50 | 5 | 50 | 30 | 50 | 49.75 | 10.06 | 13.82 |
| | 31 | 770 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 | 300 | 20 | 10 | 68.80 | 4.97 | 7.11 |
| | 32 | 90 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | 40 | 4 | 0 | 3.27 | 21.21 | 28.42 |
| | 33 | 350 | 0 | 3 | 5 | 0 | 0 | 60 | 4 | 0 | 6.33 | 20.05 | 27.69 |
| 景儿峪 | 34 | 9600 | 0 | 5 | 60 | 0 | 300 | 3000 | 30 | 300 | 59.6 | 0.72 | 0.98 |
| | 35 | 930 | 0 | 100 | 30 | 3000 | 100 | 400 | 40 | 10 | 13.67 | 1.01 | 43.98 |
| | 36 | 620 | 0 | 154 | 10 | 10000 | 100 | 0 | 0 | 0 | 13.42 | 0.61 | 44.97 |
| | 37 | 680 | 0 | 162 | 10 | 100 | 200 | 500 | 40 | 100 | 12.07 | 0.55 | 45.62 |
| | 38 | 3600 | 2 | 140 | 20 | 300 | 200 | 500 | 100 | 100 | 30.75 | 0.61 | 27.23 |
| | 39 | 1400 | 7 | 94 | 50 | 50 | 200 | 760 | 100 | 100 | 37.00 | 0.83 | 26.30 |
| | 40 | 1800 | 1 | 166 | 30 | 50 | 200 | 500 | 100 | 100 | 19.13 | 0.62 | 36.42 |

**4个未知地层样品的分析数据** 表 1-2-4

| 编号 | K | Li | Sr | Zn | Ba | V | Ti | Cu | Ni | Si(%) | Mg(%) | Ca(%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 53 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0.85 | 21.52 | 30.08 |
| 42 | 96 | 1 | 22 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.80 | 21.27 | 30.09 |
| 43 | 120 | 3 | 18 | 0 | 200 | 0 | 0 | 32 | 36 | 13.68 | 18.10 | 26.15 |
| 44 | 300 | 0 | 17 | 10 | 100 | 0 | 0 | 20 | 0 | 58.82 | 7.91 | 11.00 |

裕地层为$E$类。用模糊$K$-均值聚类法对未知地层样品作五类判别，未知样品所属各类隶属函数值列表1-2-5。

表 1-2-5

| 样品序号 | 隶属函数值 | | | | | 所属类型 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $u_{1j}$ | $u_{2j}$ | $u_{3j}$ | $u_{4j}$ | $u_{5j}$ | |
| 41 | 0.95 | 0.014 | 0.018 | 0.015 | 0.003 | $A$ |
| 42 | 0.969 | 0.009 | 0.011 | 0.009 | 0.002 | $A$ |
| 43 | 0.034 | 0.117 | 0.776 | 0.049 | 0.024 | $C$ |
| 44 | 0.103 | 0.296 | 0.132 | 0.337 | 0.131 | $D$ |

上表计算结果指出了四个未知地层样品所属的地层类，即41号，42号地层样品属于$A$类，43号地层样品属于$C$类，44号地层样品属于$D$类，而且同属于$A$类的未知样品中，42号地层样品隶属$A$类的程度比41号地层样品要高，此判别结果与实际检验结果是完全符合的。

模糊$K$-均值聚类法是近几年发展起来的一种分类方法，利用它可对地质样品集合作聚类分析，亦可作判别分析，它不但适用于线性点群而且还适用于非线性点群。可以认为：只要在样品中的各个指标（变量）集合遵从正态分布或对数分布的前提下，用模糊$K$-均值聚类法对地质样品集合进行分类是比较有效的、切合实际的，以上两个实例的试算证实了这一点，因此，模糊$K$-均值聚类法是一种有效的分类方法。在方法和程序的使用上是值得推广的。

## §1-3　模糊聚类和模式识别在金堆城钼矿区的应用[3]

1983年董根银，叶士衡等利用模糊聚类和模式识别方法，对金堆城钼矿区的十三个地球化学异常进行了模糊聚类分析，用西门子7760计算机完成全部计算，取得了比普通聚类法更好的效果。

### 一、问题的提出

过去，曾通过十一种微量元素(Mo、Pb、Zn、Cu、As、Co、V、Ti、B、Ba)，对金堆矿一黄龙铺矿田的13个矿床、矿点、矿化点的地球化学异常，沿用常规的经典方法作聚类分析。分类的结果与实际有出入，问题在哪里呢？因为多数金属矿床的形成是复杂的地质因素长期作用的结果，利用微量元素分析值分类，有时仅能反映复杂成矿的某一个方面。假如能把矿床有关的地质因素引进数学分类，将会使分类更切合实际。而地质因素大部分是模糊因素，为此，利用模糊数学可以研究模糊地质因素这一特点，再次对这13个地球化学异常进行了模糊聚类分析，取得较好的结果，与实际相吻合。

### 二、数学模型及结果分析

1.具体方法和步骤

在程序设计中，采用一般经典常用运算和模糊运算二种计算方法，同时作了聚类分析的$R$型变量之间的分类和$Q$型样本之间的分类。以下只论述$Q$型样本分类。采用距离函数和相似系数公式，全部有关数据的计算都在西门子7760计算机上完成，模糊运算程序框图见图1-3-1。

2.未加入地质因素之前的分类结果

十一种微量元素的原始值见表1-3-1，通过经典方法和模糊方法聚类，其结果见图1-3-2。

由图1-3-2可见，当阀值$\lambda=0.263$时，可分为5类，同时可见模糊聚类和经典聚类的结果并无显著的差别，所以，如果仅数学运算上改变算法还是不能较合理地反映客观地质体的分类。

3.添加模糊地质因素的分类

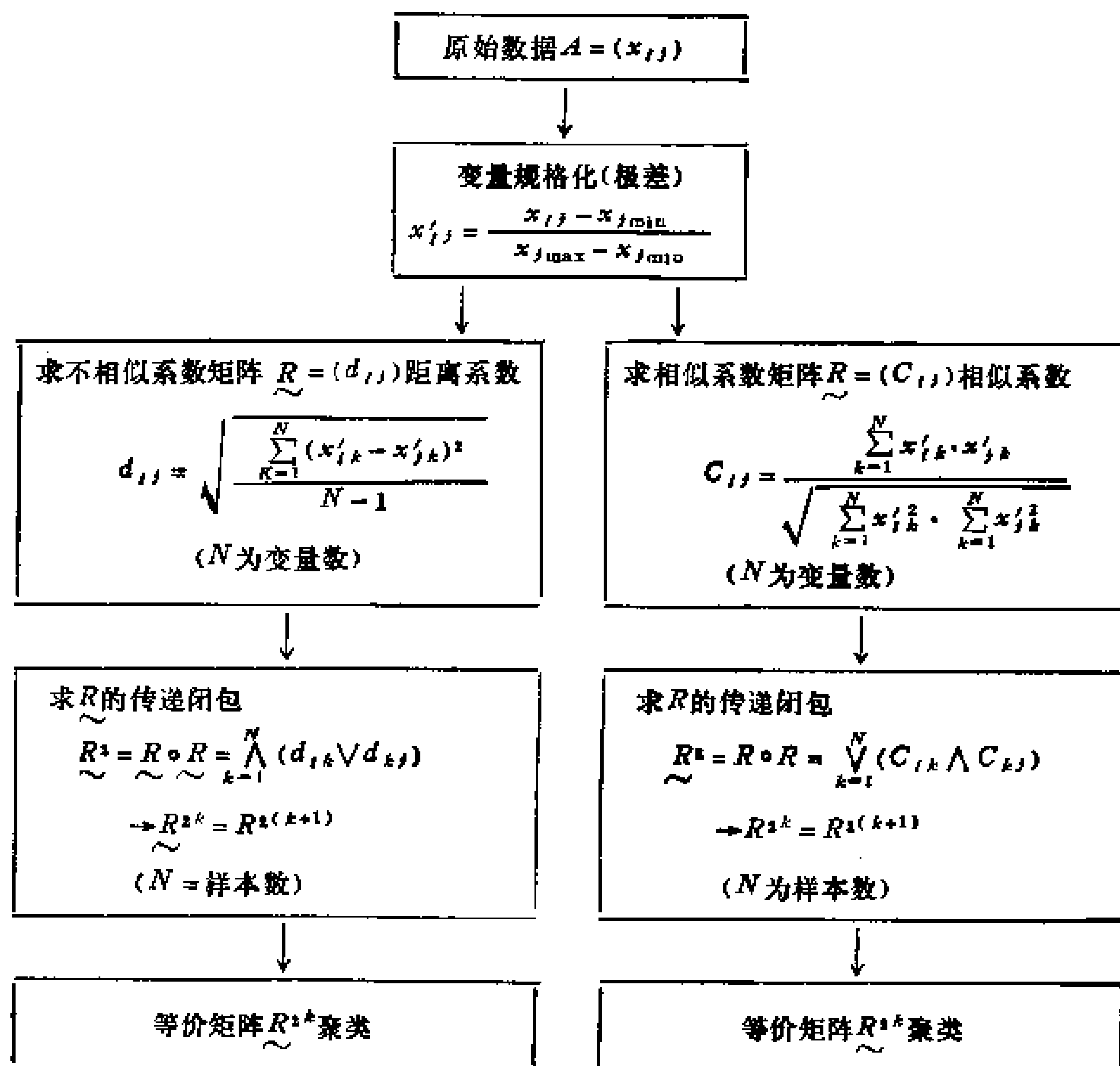



图 1-3-1 程序框图

**十一种微量元素的原始值** 表 1-3-1

| 异 常 | Mo | Pb | Zn | Cu | Ag | Co | V | Ti | Ni | B | Ba |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 金堆城 | 266.0 | 62.5 | 260.3 | 125.7 | 0.14 | 17.3 | 67.3 | 4537.5 | 24.7 | 3.5 | 250 |
| 百家湾 | 283.4 | 28.7 | 228.3 | 57.2 | 0.13 | 15.4 | 51.3 | 4287.2 | 22.0 | 2.5 | 359 |
| 张家院 | 44.6 | 56.7 | 66.4 | 34.8 | 0.13 | 9.2 | 20.6 | 1335.0 | 10.9 | 2.5 | 250 |
| 文峪河 | 100.7 | 21.9 | 91.8 | 5.7 | 0.11 | 8.0 | 24.4 | 2959.6 | 19.0 | 8.8 | 250 |
| 东马路沟 | 360.1 | 24.7 | 400.1 | 23.0 | 0.42 | 10.8 | 38.4 | 5031.9 | 21.8 | 9.9 | 250 |
| 西马路沟 | 11.7 | 45.2 | 50.5 | 71.7 | 0.32 | 13.1 | 32.4 | 2008.8 | 22.1 | 15.2 | 250 |
| 文公岭 | 161.7 | 1257.3 | 1381.0 | 255.5 | 6.93 | 23.4 | 95.0 | 4913.0 | 25.8 | 3.0 | 815 |
| 黄龙铺 | 100.8 | 990.1 | 649.3 | 75.5 | 1.30 | 17.2 | 51.3 | 4942.3 | 31.2 | 3.1 | 1753 |
| 宋家沟 | 117.5 | 1900.6 | 250.9 | 39.9 | 0.34 | 15.8 | 52.5 | 4647.5 | 16.9 | 2.8 | 1479 |
| 桃园 | 226.4 | 995.1 | 289.4 | 55.8 | 0.46 | 15.4 | 67.4 | 4636.3 | 18.8 | 7.8 | 1302 |
| 二道河 | 188.8 | 309.4 | 782.9 | 36.6 | 0.49 | 20.3 | 54.9 | 3576.1 | 31.1 | 38.0 | 940 |
| 东西沟 | 55.1 | 923.5 | 433.9 | 89.1 | 0.06 | 18.0 | 37.2 | 2646.9 | 30.3 | 37.0 | 711 |
| 双庙 | 63.8 | 240.4 | 92.4 | 24.5 | 0.59 | 11.3 | 17.1 | 1321.1 | 25.3 | 27.9 | 290 |

（1）模糊地质因素的选取

根据西北冶金地质勘探公司物探队，化探次生晕扫面和点上大量的工作，对金堆城地区的控矿因素进行了分析研究，该地区北东向和北西向的三组断裂构造控制了钼元素富集；主要矿床都分布在熊尔群和高山河组地层不整合面附近；金堆城、石家湾已确定了大

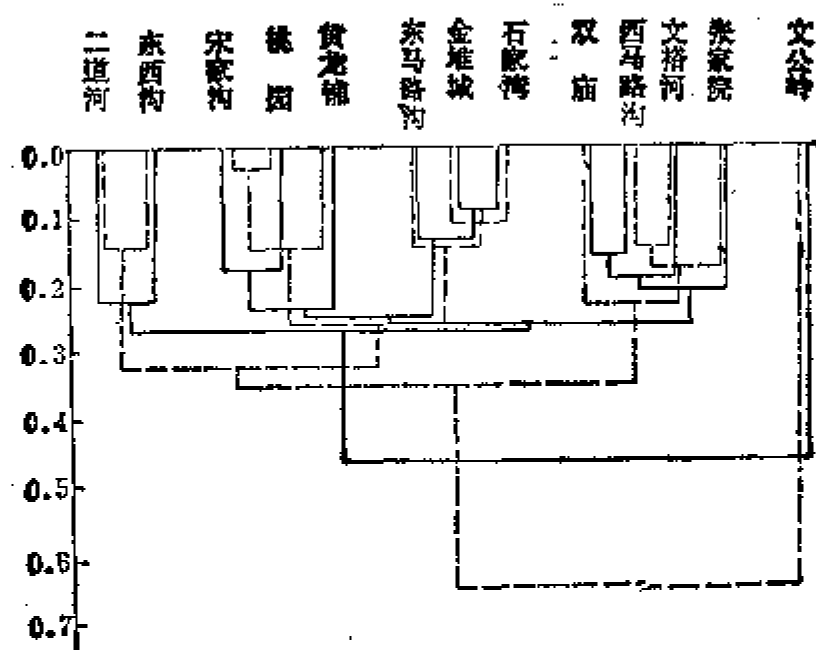



图 1-3-2 谱系图

-----旧法（经典）；——新法（模糊）

型钼矿床都有燕山期的花岗斑岩的侵入，而金堆城的斑岩体含钼。因此，可以认为有利于成矿的因素是：北东向断裂、北西向断裂、地层、岩体。

（2）模糊因素隶属度的确定

四个控矿地质因素中，北东、北西断裂是控矿最主要因素，其次是地层、岩体，故各最高隶属度分别定为0.95,0.95,0.90，0.85，并给出下述确定隶属度的原则：

1）北东向、北西向断裂带：位于断裂带内的异常给最高的隶属度0.95，其余各异常的隶属度按与断裂带的距离分别给出，距离越远隶属度越小；

2）地层：熊尔群火山岩是成矿最有利地层，其次是高山河碎屑岩地层，它们之间的不整合面在成矿过程中也起到一定的作用。异常位于熊尔群和高山河地层不整合面上给予最高隶属度0.90，其余各异常则按所处地层情况分别给出其隶属度；

3）岩体：异常内有燕山期斑岩体，隶属度最高为0.85，其余异常按有无斑岩体等分别给出隶属度。

以西北冶金地质勘探公司物探七分队1981年提交的金堆城-黄龙铺地区地球化学异常图作为评分（即给隶属度）依据，具体数据见表1-3-2。

表 1-3-2

| 模糊因素 | 十 三 个 异 常 | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 金堆城 | 石家湾 | 张家院 | 文峪河 | 东马路沟 | 西马路沟 | 文公岭 | 黄龙铺 | 宋家沟 | 桃园 | 二道河 | 东西沟 | 双庙 |
| | 隶 属 度 | | | | | | | | | | | | |
| 北东向断裂 | 0.92 | 0.95 | 0.90 | 0.95 | 0.95 | 0.90 | 0.85 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.90 | 0.90 | 0.85 |
| 北西向断裂 | 0.95 | 0.80 | 0.85 | 0.95 | 0.95 | 0.90 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.90 |
| 地　　层 | 0.80 | 0.87 | 0.50 | 0.85 | 0.83 | 0.85 | 0.90 | 0.90 | 0.88 | 0.85 | 0.75 | 0.70 | 0.80 |
| 岩　　体 | 0.85 | 0.80 | 0.75 | 0.80 | 0.80 | 0.78 | 0.80 | 0.73 | 0.80 | 0.76 | 0.65 | 0.60 | 0.65 |

（3）引进模糊地质因素分类及其结果分析

经典聚类及模糊聚类的不相似系数矩阵如下（为对称不相似系数矩阵$R$，各数据系原数

据×$10^3$）：

$$
\begin{bmatrix}
0 & 304 & 516 & 327 & 236 & 332 & 494 & 379 & 401 & 234 & 425 & 484 & 512 \\
 & 0 & 444 & 359 & 302 & 355 & 635 & 455 & 452 & 361 & 433 & 539 & 518 \\
 & & 0 & 369 & 486 & 323 & 757 & 602 & 552 & 513 & 574 & 521 & 395 \\
 & & & 0 & 252 & 227 & 690 & 441 & 402 & 543 & 470 & 459 & 404 \\
 & & & & 0 & 372 & 627 & 424 & 416 & 289 & 428 & 492 & 509 \\
 & & & & & 0 & 610 & 434 & 443 & 390 & 403 & 364 & 259 \\
 & & & & & & 0 & 478 & 564 & 531 & 554 & 603 & 693 \\
 & & & & & & & 0 & 271 & 242 & 374 & 410 & 544 \\
 & & & & & & & & 0 & 180 & 491 & 487 & 564 \\
 & & & & & & & & & 0 & 386 & 425 & 528 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 201 & 395 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 321 \\
 & & & & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

模糊等价矩阵如下（为对称模糊等价矩阵$\underset{\sim}{R}^{8}$，各数据系原数据×$10^3$）：

$$
\begin{bmatrix}
0 & 302 & 323 & 352 & 238 & 252 & 478 & 294 & 294 & 294 & 321 & 321 & 259 \\
 & 0 & 323 & 302 & 302 & 302 & 478 & 302 & 302 & 302 & 321 & 321 & 302 \\
 & & 0 & 323 & 323 & 323 & 478 & 323 & 323 & 323 & 323 & 323 & 323 \\
 & & & 0 & 252 & 227 & 478 & 294 & 294 & 294 & 321 & 321 & 259 \\
 & & & & 0 & 252 & 478 & 294 & 294 & 294 & 321 & 321 & 259 \\
 & & & & & 0 & 478 & 294 & 294 & 294 & 321 & 321 & 259 \\
 & & & & & & 0 & 478 & 478 & 478 & 478 & 478 & 478 \\
 & & & & & & & 0 & 242 & 242 & 321 & 321 & 294 \\
 & & & & & & & & 0 & 180 & 321 & 321 & 294 \\
 & & & & & & & & & 0 & 321 & 321 & 294 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 201 & 321 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 321 \\
 & & & & & & & & & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

经典聚类谱系见图1-3-3，模糊聚类谱系见图1-3-4。

由图1-3-3和1-3-4可看出：当加入四个模糊地质因素后，进行经典聚类和模糊聚类，相对于未加入之前的分类，有较大的差别。若取阈值$\lambda=0.25$，则应分为八类：①宋家沟，桃园，黄龙铺；②东马路沟，金堆城；③张家院；④西马路沟，文峪河；⑤双庙；⑥石家湾；⑦东西沟，二道河；⑧文公岭。这种分类合乎实际地质资料。因为：

*a*.东马路沟与金堆城已通过勘探证实了是同一矿体。原来是金堆城与石家湾归为一类。

*b*.宋家沟、桃园、黄龙铺都属于"裂隙型"钼矿床，其它地化特征相似。这与原来分类一样。

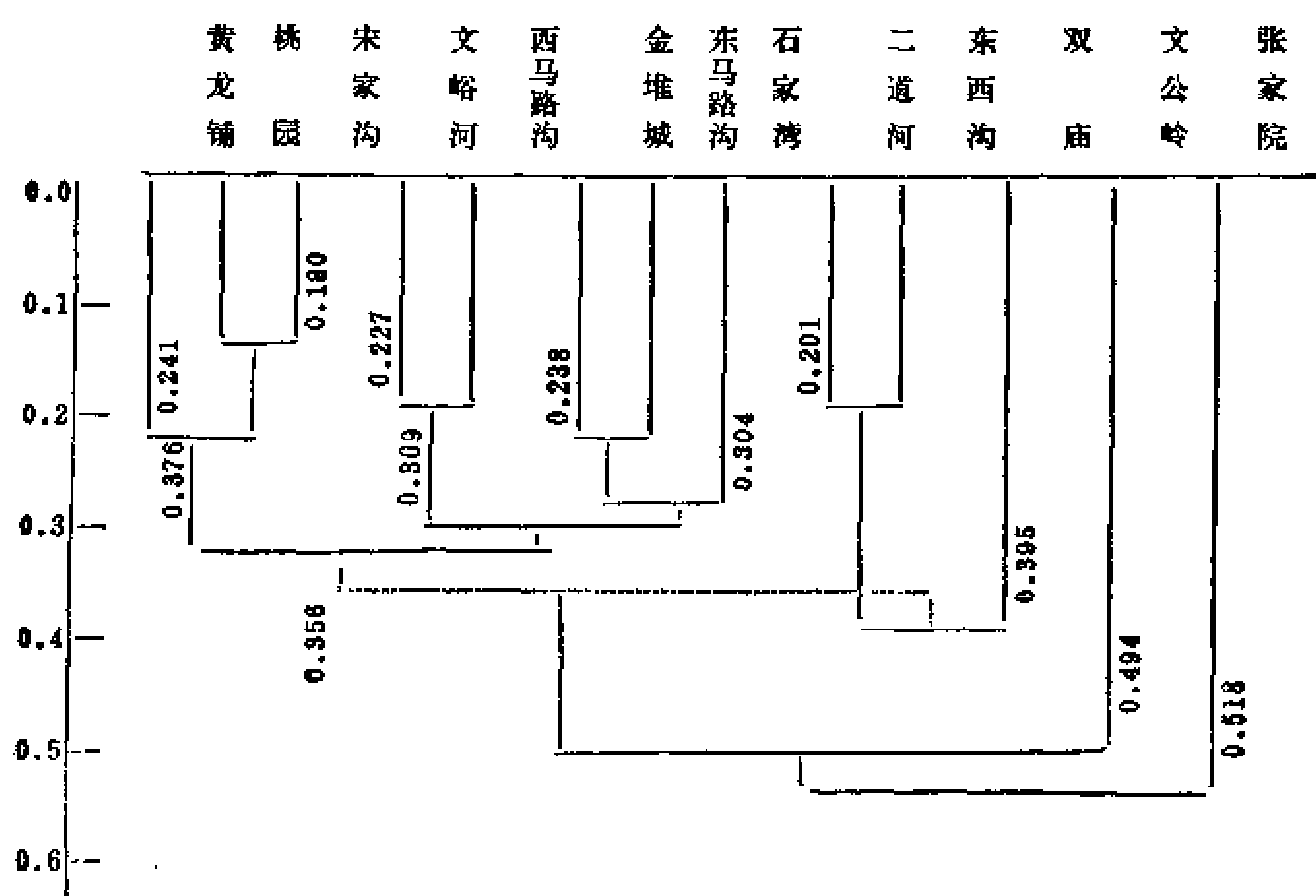



图 1-3-3 经典聚类谱系图

注：虚线为不相似系数出现的摆动现象

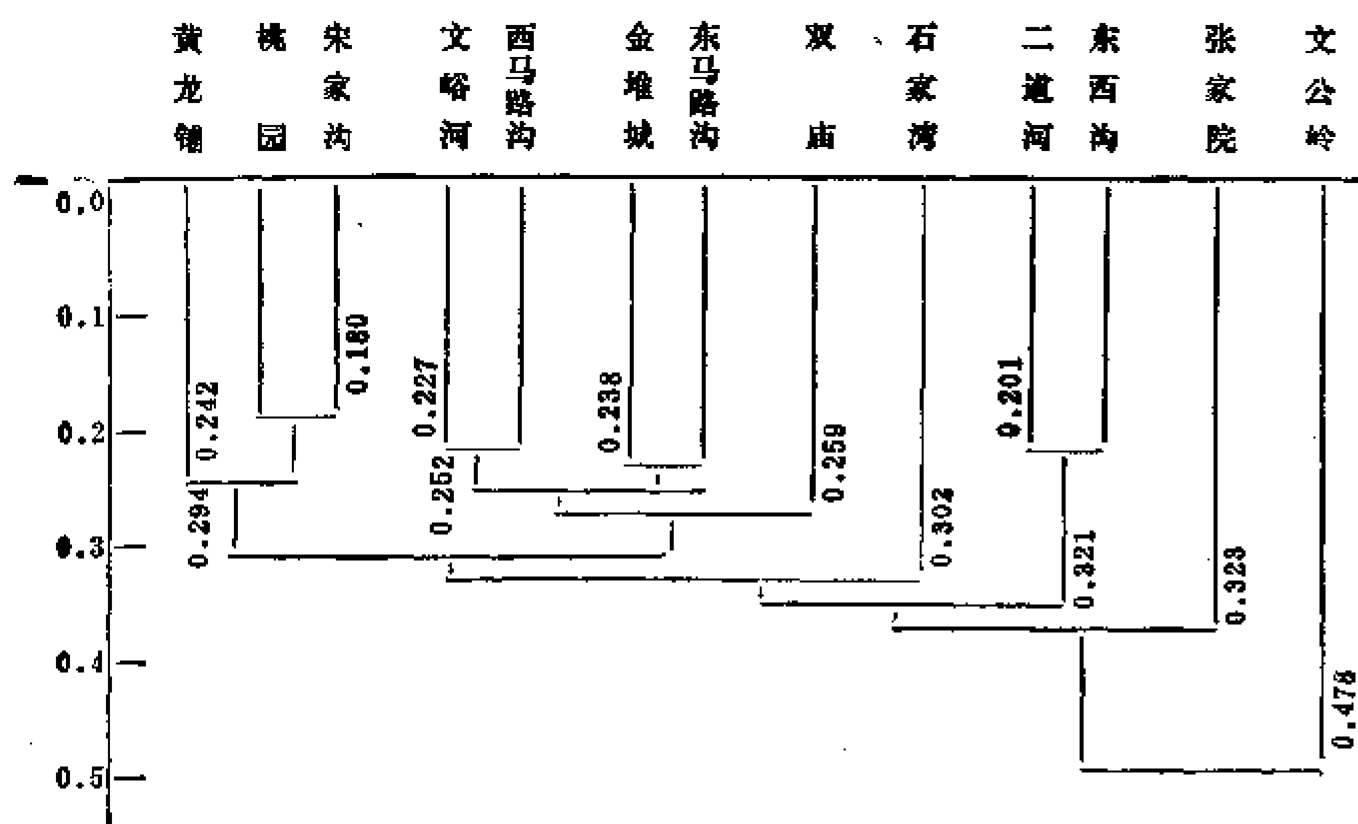



图 1-3-4 模糊聚类谱系图

*c*.张家院是岩体上的局部矿化，无找矿意义，与其它异常有显著差别。现在单独分出一类。原来与双庙、西马路沟，文裕河归为一类是不合理的。

*d*.金堆城与石家湾虽都具有燕山期的斑岩体侵入，但它们之间仍有较大的差别。金堆城的斑岩体含有钼矿，而石家湾的花岗岩内却有一个无矿核。金堆城铜元素含量较高，可作为伴生元素利用，而石家湾则含铜很低。况且它们之间相隔一段距离，中间还夹有桃园矿床。可见在未加入模糊地质因素之前的分类中，把石家湾和金堆城分为一类是不合理的。

由图1-3-3和1-3-4可以看到：尽管经典方法分类和模糊分法分类是相似的，但模糊方

法计算要简单得多，不需要反复求不相似系数，计算工作量可以大大地减少，并且克服了经典方法带来的相似系数出现摆动的不合理现象（图1-3-3中可以见到摆动现象）。

### 三、判别未知异常的所属类型及结果分析

在以上分类的基础上，对未知异常（栗峪沟和8003）判别所属类型。分别计算栗峪沟，8003异常与13个异常的距离系数，并按最小隶属度原则，取距离系数最小值归类。栗峪沟计算结果如下（为对称不相似系数矩阵$\underset{\sim}{R}_1$，原始数据$\times 10^3$）：

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 305 | 537 | 334 | 239 | 349 | 494 | 379 | 401 | 294 | 427 | 491 | 509 | 409 |
| | 0 | 463 | 363 | 304 | 368 | 636 | 455 | 452 | 361 | 494 | 543 | 512 | 332 |
| | | 0 | 372 | 512 | 325 | 773 | 623 | 571 | 533 | 583 | 524 | 391 | 470 |
| | | | 0 | 267 | 231 | 696 | 449 | 409 | 350 | 471 | 459 | 393 | 431 |
| | | | | 0 | 394 | 627 | 423 | 416 | 298 | 433 | 503 | 508 | 505 |
| | | | | | 0 | 624 | 453 | 458 | 406 | 409 | 365 | 246 | 323 |
| | | | | | | 0 | 478 | 564 | 531 | 557 | 611 | 693 | 635 |
| | | | | | | | 0 | 272 | 242 | 379 | 423 | 543 | 483 |
| | | | | | | | | 0 | 180 | 493 | 495 | 581 | 502 |
| | | | | | | | | | 0 | 389 | 433 | 525 | 434 |
| | | | | | | | | | | 0 | 205 | 385 | 477 |
| | | | | | | | | | | | 0 | 307 | 476 |
| | | | | | | | | | | | | 0 | 464 |
| | | | | | | | | | | | | | 0 |

由栗峪沟的计算结果可见，它的距离系数最小值是0.323，应与成矿可能性很少的西马路沟归为一类，因此，看来栗峪沟的找矿前景不大。

8003的计算结果如下（为对称不相似系数矩阵$\underset{\sim}{R}_2$，原始数据$\times 10^3$）：

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 149 | 476 | 289 | 202 | 289 | 429 | 199 | 186 | 162 | 366 | 408 | 447 | 727 |
| | 0 | 427 | 228 | 157 | 278 | 507 | 230 | 161 | 143 | 390 | 411 | 448 | 663 |
| | | 0 | 326 | 440 | 310 | 688 | 523 | 431 | 440 | 531 | 458 | 373 | 729 |
| | | | 0 | 210 | 196 | 614 | 331 | 233 | 249 | 435 | 398 | 365 | 712 |
| | | | | 0 | 312 | 530 | 250 | 196 | 168 | 384 | 409 | 451 | 685 |
| | | | | | 0 | 547 | 332 | 296 | 300 | 349 | 293 | 216 | 720 |
| | | | | | | 0 | 403 | 497 | 477 | 478 | 561 | 609 | 729 |
| | | | | | | | 0 | 227 | 215 | 328 | 369 | 455 | 672 |
| | | | | | | | | 0 | 199 | 415 | 428 | 470 | 670 |
| | | | | | | | | | 0 | 363 | 391 | 459 | 659 |
| | | | | | | | | | | 0 | 148 | 350 | 720 |
| | | | | | | | | | | | 0 | 260 | 722 |
| | | | | | | | | | | | | 0 | 748 |
| | | | | | | | | | | | | | 0 |

由结果可见，8003的距离系数最小值为0.659（大于0.5）；它应是独立的，不能归属任何一类。这与实际相符，实际上8003异常点已超出了该钼矿区，是一个金矿异常。

总之，模糊聚类和模式识别方法合理地考虑了和处理了模糊因素，不仅使运算大为简化，而且使分类更为合理，更符合现场实际，并为金堆城钼矿区的详细勘探和开采实践所验证，从而使我们看到了模糊数学用于地质化探工作的可喜前景。

## §1-4 异常评价的模糊数学方法[4]

1985年张守良、孙景春阐述了化探异常快速评价的模糊数学方法，在DJS—21机上用《Fuzzy模型识别计算程序》完成全部计算，效果较好。

### 一、问题的提出

物化探异常及其推断解释往往带有模糊性，将模糊数学方法应用于物化探异常评价是有意义的。对于不同的研究目标或不同精度的测量指标，数学模型可细致可粗糙。细致些可用于研究异常的性质及其与地质体的关系；粗糙些可用于异常的快速评价。这里侧重阐述化探异常快速评价的模糊数学方法。

在一定区域内，以测得的数据全体为论域$X$，$y_1$，$y_2$，…$y_l$为论域$X$上的$l$个Fuzzy子集，表示已知模型。这些模型反映$l$个异常类型，并用这些已知模型去判断全区内异常的属性，这样把异常评价问题归结为模型识别问题。

### 二、模型识别的基本原则和方法

一个模型识别系统大致由如图1-4-1所示的几个部份组成。

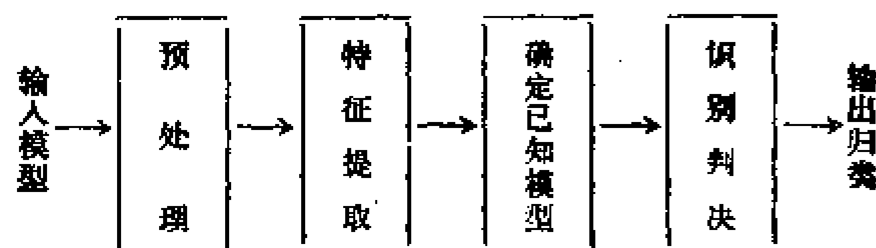


图 1-4-1 模型识别系统框图

模型的识别方法可分为直接和间接方法。

**（一）模型识别的直接方法和最大隶属原则**

设$\underset{\sim}{y}_1$，$\underset{\sim}{y}_2$，…，$\underset{\sim}{y}_l$，为论域$X$上表示已知模型的$l$个模糊子集，$x_0 \in X$为论域$X$上的待识别模型。判断$X_0$属于哪种模型，是根据隶属函数值直接确定的，且按最大隶属原则进行模型识别称为模型识别的直接方法。

1.最大隶属原则：设$\underset{\sim}{y}_1$，$\underset{\sim}{y}_2$，…，$\underset{\sim}{y}_l$为论域$X$上的$l$个模糊子集，$x_0$是$X$上的固定元素，若存在$i \in \{1,2,\cdots,l\}$，使得

$$\mu_{\underset{\sim}{y}_i} = \bigvee_{k=1}^{l} \mu_{\underset{\sim}{y}_k}(x_0)$$

则认为$x_0$相对隶属于$\underset{\sim}{y}_i$。$\mu_{\underset{\sim}{y}_i}$为$x_0$隶属$\underset{\sim}{y}_i$的隶属函数值，符号“∨”表示求最大值运算。

2.建立隶属函数：模型识别的直接方法的首要问题是确定隶属函数。隶属函数的确

定，因不同的识别对象而异，常采用模糊统计、集值统计、模糊分布、经验评分等方法。隶属函数要经过检验，并在检验中加以调整，以提高识别的有效性。

（二）模型识别的间接方法与择近原则

1.贴近度：贴近度是衡量两个模糊子集之间贴近程度的，表达形式较多，针对具体问题可以给出特定的形式。

设$\underset{\sim}{y}_1$，$\underset{\sim}{y}_2$为论域$X$上的模糊子集，$\underset{\sim}{y}_1 \cdot \underset{\sim}{y}_2$和$\underset{\sim}{y}_1 \odot \underset{\sim}{y}_2$分别表示$\underset{\sim}{y}_1$与$\underset{\sim}{y}_2$的内积和外积，记

$$(\underset{\sim}{y}_1,\underset{\sim}{y}_2)=[\underset{\sim}{y}_1\cdot\underset{\sim}{y}_2+(1-\underset{\sim}{y}_1\odot\underset{\sim}{y}_2)]/2 \qquad (1\text{-}4\text{-}1)$$

则称$(\underset{\sim}{y}_1,\underset{\sim}{y}_2)$为$\underset{\sim}{y}_1$与$\underset{\sim}{y}_2$的贴近度。

当两个模糊子集的贴近程度主要取决于某些或某个指标元素的强弱时，常采用此种形式。

设$\underset{\sim}{y}_1$，$\underset{\sim}{y}_2$为论域$X$上的模糊子集，记

$$(\underset{\sim}{y}_1,\underset{\sim}{y}_2)=1-c[d(\underset{\sim}{y}_1,\underset{\sim}{y}_2)]^q \qquad (1\text{-}4\text{-}2)$$

式中：

$$d(\underset{\sim}{y}_1,\underset{\sim}{y}_2)=[\sum_{k=1}^{n}|\mu_{\underset{\sim}{y}_1}(x_k)-\mu_{\underset{\sim}{y}_2}(x_k)|^q]^{1/q}$$

则称$(\underset{\sim}{y}_1,\underset{\sim}{y}_2)$为$\underset{\sim}{y}_1$与$\underset{\sim}{y}_2$的贴近度。

2.择近原则：择近原则是以贴近度来判断一个待识别模型归属的。

设$\underset{\sim}{y}_1$，$\underset{\sim}{y}_2$，…，$\underset{\sim}{y}_l$为论域$X$上的$l$个模糊子集，$\underset{\sim}{x}$也是$X$上的模糊子集。若

$$(\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y}_j)=\bigvee_{i=1}^{l}(\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y}_i)$$

则认为$\underset{\sim}{x}$相对归属于$\underset{\sim}{y}_j$。

## 三、异常评价的Fuzzy模型识别方法

由于异常本身及其从属关系总是带有一定模糊性，而每一个异常又可以用一定模型来表示，因此，把异常评价归结为模型识别问题是比较恰当的。Fuzzy模型识别的直接和间接方法均可用于异常评价。

设某测区的异常全体为论域$X$，$\underset{\sim}{x}_j$表示待识的异常，$\underset{\sim}{x}_j$有$p$个特征指标：$\underset{\sim}{y}_1$，$\underset{\sim}{y}_2$，…，$\underset{\sim}{y}_l$表示已知模型。评价待识别异常$\underset{\sim}{x}_j$的基本步骤如下。

1.数据的预处理：预处理包括消除干扰，统一量级以及为确定隶属函数和建立别识系统等准备工作。

2.选取特征指标：论域内的异常总是由许多数值或指标组成，将反映异常本质属性的指标提取出来做为确定隶属函数及计算的变量。

3.确定隶属函数：用反映异常本质的特征指标将异常模型化，并用模糊子集将已知模型和待识别模型描述出来。

4.进行识别变换：计算待识模型与已知模型的贴近度。以$\underset{\sim}{y}$表示各已知模型。即：

$$\underset{\sim}{y}=\{\underset{\sim}{y}_1,\ \underset{\sim}{y}_2,\ \cdots,\ \underset{\sim}{y}_l\},\ \underset{\sim}{y}_1=\{\mu_{y_{11}},\ \mu_{y_{12}},\ \mu_{y_{13}},\ \cdots,\ \mu_{y_{1p}}\},\ \cdots\cdots,$$

$$\underset{\sim}{y}_l=\{\mu_{y_{l1}},\ \mu_{y_{l2}},\ \cdots,\ \mu_{y_{lp}}\},\ \underset{\sim}{x}_j=\{\mu_{x_{j1}},\ \mu_{x_{j2}},\ \cdots,\ \mu_{x_{jp}}\}.$$

$\underset{\sim}{x}_j$与$\underset{\sim}{y}$的贴近度可表示为：

$$(\underset{\sim}{x}_j,\ \underset{\sim}{y})=\underset{\sim}{x}_j,(\underset{\sim}{y}_1,\ \underset{\sim}{y}_2,\ \cdots,\ \underset{\sim}{y}_l)^T=(\mu_{x_{j1}},\ \mu_{x_{j2}},\ \cdots,\ \mu_{x_{jp}}),\begin{bmatrix}\mu_{y_{11}}, \mu_{y_{21}} \cdots \mu_{y_{l1}}\\ \mu_{y_{12}}, \mu_{y_{22}} \cdots \mu_{y_{l2}}\\ \vdots \quad \vdots\\ \mu_{y_{1p}}, \mu_{y_{2p}} \cdots \mu_{y_{lp}}\end{bmatrix} \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

根据物化探异常的特点，可以采用以下几种贴近度公式：

$$(\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y})=[\underset{\sim}{x}\cdot\underset{\sim}{y}+(1-\underset{\sim}{x}\odot\underset{\sim}{y})]/z \qquad (1\text{-}4\text{-}4)$$

$$(\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y})=1-c[d(\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y})]^q \qquad (1\text{-}4\text{-}5)$$

$$d(\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y})=\left[\sum_{k=1}^{n}|\mu_{\underset{\sim}{x}}(x_k)-\mu_{\underset{\sim}{y}}(x_k)|^q\right]^{1/q} \qquad (1\text{-}4\text{-}6)$$

（1-4-6）式为$\underset{\sim}{x}$与$\underset{\sim}{y}$的闵可夫斯基距离。取$c=1/n$；$q=1$。则：

$$(\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y})=1-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\mu_{\underset{\sim}{x}}(x_k)-\mu_{\underset{\sim}{y}}(x_k)| \qquad (1\text{-}4\text{-}7)$$

取$c=\sqrt{\frac{1}{n}}$，$q=2$，则：

$$(\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y})=1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}|\mu_{\underset{\sim}{x}}(x_k)-\mu_{\underset{\sim}{y}}(x_k)|^2\right]^{1/2} \qquad (1\text{-}4\text{-}8)$$

$$(\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y})=\sum_{k=1}^{n}\mu_{\underset{\sim}{x}}(k)\mu_{\underset{\sim}{y}}(k)\Big/\left\{\sum_{k=1}^{n}\mu_{\underset{\sim}{x}}^2(k)\sum_{k=1}^{n}\mu_{\underset{\sim}{y}}(k)\right\}^{1/2} \qquad (1\text{-}4\text{-}9)$$

对于服从正态分布的异常，可采用公式

$$(\underset{\sim}{x},\ \underset{\sim}{y})=e^{-[(a_y-a_x)/(b_x+b_y)]^2} \qquad (1\text{-}4\text{-}10)$$

（1-4-9）式中$a_x$，$a_y$分别表示$\underset{\sim}{x}$，$\underset{\sim}{y}$的均值，$b_x$，$b_y$分别表示$\underset{\sim}{x}$，$\underset{\sim}{y}$的方差。

5.识别判决：这是模型识别的最后一步，选取决策原则，做出待识别模型的归属。当用直接方法时，选取最大隶属原则，用间接方法时选取择近原则。

$$(\underset{\sim}{x}_j,\ \underset{\sim}{y})_{max}=\bigvee_{k=1}^{l}(\underset{\sim}{x}_j,\ \underset{\sim}{y}_k)$$

记下获取极大值的序号，即得到所归属的异常类型。

## 四、实　　例

应用Fuzzy模型识别方法对河北省寿王坟-小寺沟一带分散流异常进行评价和铜钼矿床的预测。主要结果做以下简要的说明。

根据已查明的矿异常，矿化异常等已知类型选取5个已知模型，以Cu、Pb、Zn、Mo、Ag做为评价指标。

已知模型$\underset{\sim}{y}_1$，$\underset{\sim}{y}_2$，…，$\underset{\sim}{y}_5$，分别代表：1.斑岩型Cu、Mo矿异常；2.背景；3.铅锌矿化类型异常；4.与辉绿岩有关的异常；5.矽卡岩型Cu、Mo矿异常。

首先将数据进行预处理，把本区内的分散流数据网格化，每1 km²作为一个评价单元，并将网格化的数据正规化。

选取已知样本按求重心的计算方法确定已知模型的隶属函数：

$$\mu_{y_{ik}}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}$$

$i=1，2，\cdots，5$；$k=1，2，\cdots，5$。$n_i$为第$i$个模型参加统计的样品数。

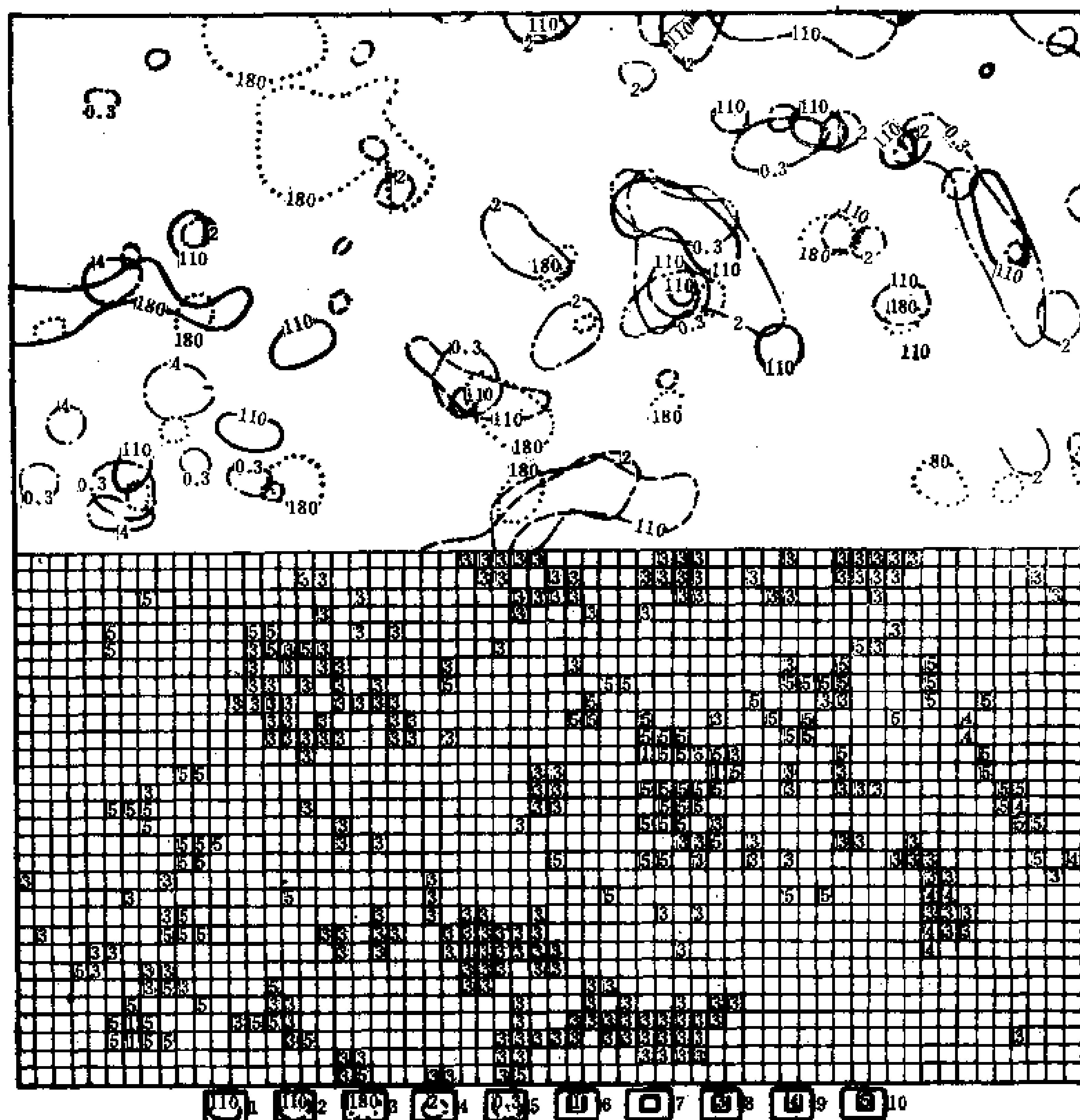


图 1-4-2 寿王坟-小寺沟异常流分布及其评价结果（一）

1—Cu异常；2—Pb异常；3—Zn异常；4—Mo异常；5—Ag异常；6—斑岩型铜钼矿异常；7—背景；8—铅锌矿化异常；9—与辉绿岩有关的异常；10—矽卡岩型铜钼矿异常

建立的5个已知模型的Fuzzy矩阵为：

$$
\begin{bmatrix}
\mu_{y_{11}} & \mu_{y_{12}} & \cdots \mu_{y_{15}} \\
\mu_{y_{21}} & \mu_{y_{22}} & \cdots \mu_{y_{25}} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\mu_{y_{51}} & \mu_{y_{52}} & \cdots \mu_{y_{55}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0.560 & 0.176 & 0.135 & 0.497 & 0.458 \\
0.035 & 0.041 & 0.065 & 0.015 & 0.001 \\
0.136 & 0.217 & 0.253 & 0.031 & 0.021 \\
0.155 & 0.050 & 0.182 & 0.143 & 0.008 \\
0.200 & 0.116 & 0.212 & 0.041 & 0.133
\end{bmatrix}
$$

本区范围内共3480个评价单元，异常图及其评价结果如图1-4-2及图1-4-3所示。图中清晰地展示出各异常所归属的类型和分布情况。

评价结果表明，区内已查明性质的异常归类是正确的，说明该方法具有一定的可靠性，例中尽管采用简单的方法确定隶属函数，Fuzzy模型也比较粗糙，但评价结果却是

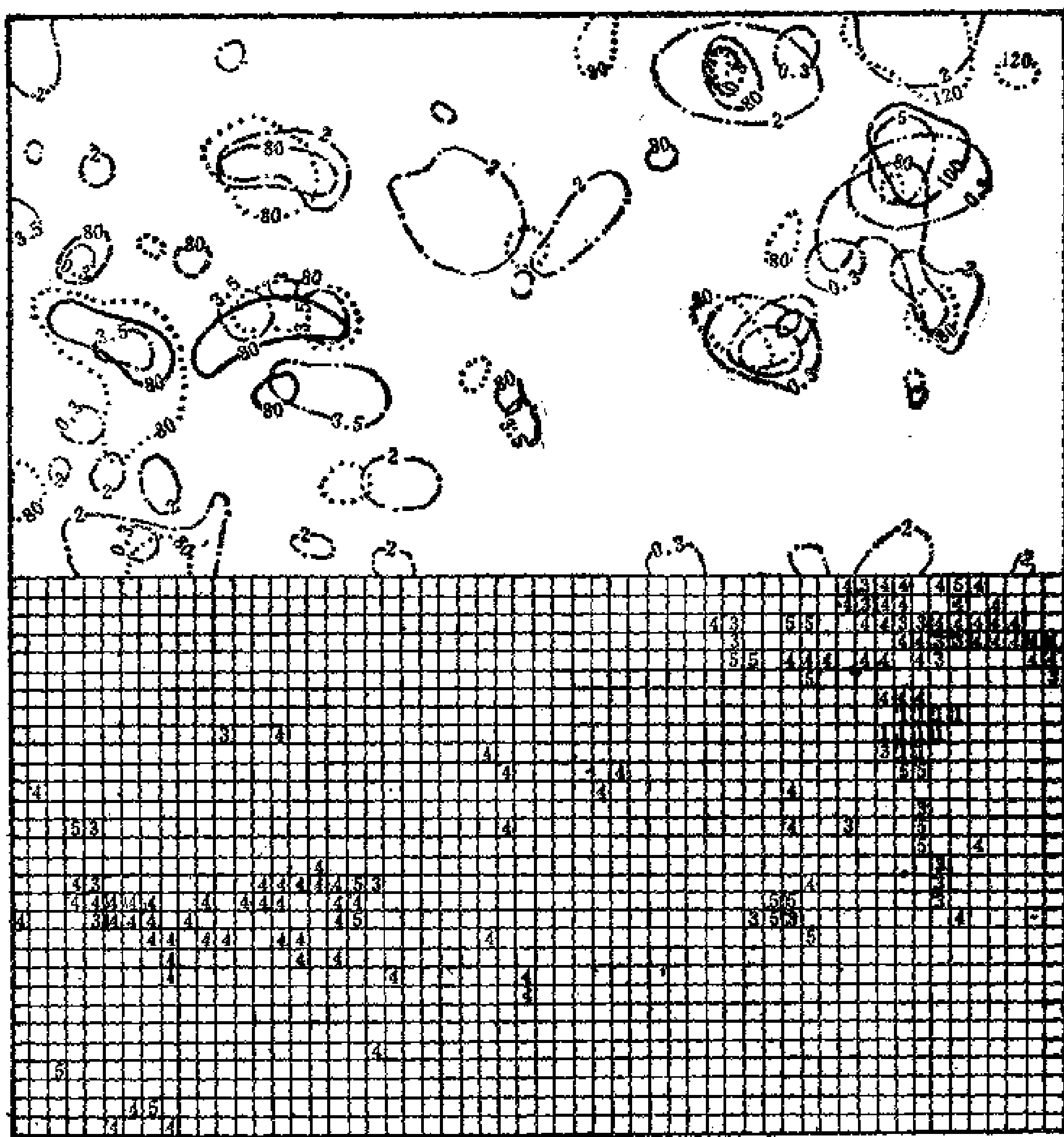


图 1-4-3　寿王坟-小寺沟分散流异常分布及其评价结果（二）

图例同1-4-2

合理的。对测量精度高的数据，应把模型搞得细致些，还可以对Fuzzy集及识别变换进行加权处理。

Fuzzy模型识别在异常评价中的应用是一个新领域，很多问题有待深入研究和解决。但该方法具有可塑性，对不同情况可采取不同的隶属函数，方法较灵活，计算简单，容易检验，只要深入研究，相信在物化探异常评价中会取得较好的效果。

实例计算是在DJS-21机上用《用Fuzzy模型识别计算程序》完成的，也用TI-59袖珍机做过计算。

## §1-5　模糊目标函数聚类法及其应用[5]

1985年，洪恒令引证了模糊目标函数聚类算法，对比了Fuzzy协方差聚类算法和判别分析方法的聚类效果。用Fuzzy协方差聚类方法进行分类，结果与实际情况完全符合。

## 一、聚 类 问 题

客观对象是由它们的本质属性来确定的，也由它们的属性的异同来进行区分和归类的。每一个个别属性可以用一维实数空间来表现，多个属性可用多维实数空间来表现。这样，一个对象就被看作高维空间中的一个点（或向量）。所谓聚类问题就是根据某种准则将空间中某些相对接近的点归类问题。

设$X=\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_m\}$是$n$维空间$R^n$中的信息样本向量集，其中任意向量为：

$$\overline{x}_i=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})^T\in R^n \tag{1-5-1}$$

$x_{ij}$是向量$\overline{x}_i$的第$j$个指标（属性）参数值，$x_{ij}\in R$。

一个分类是对任意向量$\overline{x}\in X$，寻求一个隶属程度的$k$元组：

$$\mu(\cdot)=\{\mu_1(\overline{x}), \mu_2(\overline{x}), \cdots, \mu_k(\overline{x})\} \tag{1-5-2}$$

其中$k$为类别数，$\mu_j(\overline{x})$是$\overline{x}$对第$j$类隶属程度。如果 $\mu_j(\overline{x})\in\{0.1\}$且$\sum_{j=1}^{k}\mu_j(\overline{x})=1$，

$$\tag{1-5-3}$$

那么聚类问题便是一个“硬分类”问题，最终将得到一个$m\times k$矩阵：$\mu=(\mu_{ij})_{m\times k}$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$m$；$j=1$，$2$，$\cdots$，$k$。

其中：

$$\sum_{j=1}^{k}\mu_{ij}=1 \quad \forall i \tag{1-5-4}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}>0 \quad \forall j \tag{1-5-5}$$

$\mu_{ij}$解释为：

$$\mu_{ij}=\mu_j(\overline{x}_i)=\begin{cases}1 & \overline{x}_i\in A_j\subset X\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{1-5-6}$$

$A_j$是使$\mu_j(\cdot)$取值为1的向量集。$\mu$的每一列决定了$X$中的一个子集$A_j$，从而使$X$分成了$k$个子集$A_j(j=1, 2, \cdots, k)$，并且$A_j$是普通子集或称为硬子集。这就构成了$X$的$k$组分类。若

$$\mu_j(\overline{x})\in[0, 1], \ \forall\overline{x}\in X, \ 1\leqslant j\leqslant k, \ \text{且}\sum_{j=1}^{k}\mu_i(\overline{x})=1 \tag{1-5-7}$$

则聚类问题便是模糊分类问题。最终得到一个$m\times k$阶矩阵：$\mu_f=(\mu_{ij})_{m\times k}$，

其中，$\mu_{ij}=\mu_j(\overline{x})\in[0, 1]$，是$\overline{x}_i$对第$j$类的隶属程度，满足：

$$\sum_{j=1}^{k}\mu_{ij}=1 \quad \forall i \tag{1-5-8}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}>0 \quad \forall j, \ 1\leqslant j\leqslant k \tag{1-5-9}$$

$\mu_f$给出$X$上的$k$个模糊子集$\underset{\sim}{A}_j$，

$$\underset{\sim}{A}_j=\int\mu_j(\overline{x}_i)/\overline{x}_i, \ 1\leqslant j\leqslant k \tag{1-5-10}$$

它形成了$X$上的模糊$k$组分划。

在分类过程中，人们自然希望被分类的样品（对象）到某一距离尽量地小，而对于这一类的隶属程度尽量地大。这就为我们提出这样一个聚类准则：找出恰当的$\mu_f$（或$\mu$）矩阵，使下式，

$$J(\mu, d)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\mu_{ij}^{q}d_{ij} \tag{1-5-11}$$

取极小。其中$\mu_{ij}$是样品向量$\overline{x}_i$对第 $i$ 类的隶属程度，$d_{ij}$是$R^n$空间中定义的一种范数（这里采用马氏距离），$\alpha\geqslant 1$ 是控制类别模糊性的一个参数。$J$为模糊聚类的目标函数。

## 二、聚 类 算 法

在（1-5-11）式中，当 $\alpha=1$ 且$\mu_{ij}\in\{0，1\}$时，便是硬分类。若$A_j$表示第 $j$ 类，由（1-5-4）和（1-5-5）知，$A_i\cap A_j=\phi$，$\forall i\neq j$，并且 $\bigcup_{j=1}^{k}A_j=X$。$\mu_j(\overline{x})=1$，意味着$\overline{x}\in A_j$，由（1-5-4）知$\overline{x}$是只属于$A_j$的一个清晰的成员。

在（1-5-11）中当$\alpha\geqslant 1$并且$\mu_{ij}\in[0，1]$，保留（1-5-4）和（1-5-5）式，那么就过渡到模糊分类。由于$\mu_{ij}\geqslant 0$，可以令$\mu_{ij}=S_{ij}^2$，$S_{ij}$是实数。于是 $J$ 关于$\mu_{ij}$取极小值问题转化为求下面的目标函数。

$$J(S,\ d)=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{k}S_{ij}^{2\alpha}d_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{k}S_{ij}^2-1\ \Big) \tag{1-5-12}$$

关于$S_{ij}$的极小值问题。$\lambda_i$是一组拉格朗日乘数。

$J$ 取极小的必要条件是 $J$ 对$S$和$d$的梯度等于零。先看$J$对$S$的梯度

$$\partial J/\partial S_{ij}=2\alpha S_{ij}^{2\alpha-1}d_{ij}+2S_{ij}\lambda_i=0 \tag{1-5-13}$$

即
$$S_{ij}(\alpha S_{ij}^{2(\alpha-1)}d_{ij}+\lambda_i)=0\quad\forall ij \tag{1-5-14}$$

又
$$\sum_{j=1}^{k}S_{ij}^2=1\quad\forall i \tag{1-5-15}$$

可设$S_{ij}\neq 0$，（1-5-14）和（1-5-15）式共包含$m\times k+m$个等式。由它们可求出 $m\times k+m$个未知数$\mu=(\mu_{ij})$和$\lambda=\{\lambda_i\}$。由（1-5-14）得

$$\mu_{ij}=(-\lambda_i/\alpha d_{ij})^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{1-5-16}$$

由（1-5-15）得

$$(-\lambda_i)^{\frac{1}{\alpha-1}}=1\Big/\sum_{j=1}^{k}\Big(\frac{1}{\alpha d_{ij}}\Big)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{1-5-17}$$

把（1-5-17）代入（1-5-16）得

$$\mu_{ij}=\frac{1}{\sum_{l=1}^{k}(d_{ij}/d_{il})^{\frac{1}{\alpha-1}}} \tag{1-5-18}$$

再考虑$J$对$d$的梯度。如果选用马氏距离，$d_{ij}$有如下形式

$$d_{ij}=(\overline{x}_i-\overline{V}_j)^T A(\overline{x}_i-\overline{V}_j) \tag{1-5-19}$$

其中$A$是正定对称矩阵，$\overline{V}_j$是第 $j$ 类聚类中心向量。

如果$A$对各类是不变的，那么问题就转为 $J$ 关于$\overline{V}_j$（$j=1，2，\cdots，k$）取极小问题。从（1-5-11）式得

$$\frac{\partial}{\partial\overline{V}_j}J(\mu,\ \overline{V}_j)\ =\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}\ \frac{\partial}{\partial\overline{V}_j}d_{ij} \tag{1-5-20}$$

于是 $J$ 的局部极小的必要条件除（1-5-14）和（1-5-15）外，还有

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}\ \frac{\partial}{\partial\overline{V}_j}d_{ij}=0\quad\forall j \tag{1-5-21}$$

即
$$\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}(\overline{x}_i-\overline{V}_j)=0\quad\forall j \tag{1-5-22}$$

它等价于

$$\overline{V}_j=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_{ij}^{\alpha}\overline{x_i}}{\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}}\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k \tag{1-5-23}$$

称$\overline{V}_j$为第 $j$ 类的模糊平均值向量。

以上是模糊ISODATA算法的基本思想。

显然，当$\alpha=1$，$\mu_{ij}\in\{0,\ 1\}$，并且$\overline{x_i}$属于第 $j$ 类时$\mu_{ij}=1$其他$\mu_{ij}=0$，这是硬的ISODATA分类。这样

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}=N_j \tag{1-5-24}$$

其中$N_j$是向量分配到第 $j$ 类$A_j$的个数，这时

$$\overline{V}_j=\frac{1}{N_j}\sum_{\overline{x}_i\in A_j}\overline{x_i} \tag{1-5-25}$$

它是第 $j$ 类$A_j$的普通算术平均值向量。这便是硬的ISODATA的基本思想。

如果考虑（1-5-19）中$A$对各类是变化的，那么将会得到比模糊ISODATA更一般的分类算法。（1-5-19）式将成为如下形式：

$$d_{ij}=d_{ij}(\overline{V}_j,M_j)=(\overline{x_i}-V_j)^T M_j(\overline{x_i}-\overline{V}_j) \tag{1-5-26}$$

其中$\overline{V}_j$是第 $j$ 类的模糊平均值向量，$M_j$是正定对称矩阵。

由于各类母体在空间的分布是不同的，$d_{ij}$在空间中沿不同方向的度量取不同的比例，这取决于$M_j$的变化。但是$M_j$的变化不能没有限制。这里采用限制矩阵$M_j$的行列式$|M_j|$的办法。令

$$|M_j|=\rho_j,\ \ \rho_j>0,\ \ 1\leqslant j\leqslant k \tag{1-5-27}$$

其中$\rho_j$对各类是固定的常数。于是目标函数为

$$J(\mu,\ V,\ M,\ \lambda,\ \beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\mu_{ij}^{\alpha}\ d_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{k}\mu_{ij}-1\Big)+\sum_{j=1}^{k}\beta_j(|M_j|-\rho_j) \tag{1-5-28}$$

其中$\beta_j$是一组待定的拉格朗日乘数。

分别求对$\overline{V}_j$和$M_j$的偏导数，得到(1-5-28)取极小的必要条件。

$$\partial J/\partial\overline{V}_j=-2\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}M_j(\overline{X}_i-\overline{V}_j)=0 \tag{1-5-29}$$

$$\partial J/\partial M_j=\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}(\overline{x}_i-\overline{V}_j)(\overline{x}_i-\overline{V}_j)^T+\beta_j|M_j|\cdot M_j^{-1}=0 \tag{1-5-30}$$

（1-5-29）式和（1-5-24）一样给出：

$$\overline{V}_j=\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}\overline{x_i}\Big/\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha} \tag{1-5-31}$$

它是关于最佳隶属函数$\mu_{ij}$的第$j$类模糊平均值．也就是对第$j$类的聚类中心。对于$\overline{V}_j$等式（1-5-30）又给出：

$$M_j^{-1}=\frac{1}{\beta_j|M_j|}\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}(\overline{x_i}-\overline{V}_j)(\overline{x_i}-\overline{V}_j)_T \tag{1-5-32}$$

令：

$$M_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}(\overline{x_i}-\overline{V}_j)(\overline{x_i}-\overline{V}_j)^T\Big/\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha} \tag{1-5-33}$$

代入（1-5-32）式得：

$$M_j^{-1}=\frac{-\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}}{\beta_j\rho_j}M_{tj} \qquad (1\text{-}5\text{-}34)$$

两端取行列式得：

$$\frac{1}{|M_j|}=\left(\frac{-\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}}{\beta_j\rho_j}\right)\cdot|M_{tj}|$$

代回（1-5-34）式：

$$M_j^{-1}=\left(\frac{1}{\rho_j|M_{tj}|}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot M_t \qquad (1\text{-}5\text{-}35)$$

其中$M_{tj}$称为第 $j$ 类的模糊协方差矩阵，$n$是向量空间的维数。$M_{tj}$反映了各类母体的空间分布。显见，当 $\alpha=1$ 且$\mu_{ij}\in\{0.1\}$时，(1-5-33)就是普通协方差矩阵。

上述过程为我们提供了寻求以 $J$ 为目标函数的循环分类算法。对样本向量集 $X=\{\overline{x_i}\}$进行分类时，首先确定初始类别数，其次给出初始聚类中心$\overline{V_j}$及各类初始协方差矩阵$M_{tj}$，按下列步骤进行：

（1）用（1-5-35）式计算$M_j^{-1}$，并求其逆矩阵$M_{jt}$

（2）用（1-5-26）式计算$\{d_{ij}\}$；

（3）用（1-5-18）式计算$\{\mu_{ij}\}$。如果某 $j_0$ 使 $d_{ij_0}=0$，则$\mu_{ij_0}=1$；对 $j\neq j_0$，$\mu_{ij}=0$；

（4）用（1-5-31）式计算$\overline{V_j}$，此时已是修改了的聚类中心；

（5）用（1-5-33）式计算$M_{tj}$，此时已是修改了的模糊协方差矩阵；

回到（1），重复上述步骤，直到满足某种控制标准为止。

## 三、应　　用

从本方法的理论本身和实验的结果可以看出：Fuzzy 目标函数聚类算法是一种应用条件较宽、效果较好的聚类方法。它有如下特点：

1）在计算各类的中心时，用公式（1-5-23）充分考虑到各样品对各类的隶属程度，而隶属度又是与样品到聚类中心的距离有关的（距离越大，隶属度越小）。这就可能在聚类过程中减少甚至消除那些边远点和假点对聚类的干扰。因此用Fuzzy平均值比普通算术平均值作为聚类中心更符合各类母体的实际。

2）计算各样品到各类中心的距离用（1-5-26）式。其中$M_j$矩阵是变化的。即在计算距离时，在各类里沿不同方向取不同的比例，这是很合理的。因为各客观母体在空间里的分布一般是不同的。常规聚类方法往往由于不同分布的母体的划分处理起来比较困难而把它们看作是相同分布，这显然会影响聚类效果。这是用Fuzzy协方差算法比普通聚类算法有较好的效果的主要原因之一。并且也能解决一些常规方法所不能解决的问题，扩大了应用范围。

3）$M_j$的变化由各类的Fuzzy协方差矩阵

$$M_{tj}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}(\overline{x_i}-\overline{V_j})^T(\overline{x_i}-\overline{V_j})}{\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}}$$

来计算的。它是各变量之间相关关系及各类原始数据离散程度的一个矩阵。它反映母体在空间中的分布形成。由于在计算中用到了样品对各类的隶属程度，同样也减少边远点和假点的影响。这样使用Fuzzy协方差聚类的算法比普通的聚类算法更具有抗噪声干扰性。

4）本算法是以在空间中满足

$$\mu_j(\overline{x})=\mu_{j'}(\overline{x}),1\leqslant j,j'\leqslant k,\ j\neq j' \tag{1-5-36}$$

的点构成空间超曲面为各类的分界，这显然比一般判别分析方法用线性函数（超平面）作为各类分界更为自然。

当一个样本不知各样品的归属，若用本方法分类时，要首先定出类别数，给出各类的初始聚中心和各类的初始协方差矩阵。反复用前面叙述的（1）～（5）步骤，直到满足一定要求为止。

各类别的初始聚类中心的确定有很多方法，一般在样本中选几个典型样品作为初始聚类中心。各类初始模糊协方差矩阵的给出：当对样本母体有某些了解时，可根据母体的大致分布给出一个初始协方差矩阵。当对母体分布一无所知时，可把各类暂以等协方差看待，各类均以单位或对角矩阵作为初始协方差矩阵，让它在执行算法过程中逐步调整。

控制算法结束标准有二：

1）给定一个小数 $0<\varepsilon<1$，当执行算法$l$次后计算出$\mu_{ij}^{(l)}$和$\mu_{ij}^{(l-1)}$之差的绝对值。当

$$|\mu_{ij}^{(l)}-\mu_{ij}^{(l-1)}|<\varepsilon \qquad \forall\ i,\ j \tag{1-5-37}$$

时，结束算法。

2）给出一个循环次数 $l$，当执行算法 $l$ 次之后停止计算，分析聚类结果。

若一个样本知其各样品的所属类别，对未知样品进行判别也可以用本方法。

设已知样本 $X=\{\overline{x_1},\ \overline{x_2},\ \cdots,\ \overline{x_m}\}$分为 $k$ 类$A_j$（$1,2,\cdots,k$）待判样品为 $Y=\{\overline{y_1},\ \overline{y_2},\ \cdots,\ \overline{y_l}\}$。按下列步骤进行

*a*.作出已知样本的隶属函数矩阵$\mu_0=(\mu_{ij})_{m\times k}$，当$\overline{x_i}\in A_j$时，$\mu_{ij}=1$，否则$\mu_{ij}=0$；

*b*.用（1-5-31）式计算各类初始聚类中心$\overline{V}_j$；

*c*.用（1-5-33）式计算初始模糊协方差矩阵$M_{fj}$，并求其逆矩阵$M_j=M_{fj}^{-1}$；

*d*.令$\rho_j=|M_j|$；

*e*.用（1-5-26）式计算$d_{ij}$；

*f*.用（1-5-18）式计算$\mu_{ij}$，此时已是修改了的$\mu_{ij}\in[0,1]$；

*g*.用（1-5-31）计算$\overline{V}_j$，此时已是修改了的聚类中心；

*h*.用（1-5-33）和（1-5-35）式计算$M_{fj}^{-1}$；

*i*.求出$M_j$，回到 *e* 反复计算，直到满足某种要求为止。

用上述过程计算出的$\overline{V}_j$和$M_j$计算各待判样品$\overline{y_i}$（$i=1,2,\cdots,l$）到各类的距离

$$d_j(\overline{y_i})=(\overline{y_i}-\overline{V}_j)^T M_j(\overline{y_i}-\overline{V}_j) \tag{1-5-38}$$

再计算$\overline{y_i}$对各类的隶属度

$$\mu_j(\overline{y_i})=\frac{1}{\sum_{l=1}^{k}\left[d_j(\overline{y_i})/d_l(\overline{y_i})\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}} \tag{1-5-39}$$

如果对待判样品给出确切归属类别的结论，可采用最大隶属原则确定归类。即如果某$j_0$，使

$$\mu_{j_0}(\overline{y_i})=\max\mu_j(\overline{y_i}) \qquad 1\leqslant j_0\leqslant k \tag{1-5-40}$$

则$i_0$就是$\overline{y_i}$的归属类别号。

为检验Fuzzy目标函数聚类方法的效果，选择三种模型进行试验（数据表从略），并与多元统计分析中的判别分析方法进行比较。

模型1°是空间分布形式大至相同的二类样本(图1-5-1)。初始聚类中心选为两个样品点$\overline{V}_{1_0}=(26,40)^T$，$\overline{V}_{2_0}=(42,28)^T$，初始协方差矩阵为

$$M_{f_1}=M_{f_2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

常数$\rho_1=\rho_2=1$。经4次循环相邻二次计算出的隶属函数之差的绝对值$|\mu_{ij}^{(4)}-\mu_{ij}^{(3)}|<0.0001$，停止计算，得到最终聚类中心$\overline{V}_1=(26.97,40.2)^T$，$\overline{V}_2=(42.19,28.0)^T$。最终$M_j$矩阵：

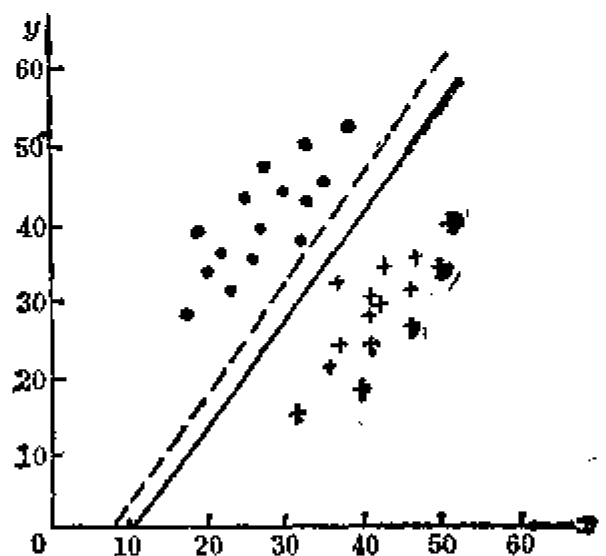


图 1-5-1 模型实验，近似等协方差的二类判别

$$M_1=\begin{pmatrix}1.86 & -1.3\\ -1.3 & 1.45\end{pmatrix},\qquad M_2=\begin{pmatrix}2.15 & -1.34\\ -1.34 & 1.3\end{pmatrix}$$

图1-5-1中实线为用本方法，由$\mu_1(\overline{x})=\mu_2(\overline{x})$确定的二类分界线(近乎直线)；虚线是判别分析二类的线性分界。由于二类样本分布基本是相同的，因而两种方法聚类结果是一致的。

模型2°是空间分布形式不同的二类样本(如图1-5-2)。即它们是不等协差的。取初始聚类中心$\overline{V}_{1_0}=(23,41)^T$，$\overline{V}_{2_0}=(39,17.5)^T$，初始协方差矩阵，$M_{f_1}=M_{f_2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。常数$\rho_1=\rho_2=1$。虽然初始协方差矩阵的选取与实际分布相差比较大。可是经5次循环计算，已经使$|\mu_{ij}^{(5)}-\mu_{ij}^{(4)}|<0.0001$停止计算得到最终聚类中心$\overline{V}_1=(23.14,85.42)^T$,$\overline{V}_2=(35.9,17.7)^T$，最终$M_j$矩阵$M_1=\begin{pmatrix}5.83 & -4.35\\ -4.35 & 3.42\end{pmatrix}$,$M_2=\begin{pmatrix}3.74 & 4.05\\ 4.05 & 4.64\end{pmatrix}$。

从图1-5-2可看到，用Fuzzy协方差聚类方法分类完全正确，而判别分析方法却把第2类的一个样品错分为第1类。从两种方法分类界限可以看到，用Fuzzy协方差方法得到的二类分界线是曲线，它比判别分析方法用直线作为二类界线更符合实际。

模型3°是两类交叉的样本(如图1-5-3)。选初始聚类中心$\overline{V}_{1_0}=(27,31)^T$,$\overline{V}_{2_0}=(25,28)^T$，初始协方差矩阵也和前两个模型一样$M_{f_1}=M_{f_2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，常数$\rho_1=\rho_2=1$。看来初始协方差矩阵的给出也是与实际分布相差很大，但是经过7次循环计算之后，也能稳定下来，使$|\mu_{ij}^{(7)}-\mu_{ij}^{(6)}|<0.0001$,最后得到完全正确的结果。最终聚类中心$\overline{V}_1=(29.85,31.9)^T$，$\overline{V}_2=(21.96,27.04)^T$。最终$M_j$矩阵$M_1=\begin{pmatrix}7.13 & 4.92\\ 4.92 & 3.54\end{pmatrix}$,$M_2=\begin{pmatrix}9.33 & -6.75\\ -6.75 & 4.99\end{pmatrix}$。

从图1-5-3可见，判别分析对这样的模型分类是困难的。

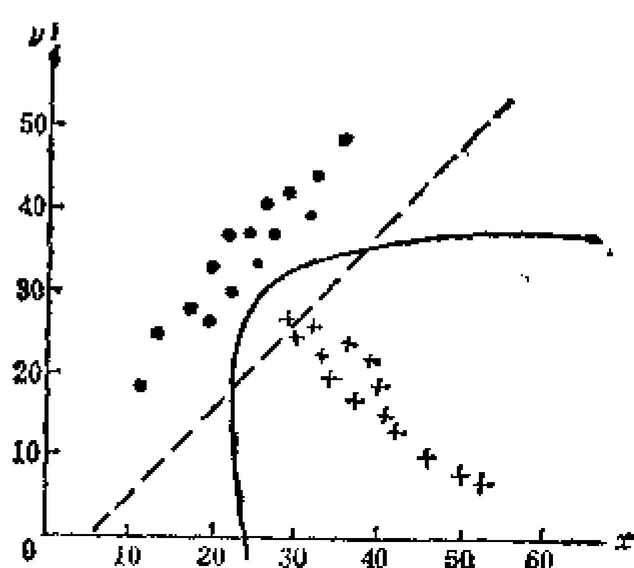



图 1-5-2 模型实验：不等协方差的二类判别

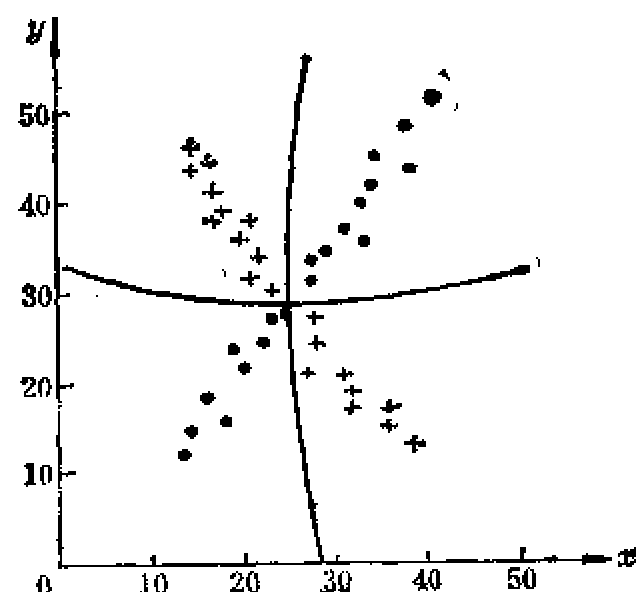



图 1-5-3 模型实验：不等协方差且有交叉的二类判别

从上面试验的结果可以得出结论，用模糊协方差聚类算法比判别分析方法有较好的聚类效果，它能解决那些“硬划分”方法解决不好或者不能解决的一些问题。

**例** 某地斑岩铜钼矿含矿的蚀变巨斑状花岗岩与不含矿的巨斑状花岗岩，宏观上没有明显差别。为了研究含矿岩石与不含矿岩石在成分上是否存在差异，在穿过蚀变矿化的剖面上采取了26个样品，分析了$SiO_2$、CaO、MgO、$Al_2O_3$、$K_2O$、$Na_2O$、Cu、Mo、Ag九项指标，选用判别分析方法判别结果及数据见表1-5-1。在这个工作基础上对这26个样品用模糊协方差聚类方法进行分类，结果与实际情况完全符合，表1-5-1中$\mu_1$，$\mu_2$分别为样品对含矿和不含矿的隶属度。

岩体内蚀变矿化岩石化学分析及分类结果　　表 1-5-1

| 序号 | $SiO_2$ (%) | CaO (%) | MgO (%) | $Al_2O_3$ (%) | $K_2O$ (%) | $Na_2O$ (%) | Cu (%) | Mo (%) | Ag (q/T) | 判别分析 | 模糊聚类 | $\mu_1$ | $\mu_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 73.74 | 0.33 | 0.82 | 10.75 | 5.20 | 0.58 | 0.11 | 0.077 | 1.40 | 含矿 | 含矿 | 0.961 | 0.039 |
| 2 | 72.73 | 0.58 | 1.14 | 11.97 | 5.48 | 0.89 | 0.21 | 0.07 | 1.56 | 含矿 | 含矿 | 0.953 | 0.047 |
| 3 | 72.44 | 1.62 | 1.45 | 10.88 | 4.80 | 0.14 | 0.05 | 0.227 | 0.20 | 含矿 | 含矿 | 0.995 | 0.005 |
| 4 | 77.42 | 0.52 | 0.54 | 8.63 | 4.36 | 0.40 | 0.08 | 0.46 | 1.80 | 含矿 | 含矿 | 0.998 | 0.002 |
| 5 | 80.42 | 0.22 | 0.71 | 7.86 | 4.13 | 0.22 | 0.18 | 0.046 | 2.07 | 含矿 | 含矿 | 0.980 | 0.020 |
| 6 | 82.79 | 0.20 | 0.31 | 6.63 | 3.40 | 0.16 | 0.10 | 0.01 | 2.90 | 含矿 | 含矿 | 0.988 | 0.012 |
| 7 | 76.23 | 0.52 | 0.56 | 9.72 | 5.38 | 0.36 | 0.13 | 0.062 | 2.65 | 含矿 | 含矿 | 0.964 | 0.036 |
| 8 | 77.42 | 1.43 | 0.70 | 8.22 | 4.50 | 0.08 | 0.11 | 0.073 | 4.30 | 含矿 | 含矿 | 0.977 | 0.023 |
| 9 | 76.63 | 0.77 | 0.82 | 9.26 | 4.43 | 0.53 | 0.13 | 0.107 | 1.33 | 含矿 | 含矿 | 0.990 | 0.010 |
| 10 | 72.93 | 1.10 | 0.93 | 10.59 | 5.38 | 0.80 | 0.25 | 0.229 | 1.00 | 含矿 | 含矿 | 0.994 | 0.006 |
| 11 | 72.02 | 0.71 | 1.01 | 11.85 | 5.38 | 1.25 | 0.33 | 0.157 | 1.88 | 含矿 | 含矿 | 0.987 | 0.013 |
| 12 | 71.28 | 1.37 | 1.05 | 11.50 | 4.83 | 0.36 | 0.17 | 0.222 | 2.70 | 含矿 | 含矿 | 0.994 | 0.006 |
| 13 | 68.10 | 1.66 | 0.90 | 14.66 | 4.10 | 4.01 | 0.08 | 0.011 | 0.55 | 不含矿 | 不含矿 | 0.006 | 0.994 |
| 14 | 70.68 | 1.30 | 0.14 | 13.61 | 5.20 | 2.32 | 0.02 | 0.007 | 0.11 | 不含矿 | 不含矿 | 0.009 | 0.991 |
| 15 | 68.51 | 1.50 | 0.89 | 14.29 | 4.26 | 3.16 | 0.09 | 0.005 | 2.17 | 不含矿 | 不含矿 | 0.009 | 0.991 |
| 16 | 66.44 | 2.08 | 1.12 | 13.76 | 4.04 | 2.05 | 0.09 | 0.017 | 1.40 | 不含矿 | 不含矿 | 0.029 | 0.971 |
| 17 | 68.96 | 1.28 | 0.80 | 14.11 | 4.19 | 2.85 | 0.14 | 0.019 | 4.20 | 不含矿 | 不含矿 | 0.027 | 0.973 |
| 18 | 67.12 | 1.00 | 0.79 | 14.61 | 4.13 | 2.71 | 0.05 | 0.003 | 1.20 | 不含矿 | 不含矿 | 0.029 | 0.971 |
| 19 | 71.08 | 1.02 | 0.51 | 13.29 | 5.35 | 1.57 | 0.02 | 0.006 | 1.27 | 不含矿 | 不含矿 | 0.033 | 0.967 |
| 20 | 68.46 | 1.98 | 0.93 | 14.13 | 3.94 | 3.74 | 0.01 | 0.005 | 0.00 | 不含矿 | 不含矿 | 0.003 | 0.997 |
| 21 | 67.88 | 2.06 | 0.88 | 13.43 | 3.75 | 4.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 不含矿 | 不含矿 | 0.012 | 0.988 |

## §1-6 测井曲线的计算机自动处理及地层对比的模糊数学方法[9]

1986年苏玉田、李洪志依据测井曲线利用模糊数学方法进行计算机自动分层，并在此基础上将马氏链应用在地层层序和沉积旋回中，同时利用有序熵进行岩层的对比分析，取得了有现实意义的成果。

### 一、数据来源与采样

1）采用煤炭工业部173煤田地质勘探队京西东斋堂勘探区已做的测井资料。

东斋堂勘探区位于北京西部山区，为侏罗系陆相沉积地层。煤层编号由下至上为1#到19#，煤层厚度由0.3m至4m不等。该区处于一沉积盆地中北部，面积约为10km²。由于地壳构造运动，煤层厚薄变化大，部分煤层沉积缺失，后期岩浆岩沿煤层侵入，岩、煤变质严重。化石经岩浆高温作用变质，所存甚少。由于构造复杂，普查钻孔加密到400～500m。

取0303、0319、0301和4111号钻孔的测井及岩矿鉴定、化学分析资料作为分析研究的基础。411号钻孔岩芯采取率较高，各项处理资料比较齐全，整套地层比较完整。0303、

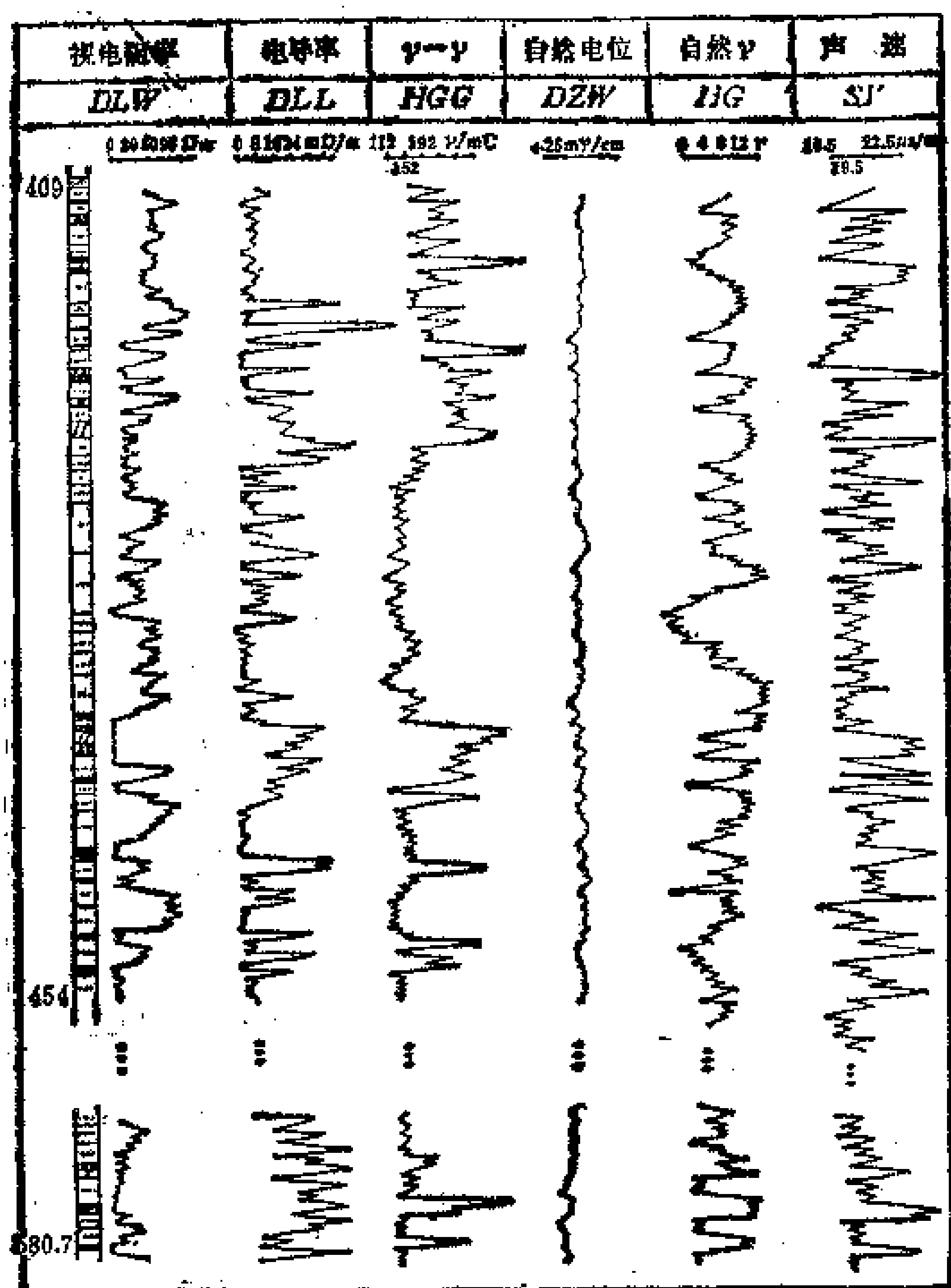



图 1-6-1 411孔测井曲线

0319、0301号钻孔为一北西向勘探线，位于矿区中部穹窿构造东侧，由南至北走向盆地边缘。地质上认为0319孔相对于0303孔缺失了15#、14#煤层，0301孔相对于0303孔缺失了15#、14#、13#、12#共四个煤层。

2）在411孔测井曲线上做采样，有视电阻率（DLW）、电导率（DDL）、三侧向电阻率（D3C）、伽玛—伽玛（HGG）、自然电位（DZW）、自然伽玛（HG）、声速（SV）、井径（CJJ）等八条曲线。选择了除三侧向电阻率（该曲线反映无明显特征）、井径以外的六条曲线。从409m开始采样至580.7m，共计171.7m。此段地层为主要含煤地层（见图1-6-1）。

## 二、模糊数学与分层

### 1.逐步聚类分析法

1）数据正规化

采样后（见表1-6-1），设取得的数据$x_i$（$i=1,2,\cdots,N$），$N$为采样个数。首先进行数据标准化工作，其公式为：

$$x_i' = x_i - \overline{x}/S \tag{1 6-1}$$

这里$x_i$是采样数据，$x_i'$是处理过的数据，$\overline{x}$是数据的平均值，$S$是数据的标准差。

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1-6-2}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \tag{1-6-3}$$

411孔测井曲线采样数值（采样点100）　　表 1-6-1

| DLW | DLL | HGG | DZW | HG | SV | DLW | DLL | HGG | DZW | HG | SV |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.6 | 1.4 | 2.75 | 1.75 | 3.2 | 6.8 | 4.5 | 0.55 | 5.9 | 1.76 | 4.0 | 8.2 |
| 4.2 | 0.73 | 2.35 | 1.74 | 4.9 | 1.9 | 4.65 | 0.75 | 3.4 | 1.75 | 3.6 | 1.5 |
| 3.6 | 0.53 | 6.9 | 1.75 | 4.5 | 0.4 | 4.32 | 0.63 | 4.1 | 1.65 | 3.0 | 4.75 |
| 2.8 | 0.32 | 4.5 | 1.76 | 3.7 | 9.5 | 4.0 | 0.58 | 3.5 | 1.57 | 2.6 | 2.25 |
| 4.0 | 1.0 | 3.4 | 1.76 | 2.4 | 6.2 | 4.28 | 0.7 | 5.6 | 1.5 | 3.4 | 7.9 |
| 4.4 | 0.9 | 3.6 | 1.77 | 3.8 | 3.5 | 4.42 | 0.84 | 2.0 | 1.75 | 2.3 | 2.7 |
| 4.45 | 0.8 | 5.85 | 1.75 | 3.4 | 7.0 | 3.8 | 0.5 | 1.8 | 1.5 | 2.8 | 2.3 |
| 4.35 | 0.9 | 5.0 | 1.72 | 3.0 | 4.4 | 3.05 | 0.4 | 1.4 | 1.75 | 2.5 | 1.9 |
| 4.0 | 0.6 | 4.4 | 1.7 | 3.7 | 5.3 | 2.9 | 0.45 | 1.4 | 1.73 | 3.1 | 2.4 |
| 4.3 | 0.8 | 3.6 | 1.68 | 4.1 | 7.3 | 2.8 | 0.4 | 1.3 | 1.7 | 3.0 | 2.0 |
| 4.4 | 0.83 | 2.9 | 1.65 | 3.3 | 3.0 | 2.55 | 0.38 | 1.0 | 1.68 | 3.2 | 1.85 |
| 4.0 | 0.70 | 4.0 | 1.62 | 3.35 | 2.45 | 2.0 | 0.3 | 1.5 | 1.6 | 3.1 | 2.65 |
| 3.75 | 0.6 | 7.65 | 1.6 | 3.6 | 7.2 | 2.7 | 0.4 | 0.7 | 1.46 | 4.1 | 1.3 |
| 4.4 | 0.8 | 6.0 | 1.58 | 2.85 | 4.0 | 4.6 | 1.4 | 1.0 | 1.48 | 5.9 | 1.0 |
| 4.6 | 0.85 | 3.6 | 1.62 | 3.7 | 7.5 | 2.5 | 2.0 | 3.0 | 1.38 | 4.85 | 0.5 |
| 4.6 | 0.9 | 4.3 | 1.65 | 3.2 | 3.1 | · | · | · | · | · | · |
| 4.3 | 0.68 | 3.15 | 1.66 | 4.1 | 5.1 | · | · | · | · | · | · |
| 4.3 | 0.88 | 6.3 | 1.7 | 3.9 | 1.0 | · | · | · | · | · | · |
| 4.35 | 0.78 | 12.8 | 1.72 | 4.8 | 7.0 | 3.75 | 3.0 | 2.6 | 1.22 | 2.0 | 2.5 |
| 4.55 | 0.8 | 9.5 | 1.75 | 4.5 | 10.0 | 2.9 | 2.6 | 2.3 | 1.25 | 3.0 | 1.45 |

2）标定

对于已经数字化、正规化的六条曲线进行相关计算。公式为

$$r(I,J)=\frac{\sum_{l=1}^{m} x_I(l)x_J(l)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{m} x_I^2(l)}\ \sqrt{\sum_{l=1}^{m} x_J^2(l)}} \qquad (1\text{-}6\text{-}4)$$

这里$x_I(l)$表示第$l$条曲线第$I$个采样点，$m$表示测井曲线的条数，取$m=6$。$r(I、J)$表示第$I$个采样与第$J$个采样间的相似程度。

这是经过对约十二种计算统计量$r(I、J)$的不同方法筛选的结果。实践表明：选择哪一种统计量是一件费时费事的工作，应当根据不同的地质条件进行筛选。

3）确定相似关系$\underset{\sim}{R}$

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix} r(1,1) & r(1,2) & \cdots & r(1,N) \\ r(2,1) & r(2,2) & \cdots & r(2,N) \\ \vdots & \vdots & & \\ r(N,1) & r(N,2) & \cdots & r(N,N) \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}6\text{-}5)$$

这里$\underset{\sim}{R}$表示一个模糊矩阵。

由于计算机的内存容量不够大，且计算机的内存扩充域EMA/VMA尚未开发出来，先取六条曲线各100个采样点计算。经计算得到一个100×100的模糊矩阵（见表1-6-2），

4）模糊矩阵合成

为了达到聚类目的，模糊矩阵必须满足自反性、对称性和传递性，但上面计算出来的$\underset{\sim}{R}$一般不满足这三个要求。对$\underset{\sim}{R}$进行合成运算，即可满足这三个要求，使模糊矩阵成为一个模糊等价关系。合成运算的方法是：

$$\underset{\sim}{R}^2=\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R} \qquad (1\text{-}6\text{-}6)$$

其中“∘”表示合成运算，$\underset{\sim}{R}^2$的元素是$r_2(I,J)$

$$r_2(I,J)=\max_{l}\ \min[r(I,l),\ r(l,J)]$$

$l$从1到100。

经过若干步合成运算后的模糊矩阵就成为一个模糊等价关系矩阵，据此进行聚类分析（见表1-6-3）。

5）聚类

根据逐步归类过程做出动态聚类图（见图1-6-2）。

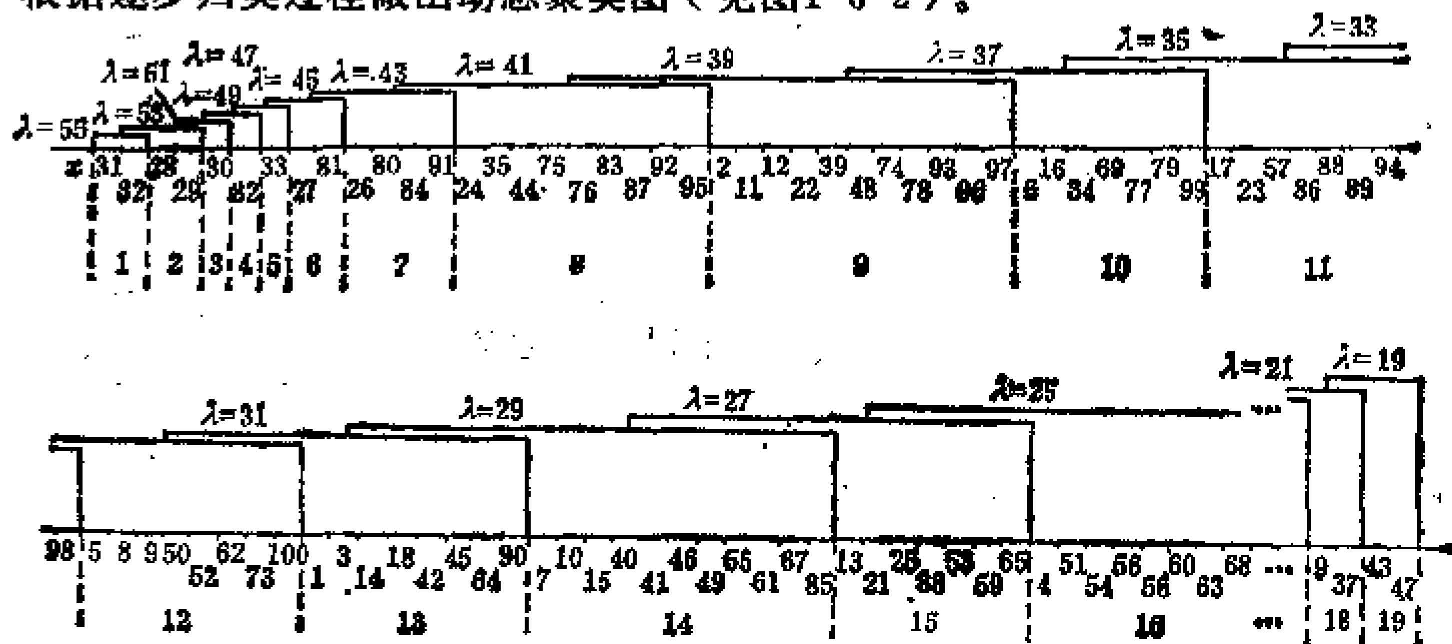



图 1-6-2 100个采样点模糊聚类图

100个采样点的模糊相关矩阵

表 1-6-2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | … | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1.370 | 1.133 | 1.106 | 1.565 | 1.430 | 2.066 | 1.063 | 1.233 | 1.959 | 1.684 | 1.164 | 0.988 | … | 0.807 |
| 2 | | 1 | 1.593 | 1.567 | 2.484 | 2.484 | 3.160 | 1.478 | 1.876 | 3.245 | 2.481 | 1.655 | 1.537 | … | 1.579 |
| 3 | | | 1 | 1.831 | 1.945 | 2.888 | 1.589 | 1.652 | 2.229 | 2.344 | 1.646 | 1.137 | 2.082 | … | 1.885 |
| 4 | | | | 1 | 2.782 | 1.533 | 1.606 | 2.176 | 2.263 | 1.539 | 1.118 | 2.034 | 1.398 | … | 1.691 |
| 5 | | | | | 1 | 2.100 | 3.747 | 2.864 | 1.890 | 1.739 | 3.265 | 1.417 | 1.215 | … | 3.081 |
| 6 | | | | | | 1 | 2.892 | 1.981 | 1.489 | 2.808 | 1.667 | 1.431 | 4.151 | … | 2.919 |
| 7 | | | | | | | 1 | 2.118 | 4.222 | 2.476 | 2.077 | 6.502 | 3.583 | … | 1.931 |
| 8 | | | | | | | | 1 | 1.445 | 1.223 | 3.060 | 1.945 | 1.215 | … | 1.224 |
| 9 | | | | | | | | | 1 | 3.551 | 2.138 | 1.816 | 1.341 | … | 5.755 |
| 10 | | | | | | | | | | 1 | 2.713 | 2.633 | 1.656 | … | 2.038 |
| 11 | | | | | | | | | | | 1 | 1.483 | 2.956 | … | 2.518 |
| 12 | | | | | | | | | | | | 1 | 1.172 | … | 1.599 |
| 13 | | | | | | | | | | | | | 1 | … | 1.295 |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | | | 1 | … |
| 100 | | | | | | | | | | | | | | | 1 |

第五次合成后所得矩阵数值

表 1-6-3

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | … | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2.0553 | 2.0553 | 2.0663 | 2.0563 | 2.0553 | 2.0553 | 2.0558 | 2.0553 | 2.0663 | 2.0553 | 2.0563 | 2.0553 | 2.0553 | … | 2.0553 |
| 2 | | 1 | 2.4186 | 2.3522 | 3.4126 | 3.3217 | 2.4126 | 2.2977 | 2.9099 | 3.4126 | 3.4126 | 2.4859 | 2.3168 | 3.4126 | … | 2.8890 |
| 3 | | | 1 | 2.3522 | 2.4186 | 2.4186 | 2.4186 | 2.2977 | 2.4186 | 2.4186 | 2.4186 | 2.4186 | 2.3168 | 2.4186 | … | 2.4186 |
| 4 | | | | 1 | 3.3522 | 3.3622 | 2.3522 | 2.2977 | 2.3522 | 2.3522 | 2.3522 | 2.3522 | 2.3168 | 2.3522 | … | 2.3522 |
| 5 | | | | | 1 | 3.3217 | 3.9513 | 2.2977 | 2.9099 | 3.9513 | 3.8951 | 2.4859 | 2.3168 | 3.9513 | … | 2.8890 |
| 6 | | | | | | 1 | 3.3217 | 2.2977 | 2.9099 | 3.3217 | 3.3217 | 2.4859 | 2.3168 | 3.3217 | … | 2.8890 |
| 7 | | | | | | | 1 | 2.2977 | 2.9099 | 5.4096 | 3.8951 | 2.4859 | 2.3168 | 4.5754 | … | 2.8890 |
| 8 | | | | | | | | 1 | 2.2977 | 2.2977 | 2.2977 | 2.2977 | 2.2977 | 2.2977 | … | 2.2977 |
| 9 | | | | | | | | | 1 | 2.9099 | 2.9099 | 2.4859 | 2.3168 | 2.9099 | … | 2.8890 |
| 10 | | | | | | | | | | 1 | 3.8951 | 2.4859 | 3.3168 | 4.5754 | … | 2.8890 |
| 11 | | | | | | | | | | | 1 | 2.4859 | 2.3168 | 3.8951 | … | 2.8890 |
| 12 | | | | | | | | | | | | 1 | 2.3168 | 2.4859 | … | 2.4859 |
| 13 | | | | | | | | | | | | | 1 | 3.3168 | … | 2.3168 |
| 14 | | | | | | | | | | | | | | 1 | … | 2.8890 |
| … | | | | | | | | | | | | | | | | … |
| 100 | | | | | | | | | | | | | | | | 2.5839<br>1 |

2.数据整理

把图1-6-2经过整理如图1-9-3，根据聚类结果用1～19的数字表示不同的类，并从上到下打印出来。图中左半部(右半部类似)最左边的一条柱状图是173队地质根据钻探取出来的岩芯及其化学分析资料绘制的。中间一条是173队根据测井曲线等资料绘制的。右边数字排列的是计算机计算的结果，旁边是根据计算结果绘制的柱状图。从计算结果来看，数字1～7表示了砂岩、细砂岩、砂质泥岩的岩性；12～15表示了碳质泥岩的岩性；15～18表示了煤的岩性。基本上反映出了各种不同的岩性。

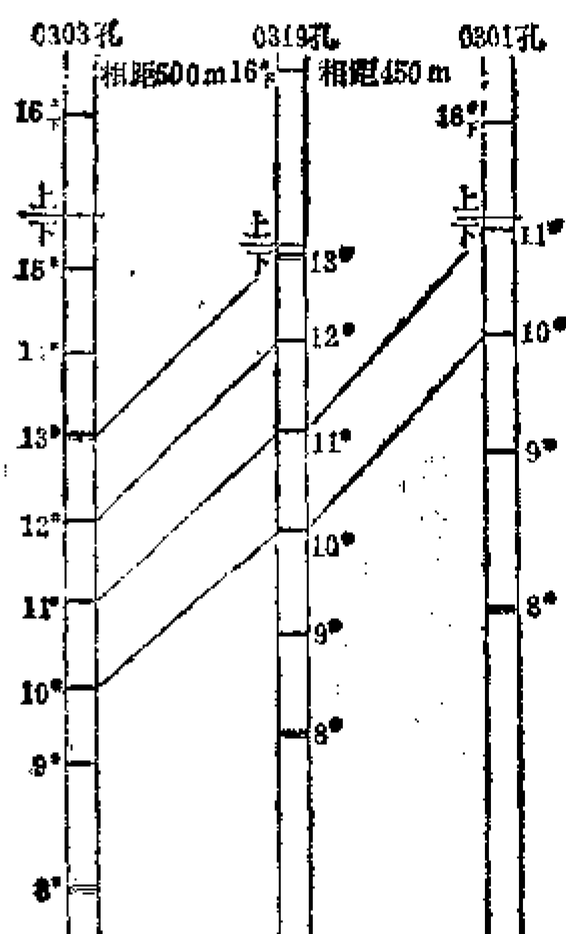


图 1-6-3 模糊地层分类计算结果与地质物探岩性柱图的对比

我国煤田地质勘探普遍使用了诸如电阻率、自然电位、自然γ、电导率、声速等测井方法，对于测井资料的解释积累了丰富的经验。当前计算机在地质勘探中的应用，能够对多条曲线提供的信息，利用模糊分层进行综合分析，并且实现计算机自动拾取，这样做可以代替物探人员的直观解释，前景是可观的。

## 三、马氏链在地层层序和沉积旋回中的应用

引用概率模型来描述地质规律关键在于对地质科学和概率模型之间类比的分析。

马尔科夫转移矩阵及其高阶转移矩阵用来描述地层层序是一个较好的方法。对分辨较大的沉积旋回甚至次要旋回是有效的。提取这些信息的意义不言而喻。工作的着眼点在于自动拾取，紧接着模糊分层的结果进行的全部自动化。采用的方法是：

1.建立马尔科夫转移概率矩阵$p$。

在模糊分层中，地层被聚类成若干类，即被聚成19个类。设$i$类为$j$类的后续，则就存在一个$i$类向$j$类的一个转移。全部柱状图中$i$类向$j$类的转移的总数称为$i$类向$j$类转移的频数。记为$a_{ij}$。由$a_{ij}$可求出$p_{ij}$：

$$p_{ij}=a_{ij}/\sum_{i=1}^{S}a_{ij} \qquad (1\text{-}6\text{-}7)$$

其中$p_{ij}$表示$i$类向$j$类转移的频率，$S$是状态的个数，就是聚类中类的个数。

建立频率转移概率矩阵$p_0$：

$$p_0=[p_{ij}] \qquad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ S \qquad (1\text{-}6\text{-}8)$$

计算结果见表1-9-4，其中聚类的类数$S=22$。

2.计算高阶转移概率矩阵

$$p_n=p_0\cdot p_{n-1} \qquad (1\text{-}6\text{-}9)$$

$p_n$称为$n$阶转移频率转移矩阵。当$p_n$的列向量几乎相同时，称此列向量为固定向量。计算结果见表1-9-5（计算阶数$n=11$）。

3.地质解释——划旋回段

马尔科夫过程转移频率矩阵

表 1-6-4

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.208 | 0.292 | 0.083 | 0.229 | 0.065 | 0.083 | 0 | 0 | 0.02 | 0.021 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0.345 | 0 | 0.218 | 0.091 | 0.236 | 0.018 | 0.036 | 0.018 | 0 | 0 | 0 | 0.018 | 0.018 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0.233 | 0.419 | 0 | 0.023 | 0.116 | 0.023 | 0.069 | 0 | 0 | 0.023 | 0 | 0 | 0 | 0.047 | 0 | 0.023 | 0 | 0 | 0 | 0.023 | 0 | 0 |
| 4 | 0.071 | 0.571 | 0.214 | 0 | 0.143 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0.250 | 0.325 | 0.200 | 0.050 | 0 | 0.025 | 0.125 | 0.025 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0.250 | 0.250 | 0 | 0 | 0.250 | 0 | 0 | 0.250 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0.235 | 0.059 | 0.118 | 0 | 0.353 | 0.059 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.018 | 0 | 0.059 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0.200 | 0 | 0.400 | 0 | 0.200 | 0 | 0 | 0.200 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0.500 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.500 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0.333 | 0.333 | 0 | 0 | 0 | 0.333 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.500 | 0.500 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

**固 定 向 量 表** 表 1-6-5

| 代 号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数 值 | 0.187 | 0.214 | 0.164 | 0.055 | 0.156 | 0.031 | 0.066 | 0.0196 | 0.0039 | 0.0077 | 0.030 |
| 代 号 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| 数 值 | 0.0039 | 0.012 | 0.0077 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0074 | 0.0039 | 0.0039 | 0.0148 | 0.0148 | 0.0122 |

从表1-6-5中可以看出：2号（粉砂岩）数值最大，地质含意是主成分。为此，以它为标志层，可以根据一阶转移矩阵画出转移图1-9-4。

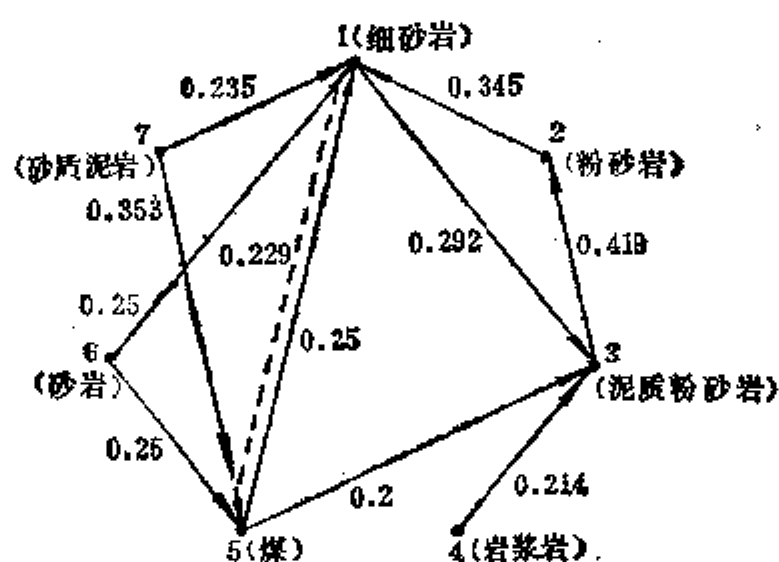



图 1-6-4 转移图

只选7种成分的原因是其它成分转移概率相当低，故略去。根据大概率优先沉积法则不难得到主旋回是：

2 → 1 → 3 → 2 或 2 → 1 → 5 → 3 → 2

实践表明：所作的研究结果与实际吻合得很好。这就使得自动拾取工作有了可靠的保证。

## 四、有序熵在岩层对比中的应用

1）L.Boltzmann关系式为：

$$S = K\log W \qquad (1\text{-}6\text{-}10)$$

这里$S$表示某一物理系统的热力学的熵，$W$是系统状态的概率，$K$是Boltzmann系数。

C.Shannon从通讯理论来引入熵的定义，使熵和不规则性的概念结合起来，而把熵通俗地解释为不规则性的尺度。均匀分布考虑为不规则性的典型表现，那么熵的增大对应着不规则性的增大。

2）测井曲线反映了地层物性的各个方面，在从地质角度极难寻求标志层时，企图抽取一些特征数字用以揭示地层沉积特征的差异，这方面已进行过不少讨论。但由于一些方法分辨率低，因而在复杂地质环境下处理岩层对比时，就遇到较大的困难。

在岩样研究中发现，除了岩性不同外，还明显表现出分布上的“混乱程度”不同，这种不规则性必定反映在测井曲线上。因而设想：用熵作为指标值，用以揭示地层之间的差异，对于煤层相接将是一种有力的工具。通过反复计算，竟和实际吻合得很好（开始，是在已知煤号接好的条件下计算的，目的是验证方法）。

3）因为地层是有顺序的，数据是有序的，所以没有使用一般C.Shannon熵的定义，而是采用了有序熵，其公式如下：

$$H = -\sum_{j=1}^{N} \frac{x_j^{u+(j-1)v}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^{u}} \cdot \log \frac{x_j^{u+(j-1)v}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^{N}} \qquad (1\text{-}6\text{-}11)$$

其中$x_i$是采样数据，$N$是采样个数，$u$与$v$是可调参数，$H$是有序熵。

4）采用矿区中部的0303、0319、0301三孔来计算熵。在这三孔中上部有一“上下”

界面，在地质上作为一标志层。对于0303孔、0319,0301孔在标志层下面如何相接，看法的不同，一种认为0319孔相对于0303孔缺失了15、14号煤，0301孔相对于0303孔缺失了15、14、13、12号煤；另一种认为没有缺失。究竟哪种意见更合理呢？通过有序熵的对比计算，基本倾向于前者。

分别对三个孔的测井曲线使用数字化仪采样。以煤层间的地层为单位分别采样，计算对比。计有电阻率（DLW）、伽玛-伽玛（HGG）、自然地位（DZW）、自然伽玛（HG）等四条曲线（见图1-6-5）。可调参数经试算，选取$u=2$，$v=0.05$，计算结果见表1-6-6。

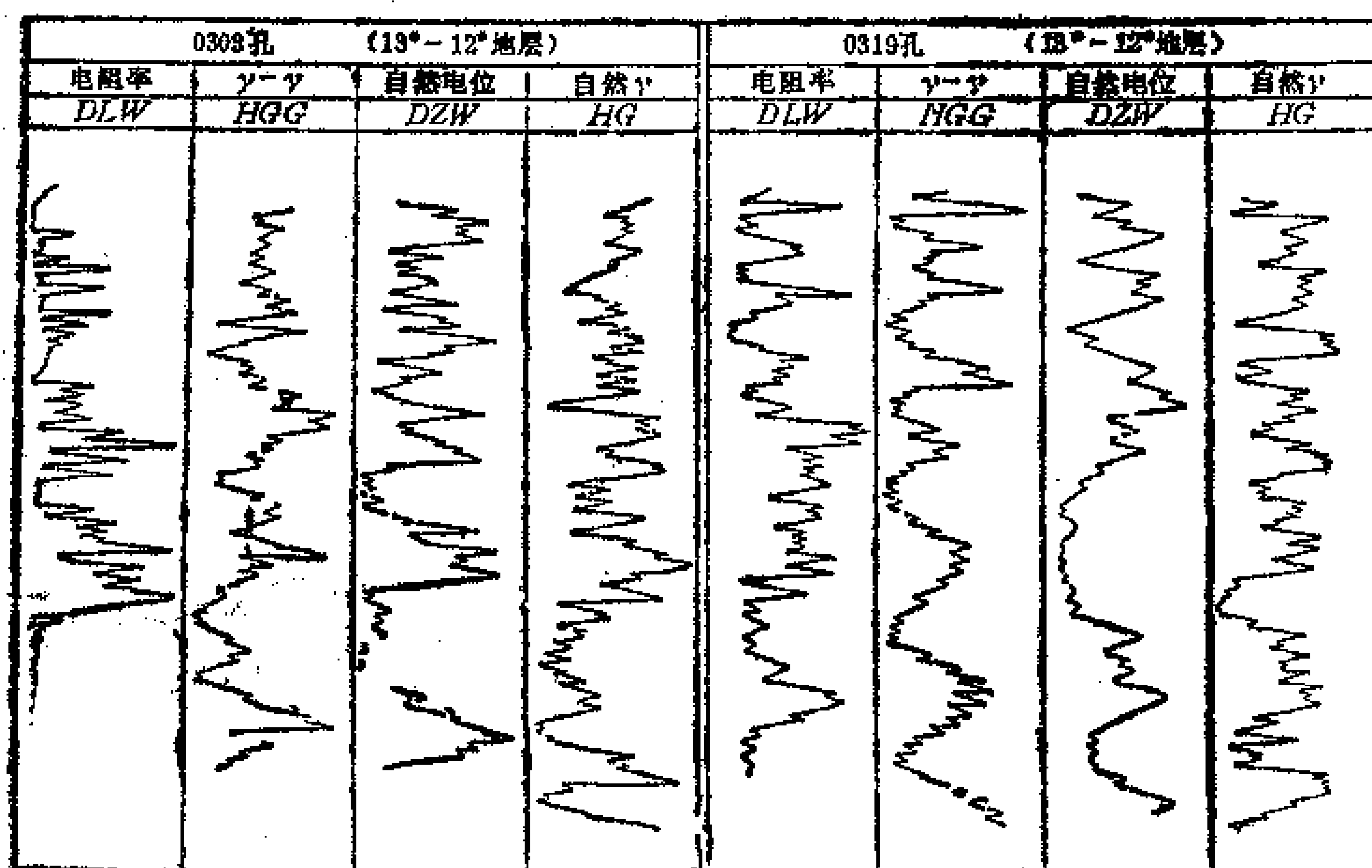



图 1-6-5　0303、0319孔13#～12#地层测井曲线

这里对比计算公式是：

$$C=1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|H_j-H_j'|}{\min(H_j,H_j')}\%\qquad(1\text{-}6\text{-}12)$$

其中$j$表示不同类型的测井曲线；$H_j$与$H_j'$表示不同孔的某段的有序熵；$n$为曲线条数；$C$表示对比度（%）。

分别计算出0303孔16#到9#煤层的七段地层的熵。每段地层的四条曲线分别计算。同时计算出0319孔13#～12#地层的熵，分别与0303孔的七段地层的熵进行对比。

计算结果是：88.63%、77.03%、70.84%、97.82%、95.68%、86.86%等（见图1-9-6）。其中97.82%数值最高，即认为0303孔的13#～12#地层与0319孔的13#～12#地层属于同一层。

5）按照同样方法计算出0303、0319、0301孔全部对比结果（见图1-9-7）。证实了0319孔确实缺失了15#、14#煤，0301孔缺失了15#、14#、13#煤。计算中发现0301孔11#～10#地层的熵与0303孔13#～12#地层的熵相似，经与173队共同研究，初步认为0301孔的11#煤应为12#煤，而在此12#煤与10#煤之间存在着11#煤。

0303、0319、0301孔有序熵计算数值　　　　表 1-6-6

| 地层 | | 0303孔 | 0319孔 | 0301孔 | 地层 | | 0303孔 | 0319孔 | 0301孔 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16$^{*}_{下}$~上下 | $H_1$ | 7.0815 | 7.0048 | 8.2215 | 12*~11* | $H_1$ | 4.188 | 4.5859 | |
| | $H_2$ | 6.2812 | 6.4654 | 5.2438 | | $H_2$ | 4.0316 | 4.1392 | |
| | $H_3$ | 5.2433 | 6.5989 | 5.8869 | | $H_3$ | 3.6880 | 4.1913 | |
| | $H_4$ | 7.2798 | 7.7720 | 6.4828 | | $H_4$ | 4.3805 | 4.5730 | |
| 15*~14* | $H_1$ | 4.9383 | | | 11*~10* | $H_1$ | 7.5731 | 6.7228 | 7.6670 |
| | $H_2$ | 6.2861 | | | | $H_2$ | 5.9952 | 6.5620 | 6.3626 |
| | $H_3$ | 7.6679 | | | | $H_3$ | 6.3333 | 7.0541 | 5.9351 |
| | $H_4$ | 7.3439 | | | | $H_4$ | 6.6828 | 7.8358 | 7.4713 |
| 14*~13* | $H_1$ | 5.9077 | | | 10*~9* | $H_1$ | 4.2364 | 4.4370 | 4.6696 |
| | $H_2$ | 6.7554 | | | | $H_2$ | 4.4057 | 4.6737 | 4.5413 |
| | $H_3$ | 5.8901 | | | | $H_3$ | 4.2609 | 4.4870 | 3.4955 |
| | $H_4$ | 6.8124 | | | | $H_4$ | 4.7060 | 4.6954 | 4.4980 |
| 13*~12* | $H_1$ | 3.6893 | 3.9518 | | 9*~8* | $H_1$ | 4.6531 | 4.2903 | 4.7228 |
| | $H_2$ | 4.0607 | 4.0504 | | | $H_2$ | 4.8441 | 4.5650 | 4.3836 |
| | $H_3$ | 4.4561 | 4.6177 | | | $H_3$ | 4.6829 | 4.4577 | 4.5547 |
| | $H_4$ | 4.5391 | 4.9443 | | | $H_4$ | 4.9263 | 4.8642 | 4.4735 |

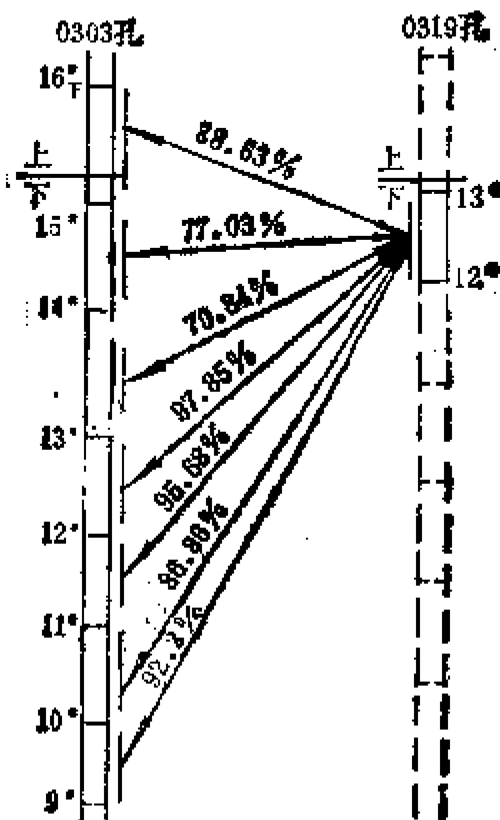



图 1-6-6　钻孔熵值

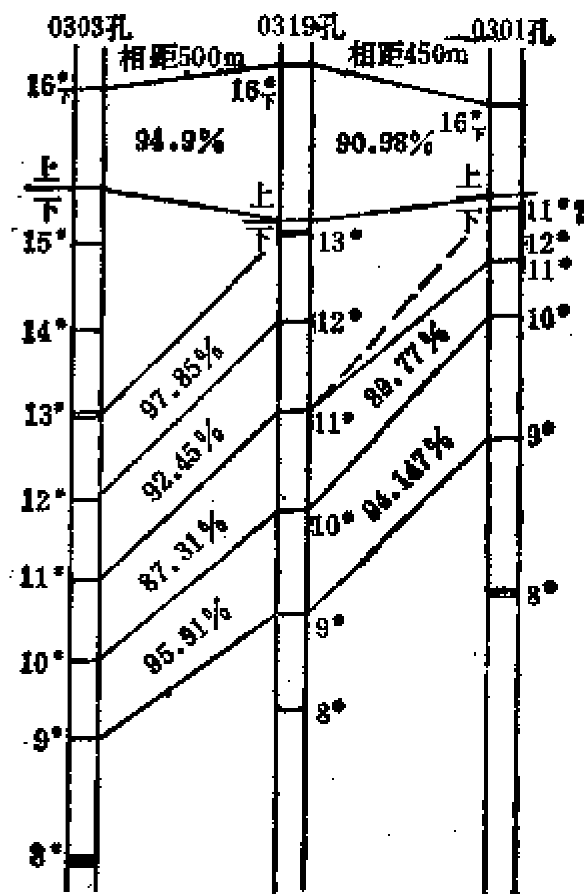



图 1-6-7　钻孔熵值

## §1-7　矿产预测的Fuzzy集模型[10]

1982年卢国雄提出矿产预测的一个Fuzzy集模型，通过分析，给所论模型一个模糊数学的解决方案，为矿产预测提供了一种新手段。

在数学地质工作中，进行矿产预测，使用的数学工具主要是概率统计，所作的预测往

往是“清晰的”，或预测是矿（包括级别），或预测不是矿。这种定量预测比起定性预测确实前进了一大步。用概率统计方法作矿产预测是以清晰集的理论作基础。按照清晰集的观点，人们对地质条件及其成矿作用的认识，以及据此作出的判断，通常是界限分明的，是就是，非就非，不考虑是与非之间的过渡状态。这在一定范围内是可取的、必要的。但是，由于地质条件和地质作用十分复杂，人们对预测区地质规律的认识往往比较粗糙，并不“清晰”，这就可能使主观上的“界限分明”偏离客观实际。为使预测尽可能接近实际，在矿产预测中引进Fuzzy集论的观点，建立矿产预测的模糊集模型，给出所论模型的模糊数学的解决方案，是十分有意义的事。

## 一、地质模型的数学化

多因素矿产预测的一个数学模型可叙述如下：

设某测区可划分为$P$个地质单元（可以是测区内的矩形或其他形状的小区域），反映每个地质单元成矿条件的现象或信息诸因素（如构造、岩性、地层、物探异常、化探异常…等）$u_1$，$u_2$，…，$u_n$，可视为综合作用。若适当地把这些因素数字化，则在每个单元中，每一因素都对应有一个能反映该因素所起成矿作用的数据$X$，这样，每个单元都对应有$n$个数据。

再设这$P$个单元中，有$P_1$个为已知的1级成矿单元，…，$P_{m-1}$个为已知的$m-1$级成矿单元；$P_m$个为已知的非矿单元；余下的$P_{m+1}$个为未知是否成矿的单元，这是要预测的主要对象。这样就把$P$个地质单元划分为$m$个等级：

$$V_1,\ \cdots,\ V_{m-1},\ V_m$$

其中$V_j$表示第$j$级成矿，$j=1$，…，$m-1$；最后一级$V_m$表示非矿，亦可称为第$m$级成矿。

我们的任务是要根据上述已知的数据、分级状况、诸因素对成矿的综合作用，采取恰当的数学方法，对未知单元作出是否成矿、成矿级别以及隶属程度等方面的预测。这就是矿产预测的一个Fuzzy集模型。

1.单因素问题

矿床形成是多因素综合作用的结果，但各单因素在总体作用范围内仍然会表现出各自的作用。

设某未知单元关于因素$u_1$，$u_2$，…$u_n$的取值分别为$X_1$，$X_2$，…，$X_n$，仅就其中一个因素$u_i$而言，$1\leqslant i\leqslant n$，能否根据其对应的数据$X_i$来判断该单元属$V_1$，…，$V_m$中的那一级？若判断该单元只能隶属于$V_1$，…，$V_m$中的某一级，不能再同时隶属于别的级，不考虑隶属程度的高低，则这种判断对地质问题来说是过于简单而难以较好地符合实际。因为从地质角度看，所谓已知的第$j$级成矿单元，除已在开采的矿山之外，常常是根据钻孔资料及其他资料估计而定的，$V_j$究竟应包含哪些单元？界限实际上是非清晰的、是渐变的、模糊的。当认定某单元为$j$级时，所依据的实际上是隶属于$V_j$的程度比其他高。既然人们对所谓已知单元的认识尚且模糊，又怎能要求对未知单元作出清晰的判断呢？由此可见，当以$X_i$表示测区内全体单元对应于第$i$因素的取值的集合时，所谓仅就第$i$因素而言的第$j$级成矿单元所构成的集合，就应当是论域$X_i$上的一个模糊子集，记作$\underset{\sim}{C}_{ij}$。这时，单因素问题的提出方式是：

设某地质单元第$i$因素的取值为$x_i$、$x_i\in X_i$，$\underset{\sim}{C}_{ij}$为论域$X_i$上这样一个模糊子集，它

表示仅就第$i$因素而言的第$j$级成矿。所谓$x_i$对$\underset{\sim}{C}_{ij}$的隶属度，就是与$x_i$对应的地质单元仅就第$i$因素而言可评定为第$j$级的程度。

根据Fuzzy集论，论域$X_i$上的模糊子集$\underset{\sim}{C}_{ij}$完全由它的隶属函数

$$\mu = \mu_{\underset{\sim}{C}ij}(x_i),\ x_i \in X_i$$

所确定，$\mu_{Cij}(x_i)$之值就是$x_i$隶属于$\underset{\sim}{C}_{ij}$的程度。考虑$\forall i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, m$，就应当有$n \times m$个这类隶属函数。如果能把这$n \times m$个隶属函数比较合理地构造出来，单因数问题就解决了。

2.构造单因素的隶属函数

为了构造仅就第$i$因素而言的$m$个反映不同级别的隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{C}i1}(x_i),\ \mu_{\underset{\sim}{C}i2}(x_i),\ \cdots,\ \mu_{\underset{\sim}{C}im}(x_i),\ x_i \in X_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

可采用如下办法。

在本测区的各级已知单元中，每级选择1个最可靠的单元作为标准单元，共有$m$个标准单元，分别称为1级标准单元，2级标准单元，…，$m$级标准单元。作标准单元的数据矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{1-7-1}$$

其中$a_{ij}$为$j$级标准单元关于第$i$因素的取值，式（1-10-1）中第$i$行，$a_{i1}$，$a_{i2}$，…，$a_{im}$分别表示1～$m$级标准单元关于第$i$因素的取值。

假定把地质因素数字化及选择的标准单元都符合地质情况，隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{C}ij}(x_i)$，$x_i \in X_i$，就应满足如下条件：

1）当$X_i=a_{ij}$时，$\mu_{\underset{\sim}{C}ij}(X_i)=1$。这是显然的，因为$j$级标准单元应100%的隶属于第$j$级。

2）当$j$级单元（非标准）关于第$i$因素的取值为$X_i$时，在数组$\mu_{\underset{\sim}{C}i1}(x_i)$，…，$\mu_{Cim}(x_i)$中应以$\mu_{\underset{\sim}{C}ij}(x_i)$为最大。反之，当数组中以$\mu_{\underset{\sim}{C}ij}(x_i)$为最大时，则可认为该单元仅就第$i$因素而言应为第$j$级。一般说来，隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{C}ij}(x_i)$除满足$\mu_{\underset{\sim}{C}ij}(a_{ij})=1$外，当$X_i$远离$a_{ij}$时，函数值应变小。隶属函数呈正态分布，

$$\mu_{\underset{\sim}{C}ij}(x_i) = e^{-\left(\frac{x_i - a_{ij}}{\sigma_i}\right)^2},\ x_i \in X_i \tag{1-7-2}$$

是可供选择的形式之一。其中$\sigma_i$为$a_{i1},\cdots,a_{im}$中各数据的标准差。（1-7-2）式作为隶属函数虽较粗糙，但仍抓住了单元属性的主要特征和渐变性质，只是渐变的快慢尚需根据情况加以校正。

根据式（1-10-2），由标准单元数据矩阵（1-10-1）就可构造出$n \times m$个隶属函数。设测区内某地质单元$e_R$，关于因素$u_1, u_2, \cdots, u_n$的取值分别为$X_1$，$X_2$，…，$X_n$，可记为$e_R$:$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。把其中任一分量$X_i(1 \leqslant i \leqslant n)$代入（1-10-2）式，都可获得$m$个隶属度。

$$\mu_{i1} = e^{-\left(\frac{x_i - a_{i1}}{\sigma_i}\right)^2},\ \cdots,\ \mu_{im} = e^{-\left(\frac{x_i - a_{im}}{\sigma_i}\right)^2}. \tag{1-7-3}$$

它们分别代表单元$e_R$仅就因素$u_i$而言可评为第1级($V_1$)，…，第$m$级($V_m$)的程度。考虑一切$i=1, \cdots, n$，就得到对应于$e_R$的一个隶属度矩阵，

$$\begin{pmatrix} \mu_{11}, & \mu_{12}, & \cdots \mu_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots \mu_{nm} \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}7\text{-}4)$$

如果式（1-10-4）中第$i$行某一元素与同行其余元素相比显著地大，可认为单元$e_R$仅就因素$u_i$而言属于该最大元素相应的级别。如果第$i$行的$m$个分级隶属度几乎相等，则应认为把因素$u_i$数字化及构造隶属函数存在不合理，或$u_i$对成矿无显著作用。如果是后者，又可反过来促使人们调整对本区成矿规律的认识。

可以认为：按[0，1]区间上的隶属度去看待地质单元的分级属性，比起仅按{1，0}（即绝对属于与绝对不属于）去看待地质单元的分级属性要来得自然些，较符合实际些。

3.Fuzzy关系矩阵及其地质意义。

一般来说，矩阵（1-7-4）各行元素之和常常差别较大，难以在不同因素之间作隶属度的比较。因此需要把矩阵（1-10-4）各行进行归一化。令

$$r_{ij}=\frac{\mu_{ij}}{\mu_{i1}+\mu_{i2}+\cdots+\mu_{im}}, \quad i=1, \cdots, n; \ j=1, \cdots, m.$$

$r_{ij}$是单元$e_R$仅按第$i$因素($u_i$)对第$j$级成矿($V_j$)的归一化隶属度，满足$r_{i1}+\cdots+r_{im}=1$，$i=1, \cdots, n$。作表：

| $r$ \ $V$ / $U$ | $V_1 \cdots V_j \cdots V_m$ |
|---|---|
| $u_1$ | $r_{11} \cdots r_{1j} \cdots r_{1m}$ |
| ⋮ | ……………… |
| $u_i$ | $r_{i1} \cdots r_{ij} \cdots r_{im}$ |
| ⋮ | ……………… |
| $u_n$ | $r_{n1} \cdots r_{nj} \cdots r_{nm}$ |

令$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix} r_{11} \cdots r_{1m} \\ \cdots \\ r_{n1} \cdots r_{nm} \end{pmatrix}$，

$U=\{u_1, \cdots, u_n\}$称为因素论域，$V=\{v_1, \cdots, v_m\}$称为分级论域，直积

$$U\times V=\{(u_i, v_j) \quad i=1, \cdots, n; \ j=1, \cdots, m\}$$

是个二元论域。这样，$\underset{\sim}{R}$就可看作二元论域$U\times V$上的一个模糊子集，其隶属函数是$(u, v)$的二元函数。

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(u_i, v_j)=r_{ij}, \quad (u_i, v_j)\in U\times V$$

据此，又可把$\underset{\sim}{R}$看作$U$到$V$的一个模糊关系或模糊映射$\underset{\sim}{f}$，$U\to V$，即

$$\underset{\sim}{R} \rightleftarrows V=\underset{\sim}{f}(u), \quad u\in U, \quad v\in V$$

当$u=u_i$时，通过映射$\tilde{f}$所得到的$V$并不确定，而是可取$V$中任一元素$v_j$，只是取$v_j$的程度为$r_{ij}$，将随$j$的不同而可能改变。故称$\underset{\sim}{R}$为$U$到$V$的一个Fuzzy关系矩阵，它与地质单元$e_R$相对应，完全反映了地质单元$e_R$分别按各单因素对各级的归一化隶属程度。其中，

$$\underset{\sim}{R}_i=(r_{i1}, r_{i2}, \cdots, r_{im}) \quad 1\leqslant i\leqslant n$$

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_i}(V_j)=r_{ij}, \quad V_j\in V, \quad i\text{固定}$$

这说明，$v_j$对$\underset{\sim}{R}_i$的隶属度就是仅按单因素$u_i$使地质单元$e_R$为$j$级的程度。这样，$\underset{\sim}{R}_i$是个（仅就$u_i$言）单元$e_R$的级别模糊集。

$$\underset{\sim}{S}_j=\begin{pmatrix} r_{1j} \\ r_{2j} \\ \vdots \\ r_{nj} \end{pmatrix} \qquad 1\leqslant j\leqslant m$$

$$\mu_{\underset{\sim}{s}_j}(u_i)=r_{ij},\ u_i\in U,\ j\text{固定}$$

这说明$\underset{\sim}{s}_j$是一个使单元$e_R$为$j$级的因素模糊集，$u_i$对$\underset{\sim}{s}_j$的隶属度也是仅按单因素$u_i$使地质单元$e_R$为$j$级的程度，即

$$\mu_{\underset{\sim}{R}_i}(V_j)=r_{ij}=\mu_{\underset{\sim}{S}_j}(u_i)$$

4.各因素的权重与综合隶属度。

由于不同因素在成矿作用上可能有大小之分，或不同因素的权重不同。这就既要考虑各单因素的作用，又要考虑各因素的权重，从而所得到的地质单元$e_R$评定为$V_1$，$V_2$，…，$V_m$各级的程度，才是可作为预测的最终指标。这就是所需要的$e_R$分别对1～$m$级的综合隶属度。

设$a_1$，$a_2$，…，$a_n$分别是因素$u_1$，$u_2$，…，$u_n$的权重，满足$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$。令

$$\underset{\sim}{A}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$$

$\underset{\sim}{A}$可看作因素论域$U$上的一个模糊子集，其隶属函数为$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i)=a_i$，$u_i\in U$，它说明$\underset{\sim}{A}$是一个考虑到各因素权重的因素模糊集，$u_i$对$\underset{\sim}{A}$的隶属度就是因素的权重。

作考虑到各因素权重的单因素隶属度矩阵

$$\underset{\sim}{T}=\begin{pmatrix} t_{11}\cdots t_{1j}\cdots t_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{i1}\cdots t_{ij}\cdots t_{im} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{n1}\cdots t_{nj}\cdots t_{nm} \end{pmatrix}$$

$t_{ij}$表示既考虑各因素权重，又考虑单因素$u_i$作用，使地质单元$e_R$为$j$级的程度。令

$$\underset{\sim}{B}_i=(t_{i1},\ t_{i2},\ \cdots,\ t_{im})$$

$\underset{\sim}{B}_i$可看作分级论域$V$上的一个模糊子集，其隶属函数为$\mu_{\underset{\sim}{B}_i}(v_j)=t_{ij}$，$v_j\in V$。它说明$\underset{\sim}{B}_i$是个既考虑各因素权重，又考虑单因素$u_i$作用的单元$e_R$的级别模糊集。显然，$\underset{\sim}{B}_1$，$\underset{\sim}{B}_2$，…，$\underset{\sim}{B}_n$之并集

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}_1\cup\underset{\sim}{B}_2\cup\cdots\cup\underset{\sim}{B}_n$$

是个既考虑各因素权重，又考虑各单因素作用的单元$e_R$的级别模糊集，其隶属函数

$$b_1=\mu_{\underset{\sim}{B}_1}(v_1),\ b_2=\mu_{\underset{\sim}{B}_2}(v_2),\ \cdots,\ b_m=\mu_{\underset{\sim}{B}_m}(v_m)$$

是使单元$e_R$对1～$m$级的综合隶属度。为了获得求$b_j(j=1,\ \cdots,\ m)$的计算公式，考虑矩阵$\underset{\sim}{T}$的第$j$列

$$\underset{\sim}{T}_j=\begin{pmatrix} t_{1j} \\ \vdots \\ t_{nj} \end{pmatrix} \qquad 1\leqslant j\leqslant m$$

可把$\underset{\sim}{T}_j$看作论域$U$上的一个模糊子集，其隶属函数为$\mu_{\underset{\sim}{T}_j}(u_i)=t_{ij}$，$u_i\in U$。说明$\underset{\sim}{T}_j$是个既考虑各因素权重，又使单元$e_R$为$j$级的因素模糊集，且满足，$\mu_{\underset{\sim}{B}_i}(u_j)=t_{ij}=\mu_{\underset{\sim}{T}_j}(u_i)$

因为，$\underset{\sim}{T}_j=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{S}_j$

于是有 $b_j=\mu_{\underset{\sim}{B}}(v_j)=\mu_{\overset{n}{\underset{i=1}{\bigcup}}\underset{\sim}{B}_i}(v_j)=\overset{n}{\underset{i=1}{\bigvee}}\mu_{\underset{\sim}{B}_i}(v_j)=\overset{n}{\underset{i=1}{\bigvee}}\mu_{\underset{\sim}{T}_j}(u_i)$

$$=\overset{n}{\underset{i=1}{\bigvee}}(\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}_i}(u_i)),$$

故 $b_j=\overset{n}{\underset{i=1}{\bigvee}}(a_i\wedge r_{ij})\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ （1-7-5）

这就是求综合隶属度的计算公式。注意到

$$\underset{\sim}{B}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m)$$

所以 $\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}$ （1-7-6）

根据（1-7-6），如果能求得反映权重的模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，就可通过（1-7-6）式计算出$e_R$对各级的综合隶属度，并对地质单元$e_R$作预测。因此，（1-7-6）式是矿产预测模型的基本公式。

## 二、应用实例

某预测区已划分为若干单元。$S_n$矿床的控制成矿因素主要有5个：构造、$S_n$次生晕、地层、地表含矿裂隙、磁异常。根据现有地质资料，把单元按矿床规模划分为5个等级，由大到小依次为1，2，3，4级，第5级为非矿单元。通过把地质因素数字化，每单元对应于各因素都有一个数据，依次为（$X_1$，$X_2$，$X_3$，$X_4$，$X_5$）。在这些基础地质工作做好的前提下，可按以下步骤建立预测公式并用于预测。

1.选择标准单元并作其数据矩阵

在各级已知单元中分别选择1个比较可靠的单元作为标准单元，1～5级标准单元分别编号为①～⑤。它们关于各因素的取值列表如下：

①～⑤级关于各因素的取值$a_{ij}$　　表 1-7-1

| 因素 $i$ | 级别 $j$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ① 1级 | ② 2级 | ③ 3级 | ④ 4级 | ⑤ 5级 | 行标准差 $\sigma_i$ |
| 1.构　造 | 6.1 | 2.8 | 9.4 | 10.2 | 20.7 | 6.74 |
| 2.$S_n$次生晕 | 43 | 48 | 27 | 13 | 11 | 16.88 |
| 3.地　层 | 3 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1.3 |
| 4.裂　隙 | 74 | 77 | 0 | 0 | 2 | 41.01 |
| 5.磁异常 | 50 | 1 | 30 | 9.1 | 100 | 39.55 |

2.作单因素隶属函数

$\mu_{\underset{\sim}{C}_{ij}}(X_i)=e^{-\left(\frac{X_i-a_{ij}}{\sigma_i}\right)^2}$，$i=1$，…，5；$j=1$，…，5 $a_{ij}$及$\sigma_i$之值见1-7-1表。

3.建立各标准单元的模糊关系矩阵

利用上述单因素隶属函数，分别求出各标准单元的隶属函数值，进行归一化，便可得各标准单元的模糊关系矩阵（$\underset{\sim}{R}_1$～①，…，$\underset{\sim}{R}_5$～⑤）。

$$\underset{\sim}{R}_1=\begin{bmatrix}0.31&0.24&0.24&0.21&0\\0.42&0.38&0.17&0.02&0.01\\0.38&0.03&0.21&0.38&0\\0.47&0.47&0.02&0.02&0.02\\0.39&0.08&0.31&0.14&0.08\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{R}_2=\begin{bmatrix}0.32&0.40&0.16&0.12&0\\0.43&0.46&0.10&0.01&0\\0.04&0.44&0.24&0.04&0.24\\0.48&0.48&0.01&0.01&0.02\\0.08&0.36&0.21&0.35&0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R}_3=\begin{bmatrix}0.24&0.12&0.31&0.31&0.02\\0.16&0.08&0.40&0.20&0.16\\0.20&0.20&0.36&0.20&0.04\\0.01&0.01&0.33&0.33&0.32\\0.25&0.18&0.32&0.24&0.01\end{bmatrix}\quad \underset{\sim}{R}_4=\begin{bmatrix}0.22&0.10&0.32&0.33&0.03\\0.02&0.01&0.20&0.39&0.38\\0.38&0.03&0.21&0.38&0\\0.01&0.01&0.33&0.33&0.32\\0.11&0.31&0.25&0.33&0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R}_5=\begin{bmatrix}0.01&0&0.05&0.08&0.86\\0.01&0&0.17&0.41&0.41\\0&0.34&0.06&0&0.60\\0.01&0.01&0.32&0.32&0.33\\0.16&0&0.03&0.01&0.80\end{bmatrix}。$$

4.求各因素权重的模糊集 $\underset{\sim}{A}$

设 $\underset{\sim}{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，按(1-7-6)，有

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=(b_1, b_2, \cdots, b_5)$$

选定 $\underset{\sim}{A}$ 的原则如下：

1）必须符合标准单元的分级状况。例如，当 $\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{R}_1$ 时，按(1-7-6)求得的($b_1$，…，$b_5$)应以 $b_1$ 为最大，因为 $\underset{\sim}{R}_1$ 对应的单元①已经是1级；当 $\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{R}_2$ 时，应以 $b_2$ 为最大，其余类推。

2）应符合本测区的地质情况。由于符合1）的 $\underset{\sim}{A}$ 并不唯一，可根据地质(经验)适当地选择其中一组解作为 $\underset{\sim}{A}$。

采用以下方法求 $\underset{\sim}{A}$：

（1）在 $\underset{\sim}{R}_1$，…，$\underset{\sim}{R}_5$ 中各选出其最大列构成最大列矩阵：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.31&0.40&0.31&0.33&0.86\\0.42&0.46&0.40&0.39&0.41\\0.38&0.44&0.36&0.38&0.60\\0.47&0.48&0.33&0.33&0.33\\0.39&0.36&0.32&0.33&0.80\end{bmatrix}$$

（2）在 $\underset{\sim}{R}$ 的每一列取最大元构成：

$$\underset{\sim}{B}=(0.47, 0.48, 0.40, 0.39, 0.86)$$

（3）建立模糊关系方程：$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}$

解之得：$\underset{\sim}{A}=([0.86, 1], [0.40, 1], [0, 1], [0.48, 1], [0, 1])$

即 $0.86\leqslant a_1\leqslant 1$，$0.40\leqslant a_2\leqslant 1$，$0\leqslant a_3\leqslant 1$，$0.48\leqslant a_4\leqslant 1$，$0\leqslant a\leqslant 1$，就是说，求得的权重 $\underset{\sim}{A}$ 并不唯一，但都满足1），这就存在选择的余地。可取区间中点试算，即

(0.93, 0.70, 0.50, 0.74, 0.50)，把它归一化，便得

$$\underset{\sim}{A}=(0.27,\ 0.21,\ 0.15,\ 0.22,\ 0.15)。$$

它说明，在本测区构造及地表含矿裂隙这两个因素对单元成矿与否所起的作用要大些。

所得的$\underset{\sim}{A}$是否真的满足1)？检验如下：

$\underset{\sim}{B}_1=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}_1=(\underline{0.27},\ 0.24,\ 0.24,\ 0.21,\ 0.08)$,

$\underset{\sim}{B}_2=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}_2=(0.27,\ \underline{0.27},\ 0.16,\ 0.15,\ 0.15)$,

$\underset{\sim}{B}_3=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}_3=(0.24,\ 0.15,\ \underline{0.27},\ 0.27,\ 0.22)$,

$\underset{\sim}{B}_4=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}_4=(0.22,\ 0.15,\ 0.27,\ \underline{0.27},\ 0.22)$,

$\underset{\sim}{B}_5=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}_5=(0.15,\ 0.15,\ 0.22,\ 0.22,\ \underline{0.27})$。

检验结果，$\underset{\sim}{A}$满足1)，可用于预测。

5.对未知单元作预测

⑥号单元关于各因素的取值为(2.4, 23, 1, 36, 47)。把这些数据代入(1-7-3)，得到⑥号单元的隶属度矩阵，再把各行归一化，得模糊关系矩阵：

$$\underset{\sim}{R}_6=\begin{bmatrix}0.84 & 0.09 & 0.05 & 0.02 & 0\\ 0.05 & 0.19 & 0.35 & 0.23 & 0.18\\ 0.06 & 0.38 & 0.25 & 0.06 & 0.25\\ 0.12 & 0.45 & 0.14 & 0.14 & 0.15\\ 0.30 & 0.02 & 0.20 & 0.14 & 0.37\end{bmatrix}$$

再由公式(1-7-6)，便求得⑥号单元对各级的综合隶属度。

$$\underset{\sim}{B}_6=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}_6=(0.27,\ 0.22,\ 0.21,\ 0.21,\ 0.18),$$

据此，⑥号单元可评定为1级预报单元。

Fuzzy集论用于矿产预测的前提是控矿因素的选择基本可靠；地质因素数字化基本合理；各级标准元的选择基本符合实际。关键在于构造单因素的隶属函数和确定各因素的权重。深入研究这两个关键，将促进Fuzzy集论用于矿产预测。

## §1-8 模糊概率与矿产模糊预测[11]

1984年，徐仲平把地质矿床学中的随机性和模糊性结合起来，利用模糊概率进行矿产模糊预测，为矿产预测提供了一种新方法、新工具。

### 一、概率分布地质意义的一般提法

设有$N$个找矿对象，如其中有$M$个“有矿”，现从中抽出几个进行地质找矿、勘探工作，问见矿的可能性如何？这是对有限总体的一种无放回抽样(抽样也当然是有限的)。抽样(找矿、勘探工作)结果只有两种可能：见矿与不见矿。

如设$K$为见矿的对象数，则$K$为离散整数。见矿这一事件为一离散型随机变量，其概率分布为超几何分布：

$$P(\xi=K)=\frac{C_N^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ K=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m \qquad (1\text{-}8\text{-}1)$$

因为，取得的见矿数不外是0或1或2…或$n$，

故 $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$， 因此

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

决定一超几何分布，其中$p_k$由（1-8-1)式定义。由（1-8-1）定义的超几何分布有数学期望$n \cdot m/N$，方差为$m(N-m)n(N-n)/N^2(N-1)$，所以叫做超几何分布是因为$p_k$可看成所谓超几何级数一般项的系数，正如一项分布可看成二项式（$p+q)^n$的一般项一样。

这里$m$为见矿对象数，这个概型对有限找矿对象是适用的。

在地质找矿、勘探工作中，还会遇到这样一个类型的抽样：如在探区打钻，这时钻孔可看作是空间上的一个点。从布钻的可能性上看，它可能是探区的任一点布钻；从数学的抽象上看，从面上（探区）取一个点，成为对无穷总体的抽样了（但抽样还是有限的）。这时，见矿（其反义为不见矿）的可能性归结为二项分布：

$$P(\xi=K)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k} \quad (1\text{-}3\text{-}2)$$

其中，$n$为布钻（抽样）个数，$K$为见矿钻孔数，$P$为单钻见矿概率。在这个式子里总体个数$N$已不复出现。二项分布是超几何分布的极限情况。在这种概型中试验次数还是有限的。

如果把一个大的测区划分为许多小的找矿单元，再把某单元见矿归结为一个矿点的发现。这相当于将测区作无限细分，讨论点上见矿的可能性，抽样（对每个细小单元的找矿调查）可看作多至无穷了。这时找矿概率就要归结为普瓦松分布了（它又是二项分布的极限情况）。这时有：

$$P(\xi=K)=\frac{\lambda^k}{K!}e^{-\lambda} \quad (1\text{-}8\text{-}3)$$

这样，抽样个数$n$已不复出现。实际上，我们只能近似地使用普瓦松公式。因为，找矿单元不可能是无穷的，只可能在对测区的细分中使找矿单元数有足够多。矿点的空间展布是服从普瓦松公式的（按Slichter理论），这是一个重要的揭示。它的意义及实用价值在于提供了一个矿点的预测手段。

从下面一个算例，可看到它的实际意义：

某测区共划为156个找矿单元，经多年找矿、探矿工作。已知见一个矿点的单元为20个；见二个矿点的单元为6个；见三个矿点的单元为5个；未见矿的单元尚有125个，问该测区还有多大的找矿潜力？这可用实际见矿频率和普瓦松理论分布的计算结果加以比较的办法来分析。

现将数据及计算结果列于下表（1-8-1）：

**数据及计算结果** 表 1-8-1

| 单元内矿点数 $K$ | 观察频数 $f_k$ | 频率$P^*=\frac{f_k}{N}$ | $K \cdot f_k$ | 普瓦松理论概率$P$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 125 | 0.8013 | 0 | 0.7399 |
| 1 | 20 | 0.1282 | 20 | 0.2229 |
| 2 | 6 | 0.0384 | 12 | 0.0336 |
| 3 | 5 | 0.0321 | 15 | 0.0003 |
| $\Sigma$ | 156 | 1 | 47 | |

普瓦松分布中的参数 $\lambda$ 可用均值作无偏估计，即：

$$\lambda=\sum_{k=0}^{3}K\cdot f_k/\sum_{k=0}^{3}f_k=47/156=0.3013$$

算得其普瓦松分布为

$$P(\xi=K)=\frac{0.3013^k}{K!}e^{-0.3013},\qquad K=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

所求得之值已列入表1-8-1第五栏内。

如果矿点的空间展布确实服从普瓦松分布，那么，在该测区不见矿点的单元，只应约占单元总数的74%。现还存80%的单元未见矿，即是说，在单元数中还有80%－74%＝6%的单元，即（156×0.06）＝9个单元还有见矿可能，这就是普瓦松分布的找矿预测意义。

但在进一步的分析中会发现，当$K$增大时，普瓦松理论分布与频率分布相去越来越远。如$K=3$时，理论概率为0.0003，而频率却为0.0321。由理论分布计算有三个矿点的单元，只应是0.05个（应理解为不应存在三个矿点的单元）。但实际上确有5个单元见到三个矿点。为了弥补不足，往往求助于负二项分布(有的把它解释为普瓦松分布的叠加)，虽然在拟合程度上得到改善，但也不全然理想。

## 二、用模糊概率进行矿产模糊预测

在上述讨论中，事件的发生是随机的，但对事件-集合的刻划却是明确的。随机变量的实现值$K=0,\ 1,\ 2,\ 3$等也都是明确的、不含混的。如将问题象这样提出：见到一些矿点的可能性有多大？这虽也是随机事件，但却失去了经典意义中的清晰性（在随机性上迭加了模糊性）。它可能是出现一个矿点，也可能是两个矿点或三个矿点。

在经典概率论中，一个概率场是一个三元序组（$\Omega,A,P$），其中$\Omega$是一个经典集，称作样本空间，$\Omega$的元素$\omega$代表基本事件-样本点，$A$是$\Omega$上Borel $\sigma$—代数或$\mathscr{P}(\Omega)$的一个子类，$P$是一个映射，$P:P\to\{0,\ 1\}$。

现给定一个概率场（$\Omega,\mathscr{A},P$），如$\underset{\sim}{A}$是$\Omega$的一个模糊子集，$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}(\omega)$是一个随机变量，这时$\underset{\sim}{A}$称为一个模糊事件。模糊事件的概率需要重新加以定义。对于离散性的随机变量是这样定义的：

$$P(\underset{\sim}{A})\triangleq\sum_{k=1}^{3}\underset{\sim}{A}(K)P_k \qquad (1\text{-}8\text{-}4)$$

这样，对于前面讨论过的算例来说，$\Omega$为有限集，$\Omega=\{1,\ 2,\ 3\}$。

$\underset{\sim}{A}$表示找到一些矿点这一事件，且假定：

$$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.5}{3},$$

则$\underset{\sim}{A}$发生的概率（即找到一些矿点，不明说找到的到底是1个、2个还是3个，是统而言之）。

$$P(\underset{\sim}{A})=\sum_{k=1}^{3}\underset{\sim}{A}(K)P_k=\sum_{k=1}^{3}\underset{\sim}{A}(K)\frac{\lambda^k}{K!}e^{-\lambda} \qquad (1\text{-}8\text{-}5)$$

$$=1\times0.2229+0.8\times0.036+0.5\times0.0003=0.2499$$

见到一些矿点的单元数应为156×0.2499≈39个。

找矿潜力为：39－31＝8个。

这与前面的结论相去不远，但却没有推敲解释上的困难，也显得更自然贴切，更易为常理所接受。

现用这种模糊概率的方法对新疆某地铁矿找矿潜力作一预测。资料数据及计算结果示于表1-8-2。

资料数据及计算结果　　表 1-8-2

| $K$ | 频　　数 | $K\cdot f_k$ | 普瓦松理论计算值　$P$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 232 | 0 | 0.7852 |
| 1 | 40 | 40 | 0.1899 |
| 2 | 7 | 14 | 0.0230 |
| 3 | 4 | 12 | 0.0019 |
| 4 | 2 | 8 | 0.0001 |
| $\Sigma$ | 306 | 74 | |

$$\lambda=\sum_{k=0}^{4}K\cdot f_k/\sum_{k=0}^{4}f_k=74/306=0.2418$$

设$\underset{\sim}{A}$为单元中见到一些矿点这一模糊事件，如把见到一些矿点理解为见到1个、2个、3个或4个见矿点，则有$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，

再设$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.2}{4}$

则有：

$$P(\underset{\sim}{A})=\sum_{k=1}^{4}\underset{\sim}{A}(K)P_k$$
$$=1\times0.1899+1\times0.8\times0.023+0.5\times0.0019+0.2\times0.0001$$
$$=0.2093$$

即在整个测区能见到一些矿点的单元可有306×0.2093=64个。现已知有53个单元有矿点，潜在含矿单元有：64－53=11个，即还可在11个单元内见到矿。

现如果将测区范围再向外扩展，圈进了748个单元，见矿情况及理论计算如下：

见矿情况及计算结果　　表 1-8-3

| $K$ | 频　　数 | $K\cdot f_k$ | 普瓦松理论计算值　$P$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 742 | 0 | 0.9023 |
| 1 | 41 | 41 | 0.0927 |
| 2 | 7 | 14 | 0.0048 |
| 3 | 5 | 15 | 0.0002 |
| 4 | 3 | 12 | 0.00004 |
| $\Sigma$ | 798 | 82 | |

$$\lambda=\sum_{k=0}^{4}K\cdot f_k/\sum_{k=0}^{4}f_k=82/798=0.1028$$

设$\underset{\sim}{A}$为见到一些矿点这一模糊事件，$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$。

又设　$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.2}{4}$。则

$$P(\underset{\sim}{A})=1\times0.0927+0.8\times0.0048+0.5\times0.0002+0.2\times0.00004=0.0966$$

可见矿单元为789×0.0966=77个，可预测尚有77－56=21个单元可能见到矿。

但这种范围扩大不能是任意的，不能越出成矿地质条件所限定的范围，应和成矿的地质区分对应起来。预测范围的扩大会带来预测可靠性的降低，如将前者称为一级预测，则后者可看作是二级预测。

以上计算直接取决于λ值的估计值，实际上，λ的值一方面取决于地质因素，同时又受到一地区勘探程度的影响。新疆一例及前例均为火山岩发育地区，地质条件有可比较之处。而前者的勘探程度却远高于后者，所估出的λ值更为逼近理论值。如将前例的λ值用于后例，可算得后例有306×0.2499=76个单元见矿，即还可有76－53=23个单元有见矿潜力，情况更为乐观一些，但这是一种类比预测，只有参考性性质（但为定量参考）

这里所讨论的预测用到了模糊概率，不妨将其称作矿产模糊预测。

## § 1-9 模糊协方差聚类分析用于夹皮沟矿区外围找金远景区的划分[13]

1986年，孙宝田、洪恒令针对吉林省著名黄金产区——夹皮沟矿区的外围，应用ISODATA算法进行模糊聚类分析，进而划分出找矿远景区。提出了处理区域化探数据、筛选找矿信息的好方法。

### 一、模糊协方差聚类分析方法

在§1-5中，已经引证了模糊目标函数聚类算法，现着重给出实施运算的主要步骤。

设$X=\{\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_m\}$是$n$维空间$R^n$中的原始信息样本向量集。其中：

$$\overline{x}_i=(x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots,\ x_{in})^T\in R^n \tag{1-9-1}$$

$x_{ij}$是向量$x_i$的第$j$个指标（属性）参数值，$x_{ij}\in R$。

一个分类是对任意向量$\overline{x}\in X$寻求一个隶属程度的$K$元组。

$$\mu(o)=\{\mu_1(\overline{x}),\ \mu_2(\overline{x}),\ \cdots,\ \mu_k(\overline{x})\} \tag{1-9-2}$$

其中$K$为类别数，$\mu_1(\overline{x})$是$\overline{x}$对第$j$类的隶属程度。如果

$$\mu_j(\overline{x})\in[0.1],\forall\overline{x}\in X,\ K_j\leqslant K,\text{且}\sum_{j=1}^{k}\mu_i(\overline{x})=1 \tag{1-9-3}$$

那么聚类问题便是模糊分类问题。最终得到一个$m\times k$阶矩阵，$\mu_f=(\mu_{ij})_{m\times k}$。
其中，$\mu_{ij}=\mu_j(\overline{x})\in[0,1]$，是$\overline{x}_i$对第$j$类的隶属度。

满足：$\sum_{j=1}^{k}\mu_{ij}=1,\ \forall_i,\ \sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}>0,\ \forall_j\ \ 1\leqslant j\leqslant k,$

$$\underset{\sim}{A}_j=\int\mu_j(\overline{x}_i)/\overline{x}_1,\ 1\leqslant j\leqslant k, \tag{1-9-4}$$

它形成了$X$上的模糊$K$组划分。

聚类准则是找出合适的$\mu_f$（或$\mu$）矩阵，使下式

$$J(\mu,\ d)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\mu_{ij}^q d_{ij} \tag{1-9-5}$$

取极小值。其中$\mu_{ij}$是样品向量$\overline{x}_i$对第$j$类的隶属度；$d_{ij}$是Mahalanobis距离；$d$是一

个控制类别模糊性的参数，当 $\alpha$ 增加时，分类的模糊性增加。$J(\mu, d)$称之为Fuzzy聚类的目标函数。

在（1-9-5）式中，当 $\alpha>1$，且$\mu_{ij}\in[0.1]$，保留（1-9-4），即为模糊分类问题。

Mahalanobis距离（$d_{ij}$）的一般形式为

$$d_{ij}=d_{ij}(\overline{V}_j, M_j)=(\overline{x_i}-\overline{V}_j)^T M_j(\overline{x_i}-\overline{V}_j) \tag{1-9-6}$$

其中$\overline{V}_j$是第$j$类的模糊平均值向量，$M_j$是正定对称矩阵。$d_{ij}$是$\overline{V}_j$，$\overline{M}_j$的函数。由于各类母体在空间的分布是不同的，期望$d_{ij}$在空间的不同方向的度量取不同的比例，这就取决于$M_j$的变化，但$M_j$的变化不能没有限制。这里采用限制矩阵$M_j$的行列式$|M_j|$的办法。令

$$|M_j|=\rho_j,\ \rho_j>0,\ 1\leqslant j\leqslant k \tag{1-9-7}$$

每一类 $j$ 都有自己的固定的$\rho_j$。于是目标函数

$$J(\mu, V, M, \lambda, \beta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{K}\mu_{ij}^{\alpha}d_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{K}\mu_{ij}-1\right)+\sum_{j=1}^{K}\beta_j(|M_j|-\rho_j) \tag{1-9-8}$$

式中：$\lambda_i$，$\beta_j$都是Lagrange乘数。

分别求 $J$ 对$\overline{V}_j$，$M_j$的偏导数，且分别令其等于零，解之得：

$$\overline{V}_j=\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}\overline{x_i}\Big/\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha} \tag{1-9-9}$$

它是对应于最佳隶属函数$\mu_{ij}$的第 $j$ 类模糊平均值，也就是对第 $j$ 类的聚类中心。同时还求得：

$$M_j^{-1}=-\frac{1}{\rho_j|M_j|}\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}\cdot(\overline{x_i}-\overline{V}_j)(\overline{x_i}-\overline{V}_j)^T \tag{1-9-10}$$

令

$$M_{fj}=\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha}(\overline{x_i}-\overline{V}_j)(\overline{x_i}-\overline{V}_j)^T\Big/\sum_{i=1}^{m}\mu_{ij}^{\alpha} \tag{1-9-11}$$

则

$$M_j^{-1}=\left(\frac{1}{\rho_j|M_{fj}|}\right)^{\frac{1}{n}}M_f \tag{1-9-12}$$

其中：$M_{fj}$称为第 $j$ 类的模糊协方差矩阵，它反映了各类母体的空间分布；$n$是向量空间维数。

用迭代法寻求目标函数 $J$ 的算法可归纳成如下主要步骤：当给出原始信息数据矩阵为$X=\{x_i\}$时，首先人为地给出一个分类个数 $k$，它决定了我们欲将样品分为 $k$ 类。然后给出初始聚类中心（亦称为初始模糊平均值）$V_j$，这个初始聚类中心可以根据所欲分成的类别数，选定每类有代表性的样品来充当。利用它计算出初始各类的模糊协方差矩阵 $M_{fj}$，据此再利用（1-9-6）式计算Mahalanobis 距离，求出诸样品的隶属函数$\{\mu_{ij}\}$，到此完成了第一轮运算。有了这些运算结果之后，利用（1-9-9）式重新计算各类的聚类中心$\overline{V}_j$，得到修正后的聚类中心。相应地利用（1-9-11）式重新计算模糊协方差矩阵$M_{fj}$，利用（1-9-12）式求出$M_j^{-1}$，有了$M_j^{-1}$之后，不难求出 $M_j$，有了 $M_j$ 便可重新计算出Mahalanobis 距离，从而求出新的隶属函数…，不断重复上述步骤，即反复进行迭代运算。当迭代 $l$ 次后，计算出来的$\mu_{ij}^{(l)}$和上一次(即 $l-1$ 次)计算出来的$\mu_{ij}^{(l-1)}$之差的绝对值$|\mu_{ij}^{(l)}-\mu_{ij}^{(l-1)}|$小于预先给定的小正数 $\varepsilon$（$0<\varepsilon<1$）时，即可结束迭代。当然亦可预先规定好迭代次数 $l$，当完成 $l$ 次迭代后，结束迭代运算。根据最终的$\mu_{ij}^{(l)}$值，判定样品 $i$ 的归属，这样就达到了将$m$个样品划分为 $k$ 类的目的。

所有上述计算步骤都是在电子计算机上完成的。

## 二、夹皮沟矿区及其外围地质情况

夹皮沟金矿区已知的金矿床（点）20余处，大多位于北西向挤压带上。从大碰子金矿点到八家子金矿床，矿带绵亘50余公里，明显地受太古代地层及构造控制。种种证据表明，岩浆活动给成矿物质的活化，迁移和富集提供了热驱动力，并且有可能提供了部分成矿物质。目前，较多的地质勘探工作多囿于夹皮沟矿区，具体而言，多集在矿区中所谓的"北西向挤压带"附近。矿区外围找矿前景如何？哪些地段应该优先安排评价勘探工作是地质工作者首先关心的问题，也是维持和扩大夹皮沟金矿区生产的至为重要的问题。

## 三、找金远景区的划分

由于夹皮沟矿区及其外围地形起伏较大，切割较深，水系发育，因而是开展分散流找矿的理想靶区。近年来，吉林省冶金地质勘探公司604队、608队在这一地区开展了1/50000的分散流工作。样品定量测定了Au，Ag，Cu，Pb，Zn，Co和Ni等元素含量，获得了一批有意义的异常。因此，以分散流工作成果作为划分找金远景区的基础资料。

测区面积为2720平方公里，将其划分为680个方格，每个方格面积为4平方公里。分别将每个方格内所有样品相加，再求出每个方格内诸元素的平均值。把这些平均值视为新的"样品"，用之代表诸方格。目的是将这些方格划分为两类：一类是与金矿化有关的，或者视为具有找金远景的；另一类是与金矿化关系不大的。用前述的模糊协方差聚类分析方法将所有的样品（即方格）分为两类，与已知金矿床所在方格划为同一类的方格，就视为找金远景区。

选用老牛沟金矿附近有金矿的方格（见1-9-1图）作为第一类代表性样品。其诸元素含量为：Au24.6，Ag9.7，Cu37.4，Pb24.7,Zn75.4,Co24.0,Ni38.9；另外选取了一个与金矿化关系不甚密切的方格（见图）,其诸元素含量为：Au4.0,Ag8.5，Cu26.5，Pb20.3，Zn72.7，Co20.1，Ni32.0，（以上诸元素含量Au的单位为ppb外，其余皆为ppm）

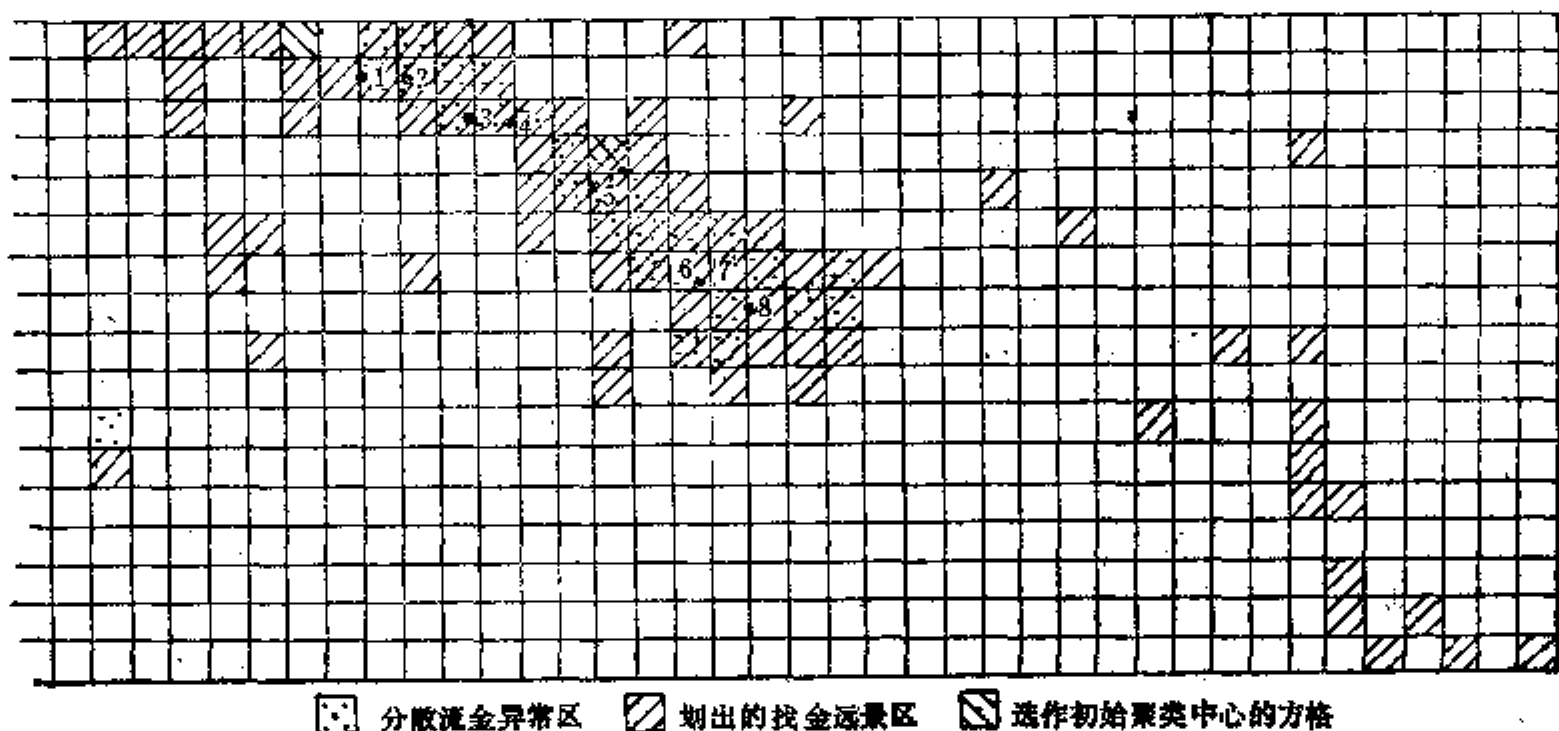



图1-9-1 夹皮沟矿区及外围找金远景区划分图.

已知金矿床（点）编号：1-红旗沟；2-苇厦子；3-板庙子；4-菜垃子；5-老牛沟；6-二道岔；7-四道沟；8-夹皮沟

这两个方格——"样品"分别作为两类的初始聚类中心，进行模糊协方差聚类分析。即给出680个方格——"样品"的7个化学元素含量数值，形成原始数据矩阵。给出欲分成的类别数 $j=2$，给出初始聚类中心数值：$\overline{V}_1=(24.6, 9.7, 37.4, 24.7, 75.4, 24.0, 38.9)$，$V_2=(4.0, 8.5, 26.5, 20.3, 72.7, 20.1, 32.0)$，给出任意的小整数 $\varepsilon$。经过迭代运算后，得到了680个方格——"样品"的各个 $\mu_{ij}$ 值，按隶属函数 $\mu_{ij}$ 的数值来决定归属。例如，对于第 $i$ 方格——"样品"而言，其归于第一类（$j=1$）的隶属函数值为 $\mu_{i1}=0.8756$，归于第二类（$j=2$）的隶属函数值 $\mu_{i2}=0.1244$。因为 $\mu_{i1}>\mu_{i2}$，所以将第 $i$ 个样品划为与金矿化有关系的第一类。计算结果如图1-13-1所示。从图中可看出，属于第一类的85个方格囊括了夹皮沟矿区所有已知的矿床（点），例如，夹皮沟、三道岔、板庙子、老牛沟等矿床。除此而外，划归该类的还有已知的找金远景区和情况尚不清楚的地段，这些地段都是不容忽视的。

## 四、讨　论

将本区中第一类的方格与分散流金异常区相对比后可以看出：前者范围更大些，它不仅完全包括了金异常区，而且揭示出某些金异常并不太明显的找金远景地段。这些地段已经不再囿于夹皮沟矿区的"北西向挤压带"，有的还出现在本区南东部。后者成矿条件有利，但因交通不方便而工作程度较低，对之应该引起足够的重视。

鉴于模糊聚类分析方法所进行的类别划分，不仅仅考虑了Au的含量，而且综合考虑了Au、Ag、Cu、Pb、Zn、Co、Ni等元素含量及其相互关系，因而得到的分类就更"客观"些。所以，模糊聚类分析方法划分出来的找金远景区，不仅不会漏掉金异常区，而且会更好地表现找金远景区的空间分布。因此，这种不失为处理区域化探数据、筛选找矿信息的好方法。

应该指出，对于找矿远景区的划分，应该考虑到多种地质因素。要收集包括地层、岩浆岩、构造、蚀变、矿化、地球物理、地球化学、遥感等方面的信息，即便是地球化学方面的信息，亦不限于水系底沉积物样品中几个元素含量。只有这样才能作出更为准确的判断。

## §1-10　利用模糊数学综合评价岩石可钻性分级[15]

1984年，王少豪应用模糊数学理论和方法对岩芯钻探的岩石可钻性分级进行综合评价，使岩石可钻性分级由定性估计变换成定量化判定。编制了电算程序设计，得出了既较准确又有客观依据的结果。此即所谓多因素岩石可钻性分级法。

我国岩芯钻探采用过的分级方法是五十年代我国制定的岩石十二级分级表。这个分级表的最大缺点是要求在给定技术条件下通过实钻确定的岩石等级。既不能为设备和工具的设计提供依据，也无法根据岩石级别来预估钻速。

多因素岩石可钻性分级的具体作法是：用各种简易式岩石性质参数测定仪器，在钻孔施工过程中，一边采样，一边测试岩样的各种物理力学性质指标，并同时统计各个钻进回尺的机械钻速。当收集大量的原始数据之后，就可以进行数据处理、统计分析、综合评价、计算分级。这一系列工作可以在电子计算机上一次完成，并得到全部结果。这样，在

一个队或一个勘探区运用上述的分级方法，对一、二个或几个施工的钻孔进行工作，就可以给本矿区的岩石或岩层确定一个级别。这个级别基本上是由岩石的物理力学性质参数所确定。

多因素的分级还是根据各单因素测值的大小来进行综合评价的，所以首先要有各单因素的判断。考虑到我国岩芯钻探部门长期沿用岩石十二级分级表，因此，在新方法中不再考虑岩石到底划为几个级别更合理的问题，而仍采用十二个级数，以避免在推广中造成混乱。

根据现有资料，划出了一个压入硬度、肖氏硬度、纵波波速、抗张强度、凿碎比功等五种性质测值的十二级表，称为单因素分级表，如表1-10-1所示。表中数值界限的划分是多因素综合评价的基础。

单因素分级表　　　　表 1-10-1

| 因素 | | 压入硬度 (kg/mm²) | 肖氏硬度 (HS) | 纵波波速 (m/s) | 抗张强度 (kg/cm²) | 凿碎比功 (kg-m/cm³) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 级别 | 1 | <10 | <10 | <1000 | <20 | <15 |
| | 2 | 10～20 | 10～20 | 1000～1200 | 20～30 | 15～20 |
| | 3 | 20～30 | 20～30 | 1200～1500 | 30～50 | 20～30 |
| | 4 | 30～50 | 30～40 | 1500～2000 | 50～70 | 30～40 |
| | 5 | 50～100 | 40～50 | 2000～2800 | 70～100 | 40～60 |
| | 6 | 100～150 | 50～60 | 2800～3800 | 100～150 | 60～80 |
| | 7 | 150～200 | 60～70 | 3800～4800 | 150～200 | 80～110 |
| | 8 | 200～300 | 70～80 | 4800～6200 | 200～280 | 110～140 |
| | 9 | 300～400 | 80～90 | 6200～7800 | 280～360 | 140～180 |
| | 10 | 400～500 | 90～100 | >7800 | 360～460 | 180～220 |
| | 11 | 500～600 | 100～110 | | 460～600 | 220～280 |
| | 12 | >600 | >110 | | >600 | >280 |

如果对岩石进行某一项物理力学性质的测定，就会发现观测值的离散程度很大，即使是同一名称的岩石或是同一岩块样，在不同部位测试，其结果也可能相差甚远。这正是以往单因素分级中的困难之处。现同时进行多项性质的测定，各个因素测值的分布范围和集中程度均不相同。对于每一种岩石必然会形成错综复杂的情况。这时，用模糊数学方法可以科学地综合评价岩石的级别。

具体的方法就是先用一个模糊关系矩阵$\underset{\sim}{R}$来表示矿区某种岩石的可钻性。

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{112} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{212} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ x_{L1} & x_{L2} & \cdots & x_{L12} \end{bmatrix}$$

这里$L$为分级时所考虑的因子数。如经逐步回归筛选后，决定采用压入硬度、肖氏硬度、纵波波速、抗张强度、凿碎比功等五种性质来分级，则$L=5$。而列数12对应于岩石十二个级别。模糊关系矩阵中每一个元素$x_{ij}$即为岩石第$i$个性质的测值应划归为第$j$级岩石的频率。它是这样求得：

$$x_{ij}=n_{ij}\Big/\sum_{j=1}^{12}n_{ij}\qquad i=1,2,\cdots,L,\quad j=1,2,\cdots,12。$$

这里$n_{ij}$为岩石第 $i$ 个性质在 $j$ 级的频数。一般在确定某种岩石的可钻性时，至少应采集十个岩样，分别测定各项测值，然后对照上述单因素分级表，看划归同一级的有多少岩样，即可求出频数，进而得出其模糊关系矩阵。

第二步则是用一个因子权数矩阵与模糊关系矩阵相乘，得出分级的结果矩阵：

$$(Z_{12}) = (M_{1L}) \cdot (R_{L12})$$

式中的因子权数矩阵是一个单行列的行向量：

$$M = [m_1, m_2, \cdots, m_L]$$

其中$m_i$表示各种岩石测值在分级中应占的权数。确定权数有一个客观标准。我们认为选择统计分析中标准回归系数$\widetilde{b_i}$作为权数是比较客观的。一来它排除了量纲不同的影响，二则说明各项性质测值在回归方程中对钻速影响的程度。在计算时，这样确定$m_i$：

$$m_i = |\widetilde{b_i}| \Big/ \sum_{j=1}^{L} |\widetilde{b_i}|, \qquad i = 1, 2, \cdots, L$$

所以，实际上分级运算是：

$$Z = [m_1, m_2, \cdots, m_L] \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots x_{112} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_{L1} & x_{L2} \cdots x_{L12} \end{bmatrix} = [Z_1, Z_2, \cdots, Z_{12}]$$

比较 $Z$ 中各元素，若$Z_q = \max$，则把岩石定为 $q$ 级。

除了给矿区每一种岩石确定级别之外，为了在现场给任一块岩样确定级别，必须有一种简易的综合评价方法。根据星座图原理，结合岩石分级的特点，提出一个多因素岩石分级图。如图1-10-1。

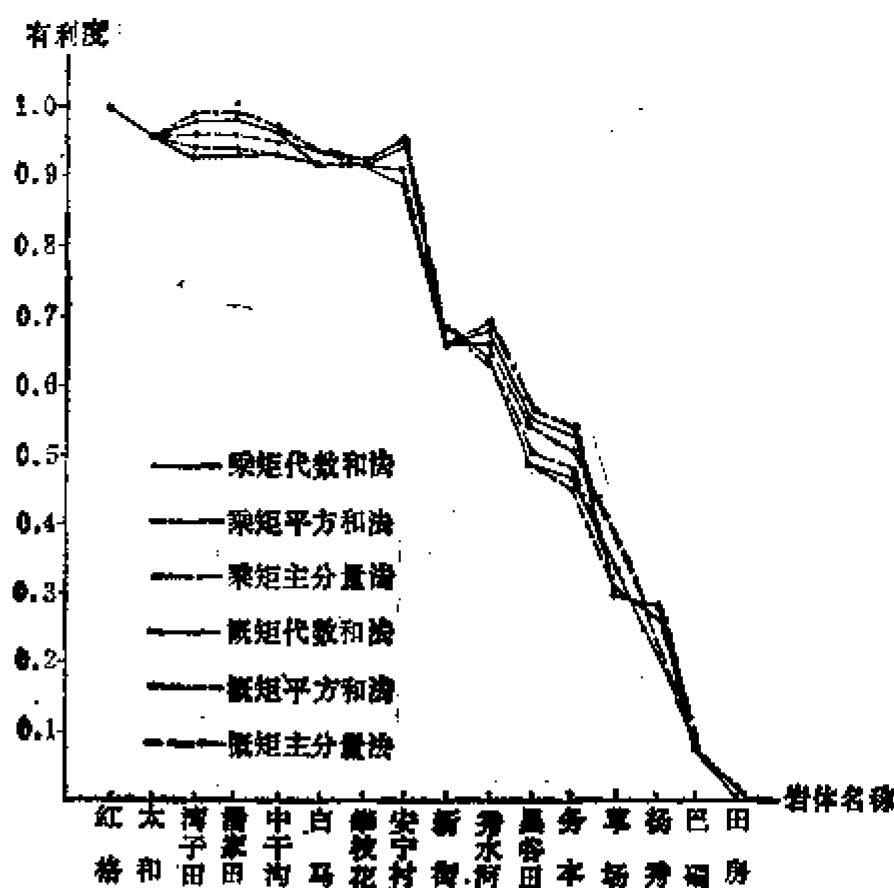



图 1-10-1　多因素岩石分级图

分级图由一个半圆构成。整个半圆等角矩地分成12个区域。每个扇形域为15°。这12个扇形域对应着12个岩石级别。每个区域的上下限都参照单因素岩石分级表中各因素的级别

值分别注明，每个区域又等角距分为10格。

拿来一块岩样，测定其各项物理力学性质，可得一组数据$x_1$，…，$x_L$，然后采用模糊数学分级方法，给$L$项性质一组权数$m_1$，…$m_L$，把透明纸铺在底图上进行分级：先划半径为一单位的半圆，使圆心及直径与底图重合，然后从圆心开始画$L$个矢量，第一个矢量的方向是从圆心到$x_1$数值刻度线的方向，矢量长度为$m_1$，如此，第$L$个矢量方向是从圆心到$x_L$刻度线的方向，长度为$m_L$。最后把这个$L$个矢量首尾相接求矢量和，而矢量终点所在区域即为岩样所定级别。

现以五因素分级为例，拿4个岩样，各项测值如表1-10-2。

单因素分级表　　　　表 1-10-2

| 岩样号 | 压入硬度$x_1$ | 肖氏硬度$x_2$ | 纵波波速$x_3$ | 抗张强度$x_4$ | 凿碎比功$x_5$ | 岩石级别 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 72 | 137.20 | 46.75 | 4733 | 122 | 80.14 | 7级 |
| 60 | 43.51 | 22.10 | 4093 | 52 | 58.24 | 5级 |
| 99 | 35.37 | 25.80 | 3368 | 12 | 62.81 | 4级 |
| 1 | 224.62 | 76.75 | 4147 | 212 | 108.56 | 8级 |

现用分级图分级如图1-10-2所示。

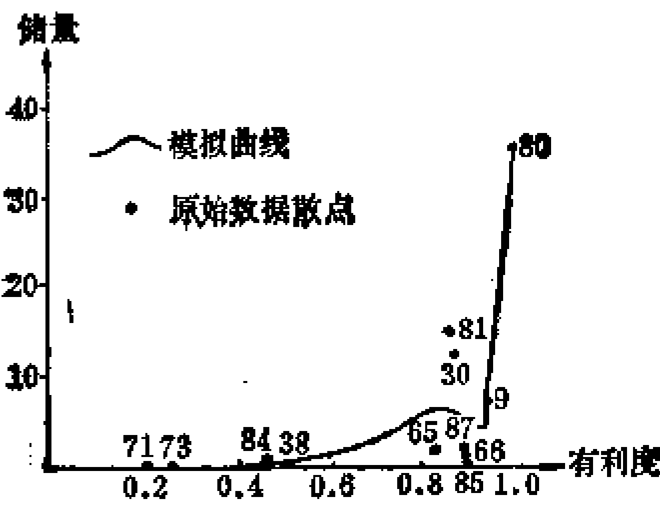



图 1-10-2 分级图分级示意图

应用上述方法对某煤田矿区的岩石进行了近两千个数据的测试，并分级如表1-10-3所示。

原估与现定级别对比表　　　　表 1-10-3

| 岩石名称 | 硅质灰岩 | 硅质泥岩 | 粉砂岩 | 中细粉砂岩 | 细砂岩 | 泥灰岩 | 泥质灰岩 | 菱铁质灰岩 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 原估级别 | 7~9 | 5 | 5 | 7-8 | × | 5-7 | × | × |
| 现定级别 | 8 | 7 | 5 | 8 | 7 | 6 | 4 | 7 |

原估级别是勘探管理部门对矿区岩石可钻性级别的一种定性估计。主要是根据机械钻速的数据和长期实际生产情况得出的一个定性概念，它实际上是一种人脑对客观事物进行模糊综合评价的结果。我们采用模糊数学方法使这种定性估计变换成定量化的判定，只需

要短期测试一定数据，就可得出一个既较准确又有客观依据的结果。

本例的统计分析及分级运算均在电子计算机上进行。

图1-10-3是电算过程的示意框图。程序从略。

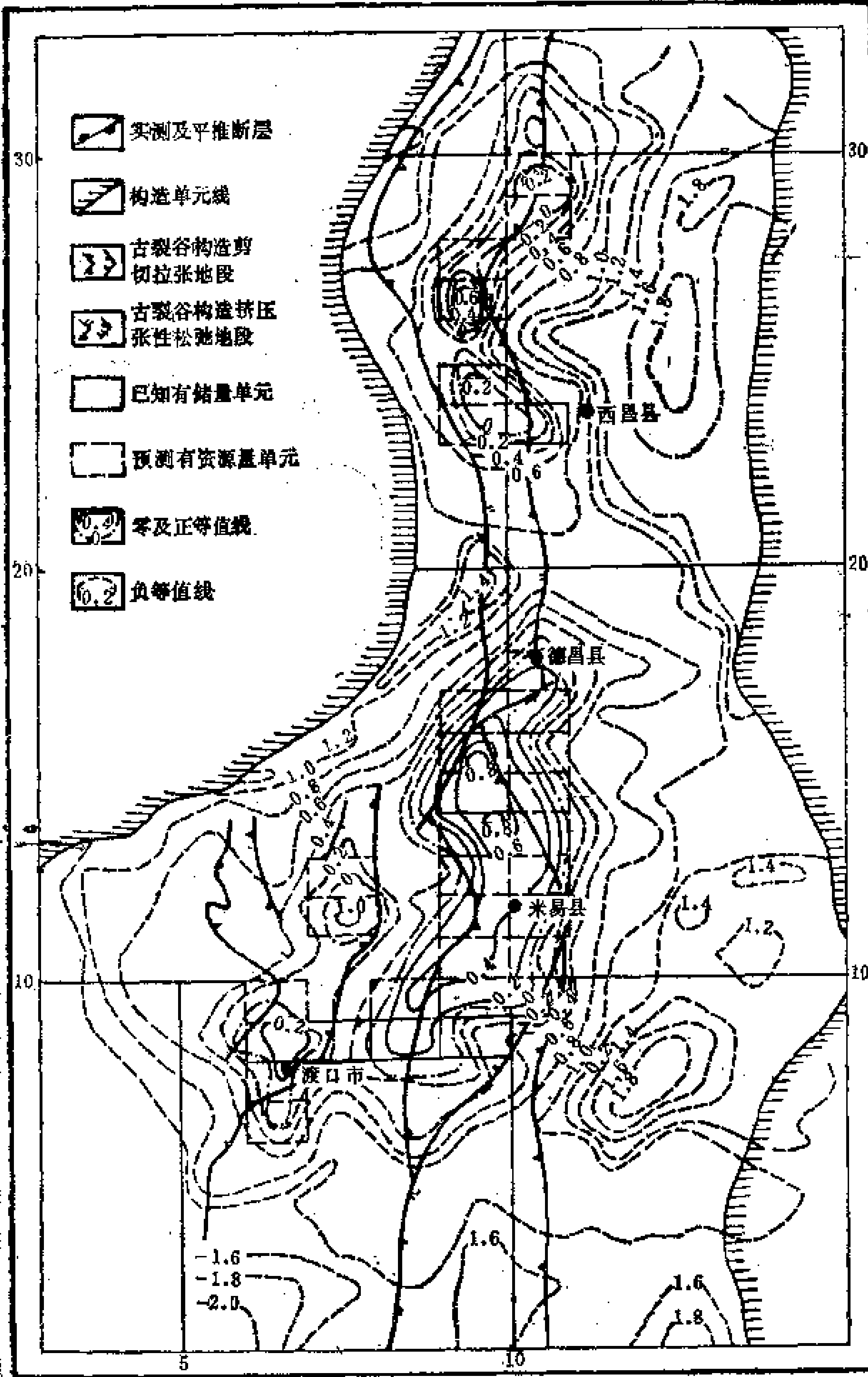



图 1-10-3 电算过程示意框图

# 第二章

## 模糊数学在采矿科学技术中的应用

采矿科学技术是一门综合性的工程科学技术学科。由于地质采矿技术条件的复杂多变，无论是采矿理论研究或是矿山设计、建设与生产都受到复杂的多因素的影响，难以建立反映客观实际的数学模型；矿山建设与生产的决策目标往往是多目标的，且受经验评价和主观评价的影响极大；很多复杂的采矿生产过程，由于具有非线性和时变的特性以及状态、参数量测的不确定性和不精确性，致使采矿生产中存在着许多典型的随机性、模糊性问题。模糊数学在采矿科学中的初步应用表明：应用模糊集合理论在采矿科学技术中所建立的模糊数学模型能较合理地深刻地揭示客观现象的本质和规律性；对多因素、多目标的综合决策用模糊数学能作出较准确可靠的定量化判定；对生产工艺过程，利用模糊逻辑、似然推理、模糊控制器能实行优化控制；对凿岩、爆破技术、井巷工程、地下采场稳定性、露天边坡稳定性，利用模糊统计、集值统计、建立模糊数学模型能进行综合评价；对矿山基建投资经济效果，可以建立多因素、多层次、多算子的模糊数学模型进行综合评价等等。总之，模糊数学在具有广泛工程经验的采矿科学技术中有巨大的发展潜力和前景，这将是一个崭新的领域。

### §2-1　模糊数学在岩石坚固性分级中的应用[18]

1985年，杨瑞林运用模糊数学方法，把岩石的凿岩爆破坚固性的优劣看作是岩石的凿岩爆破坚固性这一论域U上的模糊子集$\underset{\sim}{A}$，构造了一个多元隶属函数，提出了一种模糊数学模型的分级方法，从而能对每种岩石的凿岩爆破坚固性程度作出定量化判定，这在采矿科学技术中是有现实意义的。

#### 一、多元隶属函数的构造

岩石的凿岩爆破坚固性分类是采矿科学技术中的重要问题之一，它直接地和深刻地影响矿山设计、矿山生产和矿山研究。由于受到多因素的影响，岩石坚固性似乎是未肯定的，即岩石坚固性本身是很模糊的。把岩石的凿岩爆破坚固性的优劣看作是岩石的凿岩爆破坚固性这一论域U上的模糊子集$\underset{\sim}{A}$，构造其隶属函数。

根据实践经验，将所有岩石按其凿岩爆破坚固性程度分为五级。选定$n_1$种较典型的很坚固的岩石；$n_2$种较典型的坚固的岩石；$n_3$种较典型的中等坚固的岩石；$n_4$种较典型的不坚固的岩石；$n_5$种较典型的很不坚固的岩石。对每种岩石都测定$p$项凿岩爆破坚固性指标。对第$i$种岩石的测定数据记成$p$维向量：

$$(x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots,\ x_{ip}),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n=\sum_{i=1}^{5} n_i$$

对下面的普通集合：

$A=\{u|u$为较典型的很坚固的岩石的凿岩爆破坚固性$\}$

$B=\{u|u$为较典型的坚固的岩石的凿岩爆破坚固性$\}$

$C=\{u|u$为较典型的中等坚固的岩石的凿岩爆破坚固性$\}$

$D=\{u|u$为较典型的不坚固的岩石的凿岩爆破坚固性$\}$

$E=\{u|u$为较典型的很不坚固的岩石的凿岩爆破坚固性$\}$

作映射：

$f(A)\to 1$；$f(B)\to 0.5$；$f(C)\to 0$；$f(D)\to -0.5$；$f(E)\to -1$。记，

$$Y_{n\times 1}\triangleq\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ 0.5\\ \vdots\\ 0.5\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ -0.5\\ \vdots\\ -0.5\\ -1\\ \vdots\\ -1\end{bmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n_1\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n_2\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n_3\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n_4\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\}n_5\end{matrix};\qquad \beta_{p\times 1}\triangleq\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_p\end{bmatrix};$$

$$X_{n\times p}\triangleq\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{np}\end{bmatrix},\qquad \varepsilon_{n\times 1}\triangleq\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}$$

欲求$f$的表达式，考虑以下线性模型

$$y_i=\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\cdots+\beta_px_{ip}+\varepsilon_i,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或简写成：

$$Y=X\beta+\varepsilon$$

根据最小二乘原理，在$\mathrm{rank}(X',\ X)=p+1$的条件下，待定参数向量$\beta$的最小二乘估计为：

$$\hat{\beta}=(X',\ X)^{-1}X'Y$$

当$\mathrm{rank}(X'X)<p+1$时，取

$$\hat{\beta}=(X'X)^{+}X'Y$$

求出$\hat{\beta}$后，按标准正态概率分布函数形状构造多元隶属函数。

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u(x_1,\ x_2,\cdots x_p))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\hat{y}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

其中：$Y=\sum_{i=1}^{p}\beta_i X_i$；$a y$依具体情况而定的常数；$\beta_i$为$\hat{\beta}$的第 $i$ 个分量。

最后，我们取四个阈值（$\lambda_1=0.90$，$\lambda_2=0.70$，$\lambda_3=0.40$，$\lambda_4=0.20$），把表示岩石凿岩爆破坚固性优劣的模糊子集$\underset{\sim}{A}$，截成五个普通集合：

$$A^*=\{u|\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant 0.90\}$$
$$B^*=\{u|0.7\leqslant \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)<0.90\}$$
$$C^*=\{u|0.4\leqslant \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)<0.70\}$$
$$D^*=\{u|0.2\leqslant \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)<0.40\};$$
$$E^*=\{u|\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)<0.2\}$$

从而就把岩石的凿岩爆破坚固性的优劣分成$A^*$，$B^*$，$C^*$，$D^*$，$E^*$五个等级，这样，就可以根据隶属度$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$对每种岩石的凿岩爆破坚固程度作出评价。

## 二、应 用 结 果

采用$n$种矿岩的凿岩爆破坚固性指标表（见附表2-1-1），用上述方法，求$\underset{\sim}{A}$的隶属函数。

**几种矿岩的凿岩爆破坚固性指标** 表 2-1-1

| 编号 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 矿岩的凿岩爆破坚固性指标 | | 条带浸染状矿石 | 角砾状矿石 | 贫条带透镜编状矿石 | 贫条带透镜编状矿石（富含磷灰石） | 贫条带透编状矿石（富含霓石） | 粗粒块状矿石 | 粗粒块状矿石混有条带的透镜编状矿石 | 上接触带岩石 | 粗粒霞石正长岩 | 富含磷灰石的霓霞—磷霞岩 | 霓霞—磷霞岩 |
| 凿岩速度$C_{X\bar{A}}^{23}$(cm/m) $d=42$mm | | 18.5 | 22.0 | 18.7 | 22.6 | 18.5 | 22.2 | 21.6 | 11.1 | 10.4 | 18.3 | 13.6 |
| 钎刃磨损率(μm/m) | | 6.9 | 7.2 | 10.8 | 11.4 | 14.1 | 9.4 | 12.3 | 40.8 | 31.7 | 17.5 | 17.8 |
| 炸药体积单耗$q_{BD}$ (kg/m³) | | 3.65 | 2.80 | 4.88 | 3.95 | 4.20 | 3.90 | 4.60 | 4.28 | 4.53 | 4.20 | 5.70 |
| 炸药面积单耗(g/m²) | | 15.0 | 13.9 | 23.6 | 16.6 | 25.3 | 21.5 | 23.6 | 25.0 | 28.6 | 23.1 | 27.5 |
| 炮眼利用率 | | 0.920 | 0.930 | 0.760 | 0.977 | 0.870 | 0.910 | 0.770 | 0.825 | 0.790 | 0.910 | 0.675 |
| 不规则试件的抗裂强度 (kg/m²) | | 69 | 66 | 114 | 107 | 111 | 113 | 113 | 167 | 145 | 81 | 129 |
| 磨蚀性(mg) | | 11.8 | 6.1 | 8.3 | 18.1 | 15.1 | 10.4 | 26.5 | 43.8 | 55.4 | 40.0 | 46.1 |
| 捣碎法 | 40g样品中0.5mm筛下体积(mm³) | 18.1 | 27.0 | 19.4 | 20.2 | 15.2 | 16.7 | 16.7 | 6.4 | 5.7 | 11.4 | 14.4 |
| | 160g样品中0.5mm筛下所占百分率% | 24.0 | 37.8 | 14.7 | 13.1 | 15.2 | 15.6 | 15.6 | 3.8 | 3.4 | 9.7 | 8.7 |
| 压碎法 | 样品中在7mm筛下的% | 31.27 | 39.10 | 20.27 | 24.06 | 26.11 | 29.50 | 29.50 | 12.12 | 7.97 | 25.73 | 21.26 |
| | 样品中在0.25～3mm筛下的% | 11.07 | 16.05 | 8.43 | 11.02 | 12.01 | 14.04 | 14.04 | 4.43 | 2.99 | 11.33 | 8.49 |

首先，将表中所给的几种矿岩，按凿岩速度、炸药单耗等几个主要指标分为五级，取8号、9号和11号岩石为很坚固的；3号岩石为坚固的；取1号、5号和10号岩石为中等坚固的；7号岩石为不坚固的；取2号、4号、6号岩石为很不坚固的。然后使表中所列的11项凿岩爆破坚固性指标，从左到右依次对应于$x_1$，$x_2$，$x_3$，$\cdots x_{11}$，取$a=1.1$，则求得

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_{11}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1.1y}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

其中：$y=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i=-0.1306x_1+0.0452x_2+1.6419x_3-0.0827x_4$

$$+1.1166x_5-0.0158x_6-0.0328x_7-0.1648x_8$$

$$+0.1195x_9-0.0827x_{10}+0.0924x_{11}$$

这样，任给一种岩石，只要测出相应指标代入上式，就可以对其坚固程度作出评价。

例如，将表（2-1-1）中3号岩石的坚固性指标代入上式，可以求得$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=0.7088$，由前面的岩石凿岩爆破坚固性等级划分，它应属于坚固的。对于表中其他岩石作同样的计算，可以看出：所得的分级结果与我们事先所作的分级是一致的。

欲提高分级的准确性，需要合理地构造隶属函数和恰当地选取岩石坚固性指标，这里只是提出一种方法。最后构造隶属函数所依据的经验，其岩石种类还不够充分，而且构造隶属函数时，所选取的线性模型也存在一定缺陷，这些都有待继续探讨。

## §2-2　石灰岩矿爆破效果的模糊综合评判[19]

1985年，吴恒金应用模糊综合评判的数学方法，对石灰岩矿的爆破效果进行综合评价，得出了定量化的爆破效果级别，指明了改善爆破效果的方向。为复杂的凿岩爆破过程作出科学的定量化的评价进行了初步尝试。

爆破作业的好坏不仅直接影响矿山的经济效益，而且直接影响采装、运输及破碎工作。所以，努力改善爆破效果是非常必要的。但是，直到现在，我们对爆破效果还只能进行一些定性的评价。而爆破效果的好坏既是一个模糊概念，又是由多种因素决定的，只有对各种因素加以综合评价，使其“定量化”，才能得出合理的结论。因此，我们用模糊综合评判的方法来评价石灰岩矿的爆破效果。

### 一、模糊综合评判的数学方法

对爆破效果的好坏起决定作用的因素是：爆破成本、大块率、爆破震动以及爆堆形态。所以，爆破效果的因素集可归纳为：

$$U=\{爆破成本，大块率，爆破震动，爆堆形态\}$$

$$=\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\} \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

对于爆破效果只分为好与不好两个等级具有模糊性，为了把爆破效果评价得更合理一些，将爆破效果评价分为四个等级，即评价集为：

$$V=\{很好，好，一般，不好\}$$

$$=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\} \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

显然，影响爆破果的因素集中的任一因素（或称指标），属于好与差的程度构成一个模糊集合，其隶属函数取值于[0，1]区间。根据隶属度的大小，规定：

$$\left.\begin{array}{ll}\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant 0.9 & \text{很好}\\ 0.9>\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant 0.7 & \text{好}\\ 0.7>\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant 0.5 & \text{一般}\\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)<0.5 & \text{不好}\end{array}\right\} \quad (2\text{-}2\text{-}3)$$

一个矿山在一定时期内爆破$N$次，取$N$次爆破的统计指标，并对每一个指标用下面给出的求隶属函数的公式定出单因素评价结果。于是单因素评价矩阵$R$中的元素$r_{ij}$就是第$i$个因子中属于第$j$个评价的爆破次数占爆破总数的百分率。例如，在10次爆破中，爆破成本这一指标的隶属度有二次$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)\geqslant 0.9$，则$r_{11}=2/10=0.2$。因此，设第$i$个因素的单因素评价为$\underset{\sim}{R}_i=(r_{i1},\ \cdots,\ r_{im})$，它可以看作$U$的Fuzzy子集，$r_{ik}$表示第$i$个因素的评价对于第$k$个等级的隶属度，从而可建立$N$次爆破的单因素综合评判矩阵，即

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{R}_1\\ \underset{\sim}{R}_2\\ \underset{\sim}{R}_3\\ \underset{\sim}{R}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34}\\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44}\end{bmatrix}=(r_{ij})_{4\times 4} \quad (2\text{-}2\text{-}4)$$

加权评审（权系数矩阵）：在爆破效果的因素集中，有的因素占据较主要的地位，有的次之。人们对于各因素总应有一个统一的权衡，应用统计实验或专家评分等方法，可以建立各因素之间的权重分配。一般将权系数矩阵记为：

$$\underset{\sim}{M}=(m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4);\quad m_i\geqslant 0\text{且}\sum_{i=1}^{4}m_i=1 \quad (2\text{-}2\text{-}5)$$

应用Fuzzy矩阵的复合运算，可得到爆破效果的Fuzzy综合评判矩阵为：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{M}\circ\underset{\sim}{R}=[m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4]\circ\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34}\\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44}\end{bmatrix}$$

$$=[b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4] \quad (2\text{-}2\text{-}6)$$

式中：“$\circ$”为max-min复合运算；

$$b_i=\bigvee_{i=1}^{4}(m_i\wedge r_{ij}) \quad (2\text{-}2\text{-}7)$$

对$\underset{\sim}{B}$进行归一化处理，得

$$\underset{\sim}{B}'=\left(\frac{b_1}{b}\ \ \frac{b_2}{b}\ \ \frac{b_3}{b}\ \ \frac{b_4}{b}\right)=(b_1',\ b_2',\ b_3',\ b_4') \quad (2\text{-}2\text{-}8)$$

由评判矩阵$\underset{\sim}{B}'$中的$b_1'$，$b_2'$，$b_3'$，$b_4'$的大小即可看出爆破效果的好坏程度。

评语是属模糊性的，为了“让数据说话”，必须对评语进行定量化处理。常用办法是各个等级实行记分制，如“5分制”或“100分制”。现按100分制，定量化地评价爆破效果等级如表2-2-1。

**爆破效果等级标准表** 表 2-2-1

| 爆破效果等级 | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ |
|---|---|---|---|---|
| 评价描述<br>评　分 | 很　好<br>$C_Ⅰ=100\sim90$ | 好<br>$C_Ⅱ=89\text{-}75$ | 一　般<br>$C_Ⅲ=74\sim60$ | 不　好<br>$C_Ⅳ=59\text{-}40$ |

爆破效果综合评价评分的计算公式为

$$W=\underset{\sim}{B}'\circ C^T=[b_1',b_2',b_3',b_4']\circ\begin{bmatrix}C_Ⅰ\\C_Ⅱ\\C_Ⅲ\\C_Ⅳ\end{bmatrix} \tag{2-2-9}$$

## 二、隶属函数的确定

模糊综合评判的关键是确定隶属函数。隶属函数确定得合理与否对综合评判的结果影响很大。它主要是根据统计或经验而定。虽然，对同一问题可能定出不同的隶属函数，但用Fuzzy统计试验可以证明：隶属频率是有稳定性的。

对石灰岩矿来说，矿山的爆破成本为0.5～0.7元/吨左右。若爆破成本每吨低于0.5元，则认为是很好的；若每吨矿石的爆破成本高于0.7元，则认为是不好的，因此，爆破成本的隶属函数拟定为：

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(u_1)=\begin{cases}1, & u_1\leqslant0.5\\ [1+0.4(10u_1-5)^2]^{-1}, & u_1>0.5\end{cases} \tag{2-2-10}$$

对于大块率一般要求控制在3～5%左右。若大块率小于3%，则认为是很好的，若大块率高于5%，则认为是不合理的。因此，大块率的隶属函数拟定为：

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(u_2)=\begin{cases}1, & u_2\leqslant3\%\\ [1+0.4(100u_2-3)^2]^{-1}, & u_2>3\%\end{cases} \tag{2-2-11}$$

对爆破震动来说，一般以靠近建筑物处的震动速度作为评价指标。对民用建筑来说，根据国内外规定，爆破震动速度$u_3\leqslant$1cm/s时，建筑物不会破坏；若震动速度$u_3>$2cm/s时，建筑物会受到一定程度的破坏。因此，对一般民用建筑来说，隶属函数拟定为：

$$\mu_{\underset{\sim}{V}}(u_3)=\begin{cases}1, & u_3\leqslant1\\ [1+0.6(u_3-1)^2]^{-1}, & u_3>1\end{cases} \tag{2-2-12}$$

若建筑物为砖混结构，则爆破震动速度的隶属函数拟定为：

$$\mu_{\underset{\sim}{V'}}(u_3)=\begin{cases}1, & u_3\leqslant1.5\\ [1+1.6(u_3-1.5)^2]^{-1}, & u_3>1.5\end{cases} \tag{2-2-13}$$

爆堆形态的隶属度可直接根据经验确定。

## 三、实　际　应　用

某石灰岩矿1983年共爆破10次。10次爆破的统计指标列于表2-2-2。由于该矿附近无建筑物存在，故未作爆破震动指标的统计。

对表2-2-2中爆破指标统计用（2-2-10）式与（2-2-11）式计算，可得到每次爆破成

某石灰岩矿爆破指标统计和隶属度及评价表　　表 2-2-2

| 爆破次序 | 爆破成本$u_1$ (元/吨) | 大块率$u_2$ (%) | 爆破成本 $u_1$ | | 大块率 $u_2$ | | 爆堆形态$u_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 隶属度 | 评价 | 隶属度 | 评价 | |
| 第1次 | 0.58 | 4.2 | 0.796 | 好 | 0.635 | 一般 | 好 |
| 第2次 | 0.58 | 4.1 | 0.796 | 好 | 0.674 | 一般 | 好 |
| 第3次 | 0.62 | 3.5 | 0.635 | 一般 | 0.909 | 很好 | 一般 |
| 第4次 | 0.64 | 3.8 | 0.561 | 一般 | 0.796 | 好 | 好 |
| 第5次 | 0.63 | 4.0 | 0.579 | 一般 | 0.712 | 好 | 一般 |
| 第6次 | 0.68 | 4.1 | 0.436 | 不好 | 0.674 | 一般 | 一般 |
| 第7次 | 0.66 | 4.6 | 0.494 | 不好 | 0.494 | 不好 | 不好 |
| 第8次 | 0.64 | 4.2 | 0.561 | 一般 | 0.635 | 一般 | 一般 |
| 第9次 | 0.58 | 4.1 | 0.796 | 好 | 0.674 | 一般 | 好 |
| 第10次 | 0.55 | 3.8 | 0.909 | 很好 | 0.796 | 好 | 好 |

本和大块率的隶属度。然后根据（2-2-3）式，对爆破成本、大块率和爆堆形态作出单因素评价，也列入表（2-2-2）中。

由表（2-2-2）可得单因素评判矩阵为：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2\\0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1\\0 & 0.5 & 0.4 & 0.1\end{bmatrix}$$

根据该矿实际情况，取权数分配为：

$$\underset{\sim}{M}=[0.4,\ 0.4,\ 0.2]$$

根据（2-2-6）式，可得模糊综合评判矩阵为：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{M}\circ\underset{\sim}{R}=[0.4,\ 0.4,\ 0.2]\circ\begin{bmatrix}0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.2\\0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1\\0 & 0.5 & 0.4 & 0.1\end{bmatrix}=[0.1,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.2]$$

根据（2-2-9）式，爆破效果综合评价的评分为：

$$W_{均}=\underset{\sim}{B}'\circ C^T=[0.1,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.2]\circ\begin{bmatrix}95\\82\\67\\49\end{bmatrix}=70.7分$$

$W_{高}$为78.1分，$W_{低}$为63.5分。

由模糊综合评判矩阵$\underset{\sim}{B}$的结果可知：该矿爆破效果属于很好的占10%，好的占30%，一般的占40%，不好的占20%。从爆破效果综合评价的评分来看：$W_{均}$为70.7分，$W_{高}$=78.1分，$W_{低}$为62.5分。可见综合评价等级应为Ⅲ级稍偏Ⅱ级，即一般稍偏好。造成该矿爆破效果不理想的主要原因是大块率偏高，今后应着重降低大块率，以进一步改善爆破效果。

## §2-3　岩体工程分类的模糊数学方法[20]

1983年，陶振宇、彭祖赠利用模式识别和综合评判中的Fuzzy数学方法对岩体工程分类提出了一个新方法。这种新的分类方法是把岩石参数分为间隔指标和名义指标，考虑

到岩体物理力学参数的不确定性而基于模糊数学的概念得到的。新的分类方法能科学地、定量化地综合评价岩体工程分类的类型；给出的应用实例验证了判定的正确性，比过去的分类法更为符合客观实际。这对岩石力学的深入研究是有重要意义的。

在岩石力学的研究中，岩体的工程分类是岩石力学的基本问题之一，岩体的分类准则受到人们的普遍重视。许多研究者在这方面作过大量的工作，提出了许多分类方法，其中有三个分类获得了广泛的应用，它们是，Wichham等人（1972)的岩体结构分类(RSR)，Bieniawski（1973）的地力学分类和Barton等人（1974）的Q系统分类。陶振宇、彭祖赠认为：可以根据模糊数学的概念未考虑岩体工程分类问题。提出了用模式识别和综合评判中的模糊数学方法对岩体工程分类的新方法。

为什么必须而且可以把模糊数学方法应用到岩体的工程分类中来呢？因为，岩体工程中的分类准则包括三个相互联系的重要组成部分：首先，岩体工程分类究竟应考虑哪些最基本的因素？其次，这些因素用什么参数来具体反映在分类上？最后，如何进行综合评价？对于前两个问题，虽然人们考虑的有所差别，但却有不少的共同点。例如，大多数分类考虑了岩石的单轴抗压强度、岩石的不连续性，地下水情况等等。但是重要的是如何作出符合实际的综合评价。特别是岩石试验测定的各项力学指标值离散性很大，在一定意义上，这种不确定性正是它本身的属性。而且每项指标的相对重要性（即权重）也存在很大的不确定性。这两种不确定性都是模糊性的。因此，在岩体分类的综合评价时，这种不确定性（即模糊性）是必须考虑的重要特性之一。至于所谓岩石是好的、坏的，这些概念也是不确定的，是模糊的。这一些模糊概念正好是当今新兴的数学方法——模糊数学的研究对象。因此，可以预言，模糊数学方法必将在岩体工程分类中起极为重要的作用。

## 一、岩体工程分类中的单因素评价

任何岩体分类，都是以单因素评价为基础的，例如，单轴抗压强度、RQD值、纵波速度等，这些都是可以由实际调查和测试得到的。这些因素也许可多一些或少一些，但它们基本上可分为两大类：第一类岩体参数可以通过某区间$[a, b]$的实数来表示，可以叫做间隔指标，例如单轴抗压强度、纵波速度、RQD值、节理间距、平面裂隙率和吕容系数等；第二类岩体参数叫做名义指标，它的等级只能定性地确定，例如节理状态、地下水状态、节理走向与倾角有利与否，以及岩体自身稳定情况等等。

将岩体分为优等的、好的、中等、差的和很差的五类。由于这些概念的Fuzzy性，对于间隔指标的情况，它们对应$[a, b]$上五个Fuzzy集，并以Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ表示之。从每一类中选择典型的样品进行综合评价，得出综合评价的隶属函数图象（如图2-3-1所示）。从图象可以直接写出各个隶属函数的数学表达式。

对于名义指标，建议如表2-3-1所示的分类：

对于工程的实际岩体，可以根据工程地质和岩石力学试验所获得的资料整理成Fuzzy集。例如，取出若干岩芯，测定单轴抗压强度的数值介于$a$和$b$之间，其对应Fuzzy子集为$\underset{\sim}{A}$。在区间$[a, b]$中插入$n-1$个分点：$a=a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$，将$[a, b]$等分为$n$个小区间。又设抗压强度在$[a_{i-1}, a_i]$内共有$m_i$个试件，$m=\max\{m_i\}$。令

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}\right)=\frac{m_i}{m} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

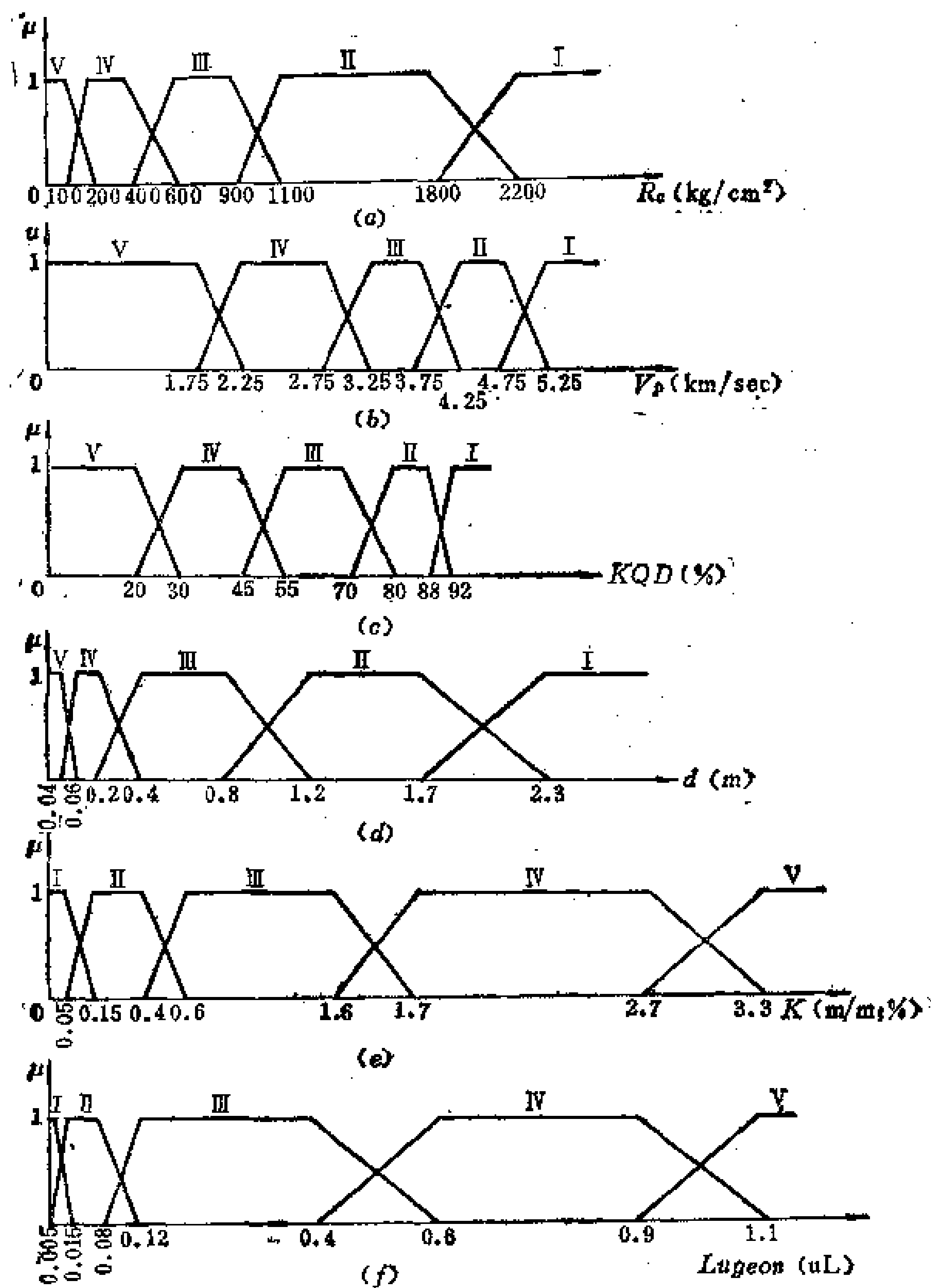



图 2-3-1 间隔指标的Fuzzy集

(a)—抗压强度($R_c$);(b)—纵波速度($V_p$);(c)—RQD;(d)—节理间距;(e)—平面裂隙率($K$);(f)—吕容系数(uL)

**名义指标的情况**　　　　表 2-3-1

| 类　　别 | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| 节理状态 | 节理紧密壁面新鲜 | 节理闭合，壁面轻微蚀变 | 节理壁面蚀变 | 节理壁面严重蚀变 | 节理夹泥 |
| 地下水 | 完全干燥 | 稍　湿 | 湿　的 | 渗　漏 | 股　流 |
| 节理走向与倾角的情况 | 很有利 | 有　利 | 一　般 | 不　利 | 很不利 |
| 岩体自稳情况 | 长期稳定 | 稳　定 | 自稳时间很短 | 不稳定 | 很不稳定 |

当$X \neq a_{j-1}+a_j/2$时，用线性内插方式，从而获得映射$\mu_A:[a,\ b]\to[0,\ 1]$，这里$\mu_{\underset{\sim}{A}}$为$\underset{\sim}{A}$的隶属函数。同样，可以获得岩石其他间隔指标所对应的Fuzzy集的隶属函数。

对于名义指标，其值只取有限个不同的状态。同样地，经过实际测量可以获得这有限个状态上的Fuzzy集。例如地下水，设其对应的Fuzzy子集为$\underset{\sim}{B}$。调查了12处，10处是湿的，一处是稍湿的，一处有渗漏。由此获得Fuzzy子集$\underset{\sim}{B}$为

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.1}{\mathrm{II}}+\frac{1.0}{\mathrm{III}}+\frac{0.1}{\mathrm{IV}}。$$

## 二、模式识别和综合评判中的Fuzzy数学方法

在模糊数学中，贴近原则被广泛地运用于模式识别。

设$X$是论域，$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$是$X$上的Fuzzy子集，$\mu_{\underset{\sim}{A}}$，$\mu_{\underset{\sim}{B}}$分别是它们的隶属函数。令

$$\overline{\mu}_{\underset{\sim}{A}}=\bigvee_{x\in X}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\quad \underline{\mu}_{\underset{\sim}{A}}=\bigwedge_{x\in X}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

$\overline{\mu}_{\underset{\sim}{A}}$，$\underline{\mu}_{\underset{\sim}{A}}$分别为$\underset{\sim}{A}$的上模与下模。令

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}\triangleq\bigvee_{x\in X}[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}}\triangleq\bigwedge_{x\in X}[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]$$

它们分别称为$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$的内积与外积。考虑关系式：

$$d_{(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})}=1-(\overline{\mu}_{\underset{\sim}{A}}-\underline{\mu}_{\underset{\sim}{A}})+(\mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}-\mu_{\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}})$$

$d(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})$被称为Fuzzy子集$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$之间的贴近度。

设论域$X$已被划分为$n$类，每一类对应$X$上的一个Fuzzy子集，用$\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，…，$\underset{\sim}{A}_n$来表示。现有一个对象被表示为$X$上的Fuzzy子集$\underset{\sim}{B}$，这个对象属于哪一类的问题，即为模式识别问题。

在模式识别中的贴近原则是：若存在$K$使得

$$d(\underset{\sim}{A}_k,\ \underset{\sim}{B})=\max_{1\leq i\leq n}\{d(\underset{\sim}{A}_i,\ \underset{\sim}{B})\}$$

则称$\underset{\sim}{B}$属于第$K$类。

在这里，$\underset{\sim}{B}$属于何类被定义为$\{\underset{\sim}{A}_1,\ \underset{\sim}{A}_2,\ \cdots。\underset{\sim}{A}_n\}$上的Fuzzy子集，以及$\underset{\sim}{B}$对$\underset{\sim}{A}_k$的隶属度均由$d(\underset{\sim}{A}_k,\ \underset{\sim}{B})$或$\bigvee_{i=1}^{k}d(\underset{\sim}{A}_i,\ \underset{\sim}{B})$确定（见实例）。

关于综合评价，这里涉及一种特殊的情况：

假设$\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m\}$是评价因素集，就评价对象$b$而言，第$K$个评价因素对应$X$上的Fuzzy集$\underset{\sim}{B}_k$（$K=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）。首先作单因素评价，令

$$X_{jk}=d(\underset{\sim}{A}_i,\ \underset{\sim}{B}_k)\qquad 或令$$

$$X_{jk}=\bigvee_{i=1}^{j}d(\underset{\sim}{A}_i,\ \underset{\sim}{B}_k)\qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ K=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

按单因素评价结果，我们可获得$\{\underset{\sim}{A}_1,\ \underset{\sim}{A}_2,\ \cdots,\ \underset{\sim}{A}_m\}$，上的Fuzzy子集：

$$\underset{\sim}{B}_k=\frac{X_{1k}}{\underset{\sim}{A}_1}+\frac{X_{2k}}{\underset{\sim}{A}_2}+\cdots+\frac{X_{nk}}{\underset{\sim}{A}_n}\qquad (K=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

给定$L$组权数：$W_{l1}$，$W_{l2}$，…，$W_{lm}$，　　（$l=1,\ 2,\ \cdots,\ L$）。

其中$W_{lk}$表示评价因素$b_k(K=1, 2, \cdots, m)$在此综合评价中所占的比重，且满足：$\sum_{k=1}^{m} W_{lk}=1$，$(l=1, 2, \cdots, L)$。由于人们对事物的认识将随着不同条件和不同场合而有差异，这样的权数不应该是唯一的。因此，随着条件和场合的不同我们应拟定多组权数。设

$$Y_{lj}=\sum_{k=1}^{m} W_{lk} X_{jk} \quad (l=1, 2, \cdots, L), \ (j=1, 2, \cdots, n)。$$

且令：

$$y_{j\min}=\bigwedge_{l=1}^{L} y_{lj}, \quad y_{j\max}=\bigvee_{l=1}^{L} y_{lj} \qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

则

$$\underset{\sim}{B}=\frac{[Y_{1\min}, Y_{1\max}]}{\underset{\sim}{A}_1}+\frac{[Y_{2\min}, Y_{2\max}]}{\underset{\sim}{A}_2}+\cdots+\frac{[Y_{n\min}, Y_{n\max}]}{\underset{\sim}{A}_n}$$

$\underset{\sim}{B}$就是$\underset{\sim}{B}_1$，$\underset{\sim}{B}_2$，…，$\underset{\sim}{B}_n$在$L$组权数上的综合评价。在这个式子里元素$\underset{\sim}{A}_j$的隶属度是区间数$[Y_{j\min}, Y_{j\max}]$。

## 三、实　例

根据我国某工程的石灰岩和泥灰岩的有关数据，拟定一个计算实例，用以说明计算方法。

根据石灰岩和泥灰岩的有关数据，我们给出各项指标所对应的Fuzzy子集如图2-3-2所示。这里石灰岩表示在图2-3-2（$a$）中，而泥灰岩表示在图2-3-2（$b$）中。

由上面给出的贴近度计算公式，我们获得单因素评价结果列入表2-3-2中，其中名义指标栏内的结果是由直接测量获得的。

我们可以这样来理解。就第$K$因素而言，如果某岩石属于"很好的"和"好的"的隶属度分别为$X_{1k}$和$X_{2k}$，则必有$X_{2k} \geqslant X_{k}$。在表2-3-3中的数据是由表2-3-2中的数字按下式计算的。

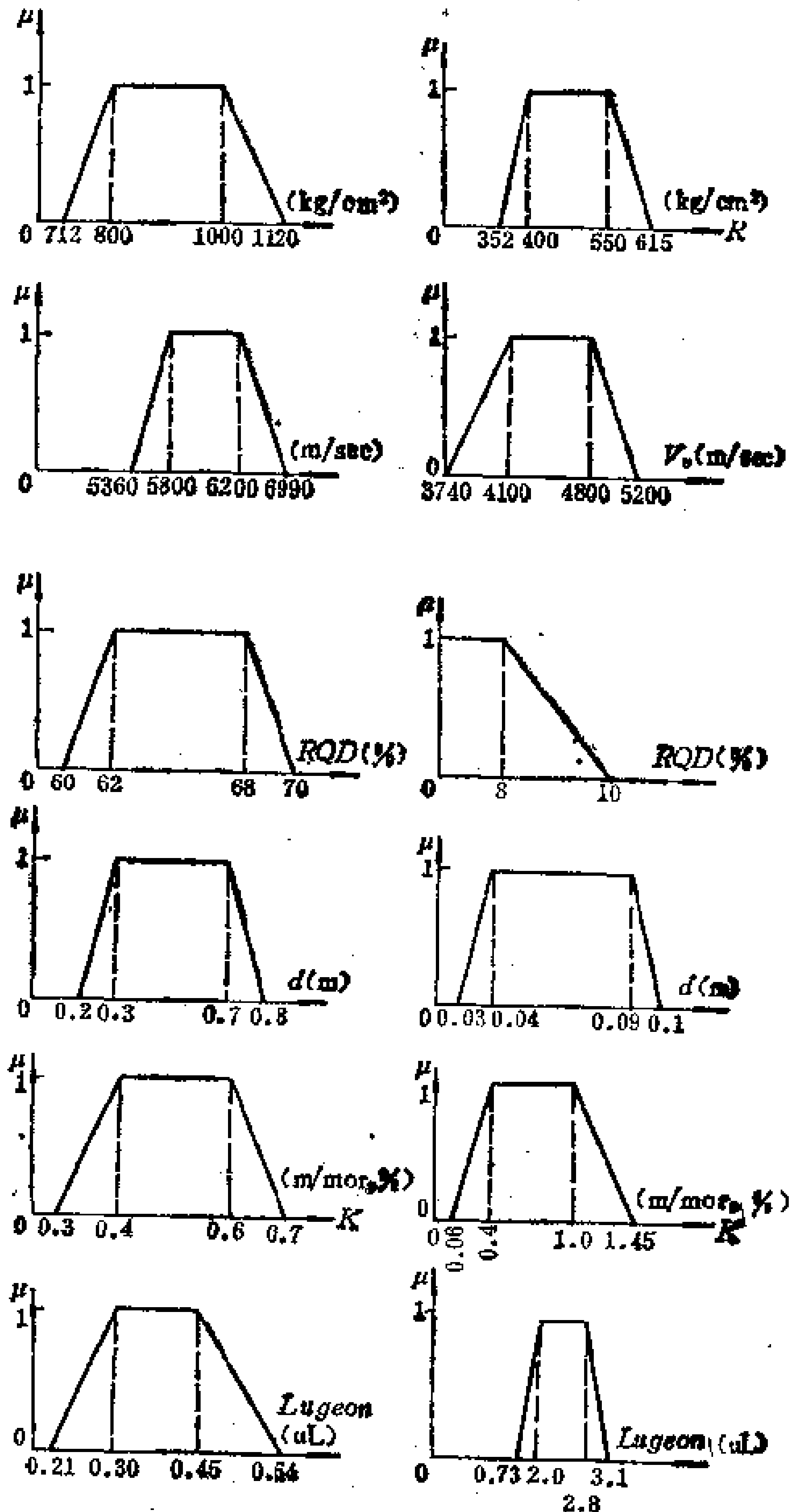



图 2-3-2　石灰岩（$a$）与泥灰岩（$b$）的Fuzzy集

**单因素评价结果** 表 2-3-2

| 岩石类 | | 石灰岩 | | | | | 泥灰岩 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 很好 | 好的 | 较好 | 差的 | 很差 | 很好 | 好的 | 较好 | 差的 | 很差 |
| 间隔指标 | 抗压强度 | | 0.688 | 1 | | | | | 0.811 | 1 | |
| | 纵波速度 | 1 | | | | | 0.5 | 1 | 0.593 | | |
| | RQD | | | 1 | | | | | | | 1 |
| | 节理间距 | | | 1 | 0.667 | | | | | 1 | 1 |
| | 平面裂隙率 | | 1 | 1 | | | 0.205 | 1 | 1 | 0.176 | |
| | lugeen试验 | | | 1 | 0.483 | | | | | | 1 |
| 名义指标 | 节理状态 | | 0.2 | 1 | 0.1 | | | | | | 1 |
| | 地下水 | | 0.1 | 1 | | | | | 1 | | |
| | 节理走向 | | 1 | | | | | 1 | | | |
| | 自稳时间 | 0.2 | 1 | | | | | | 0.3 | 1 | |

**按公式计算的单因素评价结果** 表 2-3-3

| 岩石类 | | 石灰岩 | | | | | 泥灰岩 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 很好 | 好的 | 较好 | 差的 | 很差 | 很好 | 好的 | 较好 | 差的 | 很差 |
| 间隔指标 | 抗压强度 | | 0.688 | 1 | 1 | 1 | | | 0.811 | 1 | 1 |
| | 纵波速度 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.5 | | 1 | 1 | 1 |
| | RQD | | | 1 | 1 | 1 | | | | | 1 |
| | 节理间距 | | | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | 1 |
| | 平面裂隙率 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 0.205 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | lugeon试验 | | | 1 | 1 | 1 | | | | | 1 |
| 名义指标 | 节理状态 | | 0.2 | 1 | 1 | 1 | | | | | 1 |
| | 地下水 | | 0.1 | 1 | 1 | 1 | | | | | 1 |
| | 节理走向 | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 1 |
| | 自稳时间 | 0.2 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 0.3 | 1 | 1 |

$$X_{jk} = \bigvee_{i=1}^{j} X_{ik} \quad (K=1, 2, \cdots, 5; \ j=1, 2, \cdots, 10)$$

我们拟定 3 组权数如表2-3-4所示。

**拟定的三组权数** 表 2-3-4

| 因素 | 抗压强度 | 纵波速度 | RQD | 节理间距 | 平面裂隙率 | Lugeon试验 | 节理状态 | 地下水 | 节理走向与倾角 | 自稳时间 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.20 | 0.15 | 0.20 | 0.05 | 0.05 | 0.10 | 0.05 | 0.10 | 0.05 | 0.05 |
| 2 | 0.25 | 0.20 | 0.15 | 0.05 | 0.05 | 0.07 | 0.05 | 0.08 | 0.05 | 0.05 |
| 3 | 0.30 | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.05 | 0.10 | 0.05 | 0.10 | 0.05 | 0.05 |

由公式：

$$Y_{lj} = \sum_{k=1}^{5} W_{lk} X_{jk} \quad (l=1, 2, 3; \ j=1, 2, \cdots, 10)$$

和

$$Y_{j\min}=\bigwedge_{i=1}^{3}Y_{ij},\qquad Y_{j\max}=\bigvee_{i=1}^{3}Y_{ij}\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

我们得到表2-3-5。

综 合 评 价 表　　表 2-3-5

| 岩石 | | 石灰岩 | | | | | 泥灰岩 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 组数 | 1 | 0.16 | 0.458 | 1 | 1 | 1 | 0.085 | 0.250 | 0.527 | 0.650 | 1 |
| | 2 | 0.21 | 0.575 | 1 | 1 | 1 | 0.110 | 0.300 | 0.598 | 0.730 | 1 |
| | 3 | 0.16 | 0.526 | 1 | 1 | 1 | 0.085 | 0.250 | 0.608 | 0.750 | 1 |
| $Y_{min}$ | | 0.16 | 0.458 | 1 | 1 | 1 | 0.085 | 0.250 | 0.527 | 0.650 | 1 |
| $Y_{max}$ | | 0.21 | 0.575 | 1 | 1 | 1 | 0.110 | 0.300 | 0.608 | 0.750 | 1 |

由表2-3-5即可以看到以下事实：

（1）石灰岩属于较好岩石（Ⅳ类），它属于好岩石的程度在0.458与0.575之间；它属于很好岩石的程度在0.16与0.21之间；

（2）泥灰岩属于很差的岩石（Ⅴ类），它属于差岩石的程度在0.65与0.75之间，它属于Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ等类的程度可以从表2-3-5查出。

值得指出的是这些计算是不复杂的。

## §2-4　运用模糊集理论综合评价采场稳定性分类[22]

1986年，冯保成针对地下采矿的特点，在Bieniawski地质力学法分类的基础上，采用集值统计，利用现代模糊数学理论提出了一种采场稳定性分类的新方法，论述了采场稳定性分类的意义和应用实例，为采矿设计和矿山生产提供了定量的依据。

### 一、模糊集合论的综合评价方法

Baas等人于1977年提出了一个模糊集合论的综合评价方法。在§2-4中，已对其作了论述，现列出最后的模糊数学模式：

模糊集（$R$，$\mu_{\bar{R}}$）的隶属函数：

$$\mu_{\bar{R}}(\bar{r})=\sup_{\substack{r_1,r_2,\cdots,r_n\in R\\ w_1,w_2,\cdots,w_n\in R}}\min\{\min_j\mu_{R_j}(r_j),\ \min\mu_{W_j}(W_j)\}$$

$$\bar{r}=\sum_j R_jW_j/\sum_j W_j$$

### 二、采场稳定性分类法及其意义

根据Bienawski地质力学法的分类，采用集值统计对分类参数指标分别作出离散化和连续化评分。并考虑地下采场的顶板、矿柱和底板的相互作用以及地质结构面对稳定性的影响，来作出采场稳定性分类的评价。

采场岩体稳定性分类参数、数值及评分见表2-4-1。

关于节理方位和结构面的影响见表2-4-2和表2-4-3。

分类参数，数值及评分表　　　　表 2-4-1

| NO | 参数 | | 数值范围 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 完整岩石强度 | 点载荷强度 | >1000kg/cm² | 40~1000kg/cm² | 20~40kg/cm² | 10~20kg/cm² | <10kg/cm² |
| | | 单轴抗压强度 | >2500kg/cm² | 1000~2500kg/cm² | 500~1000kg/cm² | 250~500kg/cm² | <250kg/cm² |
| | $W_1=0.10$ | 评分 | 1 | 0.8 | 0.47 | 0.27 | 0.07 |
| 2 | 岩芯质量指标RQD | | 90~100% | 75~90% | 50~75% | 25~50% | <25% |
| | $W_2=0.20$ | 评分 | 1 | 0.85 | 0.65 | 0.40 | 0.15 |
| 3 | 节理间距 | | >3m | 1~3m | 0.3~1m | 50~300mm | <50mm |
| | $W_3=0.30$ | 评分 | 1 | 0.75 | 0.50 | 0.40 | 0.25 |
| 4 | 节理方位(走向，倾角) | | 很有利 | 有利 | 比较有利 | 不利 | 很不利 |
| | $W_4=0.15$ | 评分 | 1 | 0.87 | 0.67 | 0.40 | 0.2 |
| 5 | 节理状态 | | 表面很粗糙,不连续,未风化,无充填物，闭合 | 表面粗糙分离1mm节理岩壁硬，稍风化 | 表面粗糙,分离>1mm节理岩壁软,表面风化 | 带擦痕或5mm厚断层泥或分离5mm连续节理 | 5mm软断层泥或分离5mm，连续节理,严重风化 |
| | $W_5=0.15$ | 评分 | 1 | 0.87 | 0.66 | 0.33 | 0 |
| 6 | 地下水 | 每10m巷道的流量 | 无 | <10升/分 | 10~25升/分 | 25~125升/分 | >125升/分 |
| | | 节理水压力 | 或 0 | 或 0~0.1 | 或 0~0.2 | 或 0.2~0.5 | >0.5 |
| | | 总的情况 | 或 完全干 | 或 稍湿 | 或 湿 | 或 中等压力水 | 严重水问题 |
| | $W_6=0.10$ | 评分 | 1 | 0.66 | 0.46 | 0.27 | 0 |

巷道中节理走向和倾角的评价　　　　表 2-4-2

| 垂直巷道轴向的走向 | | | | 平行巷道轴向的走向 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 顺倾角掘进 | | 逆倾角掘进 | | | |
| 倾角45~90° | 倾角20~45° | 倾角45~90° | 倾角20~45° | 倾角45~90° | 倾角20~45° |
| 很有利 | 有利 | 比较有利 | 不利 | 很不利 | 比较有利 |
| 倾角0~20° | | 对任何走向均是不利的 | | | |

采场稳定性在很大程度上受采场地质结构面的影响，所以评价采场稳定性必须考虑地质结构面。

为了使评分更精细些，把表2-4-1中每项指标的评分连续化，如图2-4-1所示。

很多岩体的物理力学性质表现为非均匀性、各向异性，非连续性、非线性以及流变性，使它的各种参数的测量数值具有很大的离散性和不均匀性。通过室内和现场岩石力学试验及现场工程地质测绘可获得单轴抗压强度、钻孔岩芯质量指标（*RQD*）、节理间距、产状、状态和地下水等地力学参数。这些参数是评价活动依据的客观性信息，经过适当处

采场中地质结构面的评价　　表 2-4-3

| 结构面类型 | | 特征 | 评价 |
|---|---|---|---|
| 一条结构面 | Ⅰ级结构面 | 宽度>3m，碎石、泥质或断层充填泥物，有滴水，空隙，$C=0$公斤/厘米² | 很不利 |
| | Ⅱ级结构面 | 宽度2～3m有碎石、泥质或断层泥充填物，无滴水，潮湿，$C<10$公斤/厘米²，有空隙 | 不利 |
| | Ⅲ级结构面 | 宽度0.5～2m，有碎石、泥质充填物，表面不平整无滴水，干燥，$C=$10～20公斤/厘米²，无大空隙 | 比较不利 |
| | Ⅳ级结构面 | 宽度6～500mm，表面不平整，无碎石和胶结性充填物，无滴水，干燥，$C\geq 20$公斤/厘米² | 有利 |
| | 无 | | 很有利 |
| 二条结构面 | 平行或近似平行 | | 比较不利 |
| | 相交 | 成V形相交 | 有利 |
| | 相交 | 成∧形相交 | 很不利 |
| 三条或三条以上结构面 | 平行或近似平行 | | 不利 |
| | 成不同形式相交 | | 很不利 |

理之后，就可以得到模糊评分函数。此外，参数评分除由实际测量而确定以外，还包括地质描述语汇。例如：“很粗糙”，“潮湿”，“很有利”等一些自然语汇，作为人们的判断结果，这种信息是具有模糊性特征的。运用模糊集合论的方法可以把这些具有模糊概念的自然语汇译为数学形式，使其由定性描述变成定量计算。表2-4-1中评价条件的权值函数是评价活动中的主观信息，它的确定与人们的经验、主观判断有密切关系。在具体评价某个矿山的采场稳定性时，可以征求和专门听取有经验的专家、技术人员、工人对如何选取权值发表的意见，然后再由计算人员作出模糊权值函数。也可以采取这样一种处理方法，认为每项指标的权值可以围绕它的隶属度最高的权值摆动，即把表2-4-1中给出的权值取做隶属度最高（隶属度为1）的权值，其摆动的最大偏差为10%，且正负偏差一样。

据上所述，我们把每项指评的评分和每项指标相对重要性的度量——权值都当做一个模糊集合，它们均在$R$空间中，用取值于[0，1]区间的一个隶属函数来表征。确定了每项指标评分及其权值的隶属函数，就可以用模糊集合论的综合评价方法，确定出加权平均得到的总评分的隶属函数。这个隶属函数较全面地反映了总评分的变化范围及其隶属度，为综合评价岩体和进行分类提供了较为全面的依据。岩体稳定性的分类界限分为五类，如表2-4-4。

由于金属和非金属地下矿山，地质采矿技术条件变化复杂，采矿方法和变型方案、采矿工艺，采场的形态和构成要素都差异很大。但是，对于地下采场来说，有三个共同的特征：一是采场的空间结构均由顶板、矿柱和底板所组成；二是都有顶板岩体，矿体和底板岩体；三是在矿体和底板中，有时在顶板中都掘进有各种巷道工程。因此，除了要对采场中的巷道工程的稳定性进行评价外，特别是要对采场的顶板稳定性，矿体的稳定性，底板的稳定性分别按照表2-4-4加以分类。而且，还要考虑顶板、矿柱及底板三者之间的相互

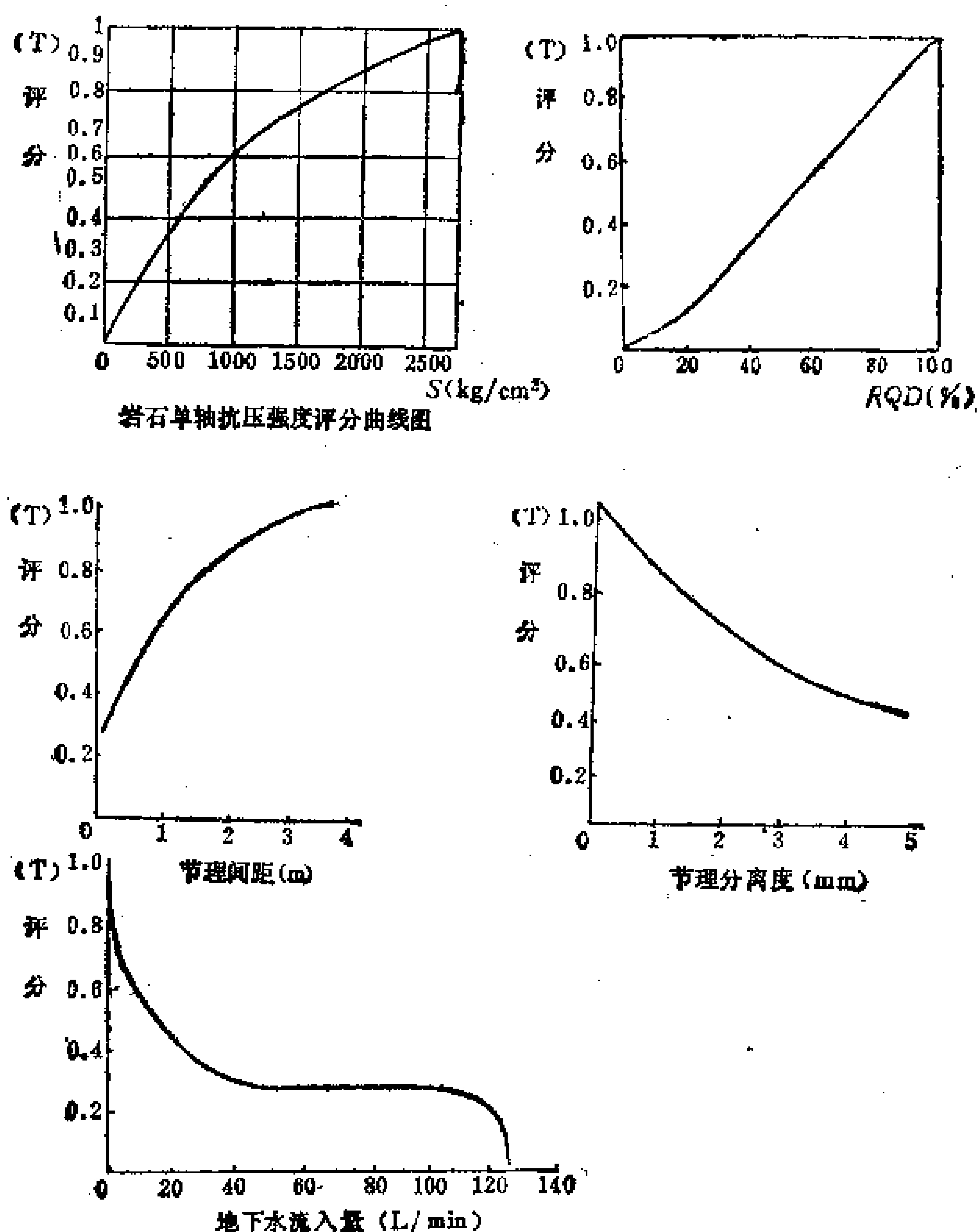



图 2-4-1　各个指标的评分曲线

**岩体类别及其评价**　　　　表 2-4-4

| 类别 | | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ | Ⅴ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 描述 | 岩性 | 很好 | 好 | 比较好 | 差 | 很差 |
| | 稳定性 | 很稳定 | 稳定 | 中等稳定 | 不稳定 | 很不稳定 |
| 评分 | | 1.0～0.81 | 0.8～0.61 | 0.6～0.41 | 0.4～0.21 | ≤0.20 |

影响。在大多数情况下，顶板、矿体和底板的岩性各不相同，其对采场稳定性的影响亦各异。图2-4-2表示了顶板、矿柱和底板三者之间的相互影响。一般说来：顶板的稳定性对采场稳定性的影响最大，矿体（或矿柱）较大，底板次之。

由于试验的岩样数目有限，现场调查的范围也有限，还有一些未估计到的影响因素的作用未考察，权值的确定来自经验，用隶属度最高的总评分来判断岩体稳定性的类别和采

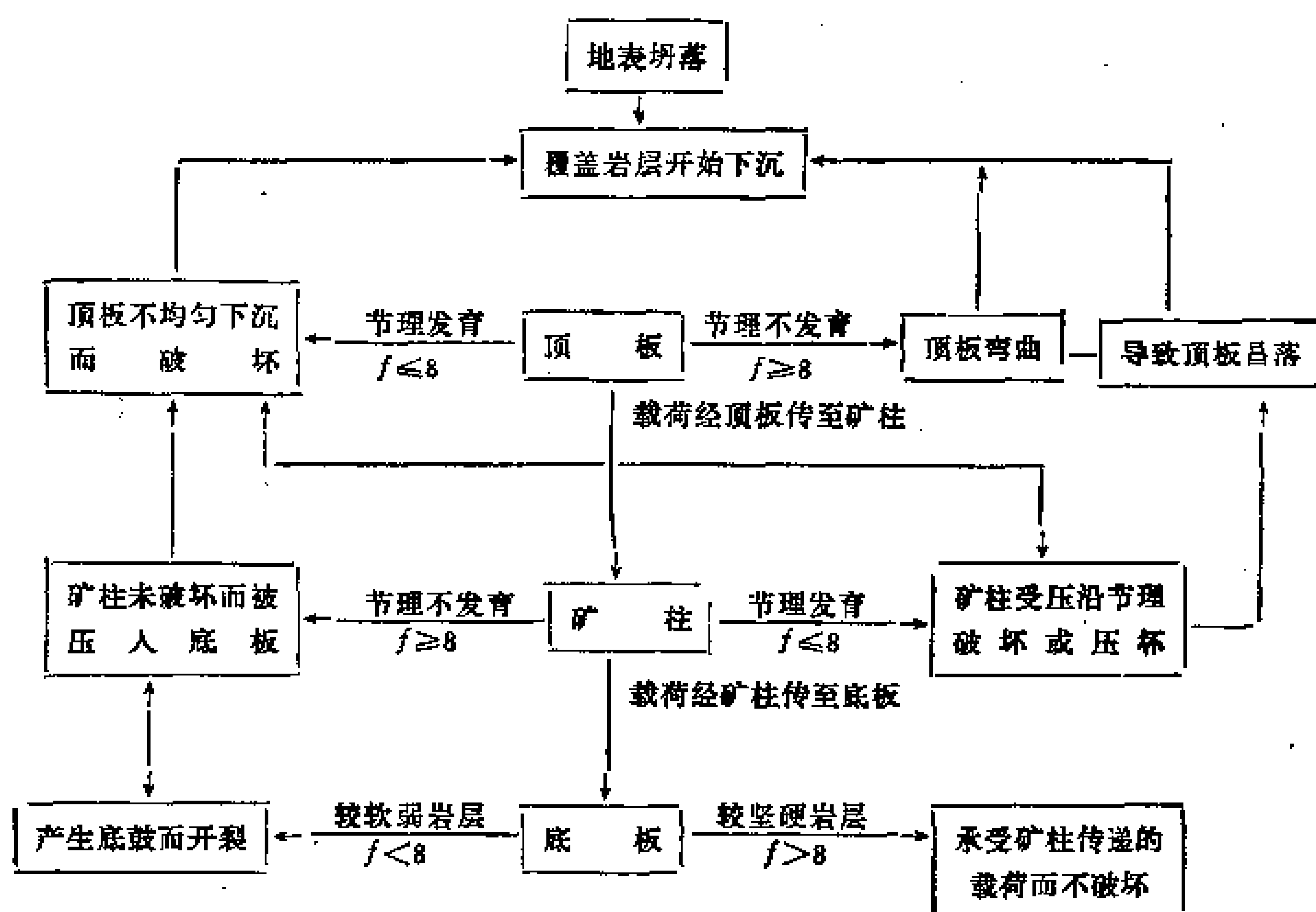



图 2-4-2 采场顶板、矿柱和底板之间的相互关系

场稳定性分类，就不十分可靠。因此，在确定岩体稳定性类别和采场稳定性时，不以隶属度最高的总评分作为主要依据，而是以隶属函数的特征为主要依据，鉴于以上考虑，我们提出如下的分类标准。考察集合：

$$\{\overline{r}:\mu_{\tilde{R}}(\overline{r})\geqslant 0.8\},\overline{r}\in R$$

这里$\overline{r}$是总评分，$\mu_{\tilde{R}}(\overline{r})$是$\overline{r}$的隶属函数。

该分类标准就是把隶属度在0.8以上的总评分$\overline{r}$的大部分落在哪一类的评分范围内，就属于哪一类岩体或哪一类岩体稳定性。采用这样的分类标准，就更吻合岩体的客观状态，对巷道和采场稳定性的评价就更为准确可靠。

岩体分类在巷道工程中的意义，以及采场稳定性分类的意义如表2-4-5和表2-4-6。

岩体分类在巷道工程中的意义　　　　表 2-4-5

| 类　别 | Ⅰ (1～0.81) | Ⅱ (0.8～0.61) | Ⅲ (0.60～0.41) | Ⅳ (0.40～0.21) | Ⅴ ≤0.20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 未支护的跨度 | 5m | 4m | 3m | 1.5m | 0.5m |
| 平均稳定时间 | 10年 | 6月 | 1周 | 5小时 | 10分钟 |
| 岩体的粘结力 | 30kg/cm² | 20～30kg/cm² | 15～20kg/cm² | 10～15kg/cm² | <10kg/cm² |
| 岩体的摩擦角 | >45° | 40°～45° | 35°～40° | 30°～35° | <30° |
| 岩体的掘进性 | 很难掘进 | 难掘进 | 较易掘进 | | |
| 岩体的支护措施 | 不需支护，个别可用锚杆支护或喷射混凝土 | 木支护、钢支护、较系统的锚杆支护或喷射混凝土，个别用新奥法 | 系统的木支护、钢支护、锚喷支护、混凝土支护、新奥法 | 系统地钢支护、混凝土支护、新奥法 | 混凝土支护、新奥法 |

采场稳定性分类的意义（适用采矿方法的类型和控制措施）　　表 2-4-6

| 稳定性类别 | 适用的典型采矿方法类型 | 采场跨度(或允许暴露面积)，可能维持平均时间 | 临时支护措施 | 岩体的粘结力 | 岩体的摩擦角 | 岩体的采掘性 | 围岩最终控制方法 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 很稳定 I 类 评分1.0 ~0.81 | 房柱法，分段法，阶段矿房法，留矿法等空场法类 | 允许暴露面大于400~600m²；12~15米跨度；可达10~15年 | 一般不需支护，个别地点可用锚杆支护(或木支护，钢支护) | 30 kg/cm² | 45° | 很难采掘 | 矿井服务年限在10~15年内，可不作任何处理，采空区面积5~10万m²；大于15年，可用废石作任意充填 |
| 稳定 II 类 评分0.80 ~0.61 | 房柱法，矿房法，留矿法等空场法类，小中段崩落法，充填法 | 允许暴露面积：200~400m²；12~15m跨度；可达5~10年 | 局部地点需用锚杆支护（或木支护、钢支护），一般不需支护 | 20~30 kg/cm² | 40°~50° | 难采掘 | 大于10年，强制崩落围岩，采空区面积3~5万m²，或用局部充填 |
| 中等稳定 III 类 评分0.60 ~0.41 | 房柱法，留矿法，中段崩落法，阶段崩落法，充填法 | 允许暴露面积50~200m²；8~10m跨度；可达2~5年 | 较系统的锚杆支护（或木支护钢支护），锚喷支护 | 15~20 kg/cm² | 35°~40° | 较易采掘 | 强制崩落围岩或诱导崩落围岩，或用尾砂充填空区 |
| 不稳定 IV 类 评分0.40 ~0.21 | 分层崩落法，崩落法分层充填法类 | 允许暴露面积小于50m²；5m跨度，可达几天至一个月 | 锚喷支护，长锚索支护 | 10~15 kg/cm² | 30°~35° | 易采掘 | 崩落围岩或充填空区 |
| 很不稳定 V 类 评分：≤0.20 | 自然崩落法，分层崩落法，下向分层充填法，支柱充填法 | 不允许暴露；3m跨度可达数小时至几天 |  | <10 kg/cm² | <30° | 很易采掘 | 崩落围岩或充填空区 |

## 四、应 用 实 例

为了论证提出的运用模糊集合论综合评价采场稳定性分类的实际效果，以二个实例作为具体应用。

1.刘冲磷矿采场稳定性初步分类

根据长沙矿山研究院在现场实测和室内试验资料，得出分类参数，数值评分表，如表2-4-7。

表2-4-7所提供的原始数据无变化范围，仅为一平均值，对于确定每项指标的隶属函数就不充分。假定每项指标的隶属函数均呈三角形分布，取其平均值的隶属度为1，左右对称偏差为10%，总评分的隶属函数的计算是容易的，即按照上下限值分别利用下式求出综合评分的隶属函数，如图2-4-3。$\overline{r}=\sum_{j=1}^{m}V_jW_j\Big/\sum_{j=1}^{m}W_j$

由图2-4-3可以看出，根据集合$\{\overline{r}\,|\,\mu_{\bar{R}}(\overline{r})\geqslant 0.8\}$，顶板灰质白云岩的稳定性落于第Ⅰ类，属于稳定岩层；矿体上层红矿的稳定性落于第Ⅴ类属于很不稳定岩层；灰矿和黑矿的稳定性落入第Ⅲ类属于中等稳定矿层；底板黑色页岩的稳定性落于第Ⅳ类属于不稳定岩层。利用图2-4-3的隶属函数可以对不同隶属度确定相应的总评分变化范围，进而根据表2-4-6确定出该采场在多大跨度下稳定的时间范围。如表2-4-8。

按刘冲磷矿现行的采矿方法是采用房柱法和留矿法（倾角大于45°），在$T_{845}$线以南

**刘冲磷矿的分类参数、数值、评分表　　表 2-4-7**

| 要素 | | | 顶板 | 矿体 | | | 底板 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | (灰质白云岩) | 红矿 | 灰矿 | 黑矿 | (页岩) |
| 分类参数 | 单轴抗压强度 | | 1200kg/cm² | 400kg/cm² | 800kg/cm² | 800kg/cm² | 500kg/cm² |
| | $W_1=0.1$ | 评分 | 0.8 | 0.27 | 0.47 | 0.47 | 0.27 |
| | RQD | | 70% | <20% | 52% | 50% | 40% |
| | $W_2=0.2$ | 评分 | 0.65 | 0.15 | 0.65 | 0.65 | 0.40 |
| | 节理间距 | | 0.4～1m | <50mm | 60～400mm | 60～400mm | <50mm |
| | $W_3=0.3$ | 评分 | 0.5 | 0.25 | 0.4 | 0.4 | 0.25 |
| | 节理方位（走向，倾角） | | 很有利 | 很不利 | 比较有利 | 比较有利 | 不利 |
| | $W_4=0.15$ | 评分 | 1 | 0.2 | 0.67 | 0.67 | 0.4 |
| | 节理状态 | | 表面粗糙，宽度≤1mm，略风化 | 泥质充填，严重风化破碎 | 表面粗糙，宽度<1mm，略风化 | 同左 | 层面光滑，易风化而膨胀 |
| | $W_5=0.15$ | 评分 | 0.83 | 0 | 0.66 | 0.66 | 0.33 |
| | 地下水条件 | | 潮湿 | 有滴水 | 潮湿 | 潮湿 | 潮湿 |
| | $W_6=0.10$ | 评分 | 0.66 | 0.27 | 0.66 | 0.66 | 0.66 |

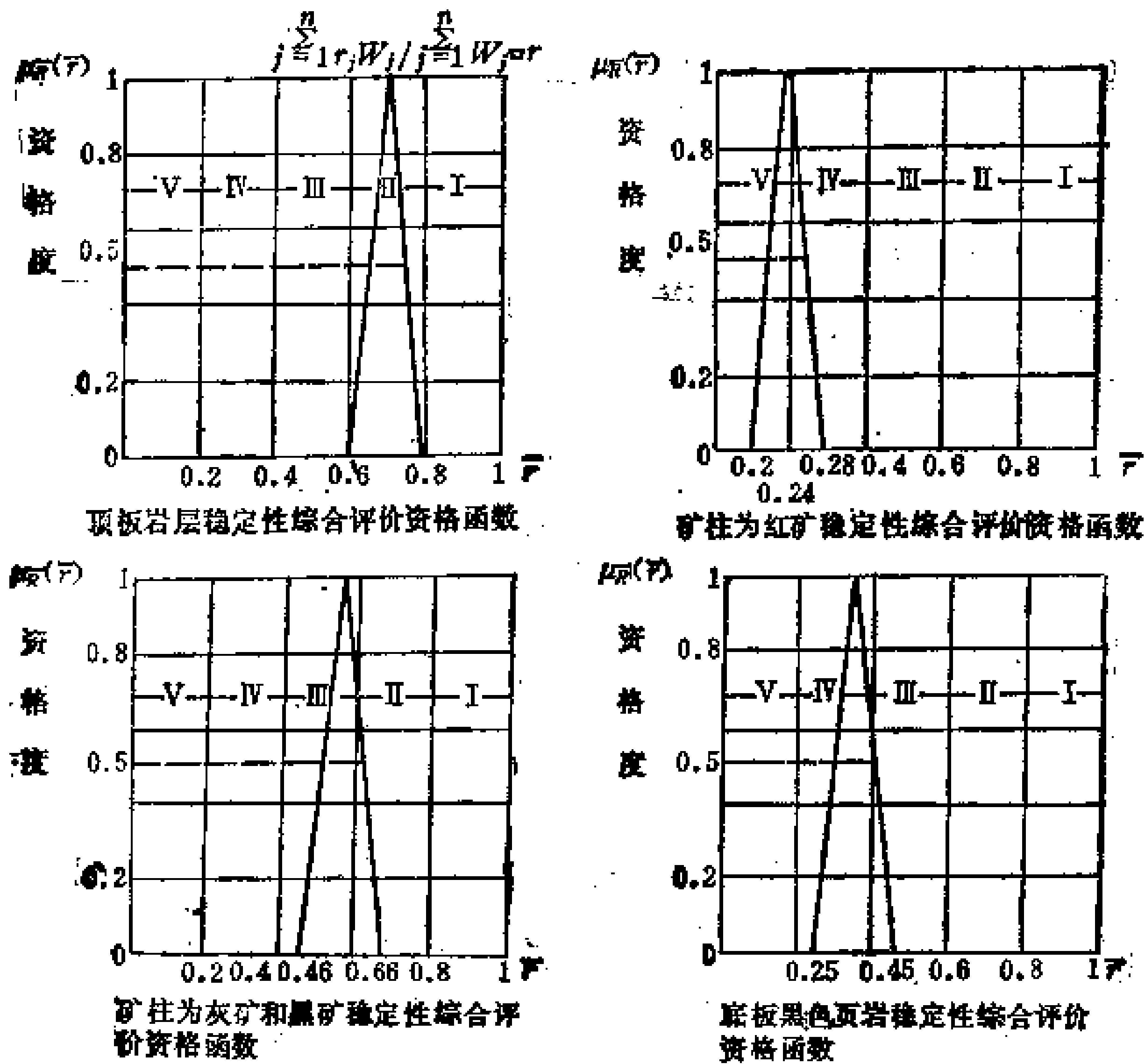



图 2-4-3　顶板，矿柱，底板稳定性综合评价隶属函数

总评分$\overline{r}$变化范围和采场稳定的时间变化范围　　表 2-4-8

| $u_{\tilde{R}}(\overline{r})$ | 顶板灰质白云岩 | | 红　矿 | | 灰矿和黑矿 | | 底板黑色页岩 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.70 | 12～15m<br>5～10年 | 0.19 | 几小时～数天 | 0.56 | 8～10m，<br>2～5年 | 0.35 | 几天～一个月 |
| >0.8 | 0.63～0.72 | 12～15m<br>5～10年 | 0.13～0.22 | 几小时～数天 | 0.52～0.58 | 8～10m，<br>2～5年 | 0.33～0.37 | 几天～一个月 |
| >0.5 | 0.66～0.74 | 12～15m<br>5～10年 | 0.15～0.24 | 几小时<br>～一个月 | 0.5～0.62 | 8～10m，<br>2～5年 | 0.29～0.39 | 几天～一个月 |

的采场，由于红矿、黑矿、灰矿共存，红矿属于典型的第Ⅴ类，稳定时间为几小时、数天，最多一个月；虽然黑矿和灰矿属于第Ⅲ类跨度能达8～10m，稳定时间2～5年，而红矿的存在使其稳定性降低，也就是说降低到第Ⅲ类和第Ⅳ类的中间状态。顶板灰质白云岩属于典型的第Ⅰ类，底板黑色页岩属于第Ⅳ类，顶板的稳定性受到矿柱和底板的影响也要降低，即降到第Ⅰ类和第Ⅲ类的中间状态。因此，整个采场的稳定性要降到第Ⅲ类偏第Ⅳ类，采场的跨度要由原施工的15m降低到6～8m，稳定时间达一年左右，才能确保整个采场的稳定性。现场的实践证明：$T_{545}$线以南的采场，实际跨度达15m，一般经过半年至一年内矿柱即被破坏，虽然顶板保持较完好，但采场失稳。

$T_{545}$线以北的采场，大部分地区没有红矿层，主要是灰矿和黑矿，其稳定性属于第Ⅲ类；顶板属于第Ⅰ类；底板属于第Ⅳ类。由于矿柱和底板对顶板的影响，顶板的稳定性会降低，整个采场的稳定性变为第Ⅰ类偏第Ⅲ类。采场的跨度要由原来的15m减少到10～12m，采场稳定时间控制为5～8年，这样才能确保整个采场的稳定性。现场实践证明：$T_{545}$线以北的采场，目前维持时间已达3～5年，至今采场尚完好，只有个别地点呈现受压现象。

这个实例分析证明：用模糊集合理论综合评价采场稳定性分类，给出一个隶属函数，以隶属度大于0.5和0.8的评分变化范围来作为采场稳定性分类的主要判定，比仅仅给出单一数值作划分判定，更能反映出岩体复杂多变的客观情况，能作出更准确的采场稳定性分类，能设计更为合理的采矿方法和采场结构尺寸，确保整个采场的稳定性。

2.蒙阴金刚石矿岩管矿体稳定性分类

蒙阴金刚石矿胜利1#岩管由露天转地下开采，为了给地下采矿方法参数选择提供依据，决定进行矿体稳定性试验。矿体为斑状金伯利岩，倾角80°～85°，围岩为片麻岩，矿体中原生和次生节理发育，渗水性极差，且含有几厘米至1～2m分布不均匀的围岩捕虏体。试验采场构成要素长度20～23m，宽5.35～7.2m，平均6.1m。武汉工业大学采矿教研室，在试验中，为了测定矿体稳定性，采用了地音监测、声波法、光应计，动态仪测量、悬锤水平位移测量、水准测量、弱面拉力试验等多种测试手段。进行了室内岩样力学性能试验。根据测定结果，对矿体稳定性作了多项单指标的评定，如表2-4-9。

此外，用ALGOL语言编制计算程序的有限元法计算表明：试验采场顶、底板中均存在拉应力区，但拉应力值极小，顶板中点的拉应力仅为2.91kg/cm²，试验采场周围矿体中的安全系数都在8以上，判定试验采场矿体是属于稳定的。

矿体稳定性多项单指标评定　　　　表 2-4-9

| 序号 | 评定指标 | 评定内容 | 矿体稳定性评定 |
|---|---|---|---|
| 1 | 单轴抗压强度$S_c$ | 金伯利岩单轴抗压强度为 300～800kg/cm², $S_c=527$kg/cm² | 属中等坚硬岩石 |
| 2 | 岩石质量指标$S$ | $S=\left(\frac{E\cdot S_c}{20\times 10^6}\right)^{\frac{1}{4}}=3.1$ | 属坚硬岩块 |
| 3 | 弹性波波速 | 现场实测平均纵波波速4304m/s | 属$A_3$级，中等稳定 |
| 4 | 顶板暴露面积 | 顶板暴露面积131m²，8个月未发生垮落现象 | 属中等稳定以上 |
| 5 | RQD值 | $y=85.7$ | 属良好的岩体 |
| 6 | 龟裂系数 | $K=0.7$ | 属中等稳定 |
| 7 | 稳定系数$W$ | $W=5.76$ | 属稳定的 |
| 8 | Bieniawski地质力学分类法 | 5个参数综合评分79分 | 属稳定的 |

综合以上各个单项指标的评定，判定矿体属于中等稳定。

根据现场实测和室内试验资料，电用模糊集合理论综合评价试验采场金伯利岩的稳定性的结果见表2-4-10和图2-4-4。

金伯利岩的参数，数值与评分表　　　　表 2-4-10

| 参数 | 单轴抗压强度 | | RQD | | 节理间距 | | 节理方位(走向，倾角) | | 节理状态 | | 地下水 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 描述 | 300～800kg/cm²<br>$S_c=527$kg/cm² | | 85.7% | | 0.4～1m | | $NE0°\sim10°$　25°～89°<br>$NE0°\sim30°$　59°～89°<br>$NE10°\sim80°$　71°～76°<br>(不利) | | 表面粗糙<br>宽度<1mm<br>略风化 | | 干燥 | |
| 评分 | $W=0.1$ | 0.47 | 0.2 | 0.85 | 0.3 | 0.50 | $W_4=0.15$ | 0.40 | 0.15 | 0.66 | 0.1 | 1 |

由图2-4-4看出：隶属度大于0.5和0.8及总评分$\bar{r}$的变化范围，采场稳定性属于第Ⅱ类稍偏第Ⅲ类，即稳定稍偏中等稳定。采场稳定的时间变化范围：12～15m跨度可达5～10年；8～10m跨度可达2～5年。对于稳定稍偏中等稳定的采场，为了确保其稳定性，采场跨度可定为10～12m，稳定时间为4～8年。

由实例分析看出：利用8种单项指标对采场稳定性作了评定，并用有限元法作了验证，这是有实际意义的。但俱是单个分散的评定，各自的结果往往不一致，因而只能靠人们的经验和主观倾向性作出最终的判定，这种判定可能是正确的，也可能是保守的或冒风险的。而运用模糊集合论的综合评价方法，给出了统一的数学模式，用总评分的隶属函数作为采场稳定性分类的主要判据，从而定量地判定了采场稳定性类型，其结果就较为客观、合理、准确可靠。

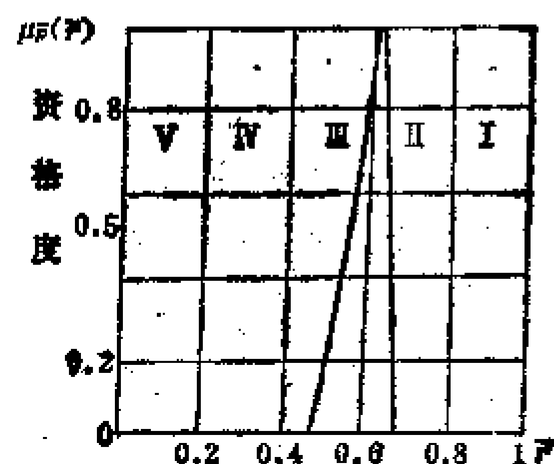



图 2-4-4　金伯利岩稳定性综合评价隶属函数

## §2-5　相似材料的Fuzzy最佳综合选择[23]

1985年，姜增国运用模糊数学方法，对多种相似材料，综合考虑其单轴抗压强度、单轴抗拉强度、弹性模量、内聚力、内摩擦角、泊松比六个指标，提出了一种Fuzzy最佳综合选择方法，以使最终选择的相似材料能从多方面反映岩石特性。

### 一、问题的提出

研究一种自然现象的机理，准确、可靠的方法是对其直接进行观察和试验。然而常常受到客观条件、时间、效益等限制，难于或不便于直接观测和试验。于是，人们往往使用相似材料（或称模型材料）制做模型，在遵循相似性准则的基础上，用模型模拟原型，将模型的研究结果按照一定规律外推到原型，以达到研究原型的目的。

至今人们已研究过许多相似材料，但是对于给定岩石的某一指标，也许相似材料$A$与岩石的相似性较好，而对另一指标，可能相似材料$B$较为适宜。特别是，相似材料的相似性和模型模拟原型的相似性都具有模糊性的特征。因此，如何研究和处理这种模糊性，以及如何在各指标相似程度不同的多种相似材料中选择一种最佳材料，使其能从强度、变形、破坏等力学性质上反映客观岩体的特性，这就是我们提出Fuzzy最佳综合选择方法的意图和目的。

### 二、数学模型与隶属函数

设有$M$种相似材料，表征每种材料特性的指标有$N$个，则$M$种材料的所有指标组成一个$N\times M$维矩阵$X$。

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1M} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NM} \end{bmatrix}$$

矩阵$X$中的元素$x_{ij}(i=1,2,\cdots,N,j=1,2,\cdots,M)$表示第$j$种相似材料的第$i$个指标值。

相似材料和给定岩石的关系可以通过隶属函数$\mu_{ij}$来表示，相似材料和岩石的相似性越好，则相似材料隶属于岩石的程度越高。

根据相似准则，从统计得出隶属函数$\mu_{ij}$为：

$$\mu_{ij}=1-\left|\frac{x_i-c_i\cdot x_{ij}}{x_i}\right| \tag{2-5-1}$$

式中：$x_i$——给定岩石第$i$个指标值，（$i=1,2,\cdots,N$）；$x_{ij}$——第$j$种相似材料的第$i$个指标值；$c_i$——按相似准则要求第$i$个指标的相似系数。

隶属函数呈三角形分布。即

当$c_i\cdot x_{ij}=x_i$时　$\mu_{ij}=1$

当$0\leqslant c_i\cdot x_{ij}<x_i$时，$0\leqslant\mu_{ij}<1$

当$x_i<c_i\cdot x_{ij}<2x_i$时，$0<\mu_{ij}<1$

当$c_i\cdot x_{ij}\geqslant 2x_i$时，$\mu_{ij}=0$

也就是说，隶属函数$\mu_{ij}$的取值范围为：$\mu_{ij}\in[0,1]$。

在计算矩阵$X$中的各元素$x_{ij}$之后，根据相似性准则，计算出隶属函数$\mu_{ij}$。其全体组

成隶属函数矩阵$\underset{\sim}{\mu}$是一个模糊关系矩阵。

$$\underset{\sim}{\mu}=\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1M} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{N1} & \mu_{N2} & \cdots & \mu_{NM} \end{bmatrix}$$

由于所研究问题的性质和目的不同，一般说来各指标并非等权值，而存在各个指标重要性不同的权值分配问题，设权值的模糊向量为$\underset{\sim}{W}$

$$\underset{\sim}{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$$

式中：$w_1,w_2\cdots,w_n$为因素的权值，并满足归一化。

$$\sum_{i=1}^{n} w_i=1,\quad w_i\in[0,1]。$$

按模糊线性加权变换方法，即得：

$$\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{W}\circ\underset{\sim}{\mu}$$

$$=(w_1w_2\cdots w_n)\circ\begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1M} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{1N} & \mu_{2N} & \cdots & \mu_{NM} \end{bmatrix}$$

$$=(z_1z_2\cdots z_M) \tag{2-5-2}$$

$$z_j=\sum_{i=1}^{n} w_i\cdot\mu_{ij}\quad (j=1,2,\cdots,m) \tag{2-5-3}$$

$(z_1,z_2,\cdots,z_m)$中最大者即为最佳相似材料。

## 三、应 用 实 例

现欲用相似材料模拟试验研究湖南省邵东石膏矿的顶板稳定性，以确定最佳的开采参数。已知顶板岩石的力学参数如表2-5-1所示，试选择最佳的相似材料。

湖南邵东石膏矿采矿顶板岩石参数　　表 2-5-1

| 指标 | 岩石密度 $\rho$ | 抗拉强度 $\sigma_t$ | 抗压强度 $\sigma_c$ | 弹性模量 $E$ | 内聚力 $C$ | 内摩擦角 $\varphi$ | 泊松比 $\nu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数值 | 2.77g/cm³ | 23.8kg/cm² | 564kg/cm² | 5.87×10⁵kg/cm² | 110kg/cm² | 30° | 0.15 |

初选五种相似材料，其中第1、2、3、4种相似料的配料为砂：可赛银：石膏：水；第五种相似材料的配料为水：胶：石膏：砂。其参数见表2-5-2。

五种相似材料的性能参数　　表 2-5-2

| 材料 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 配比 | | 5:2:8:1.5 | 5:6:4:1.5 | 6:1:9:1.5 | 6:2:8:1.6 | 100:1.88:25:125 |
| 参数 | $\gamma$ | 1.95 | 1.95 | 1.95 | 1.95 | 1.17 |
| | $\sigma_t$ | 1.98 | 1.07 | 2.34 | 1.18 | 1.30 |
| | $\sigma_c$ | 29.78 | 14.6 | 27.7 | 18.58 | 5.00 |
| | $E$ | $5.28\times10^4$ | $1.85\times10^4$ | $7.52\times10^4$ | $3.58\times10^4$ | $2.1\times10^4$ |
| | $C$ | 5.8 | 3.0 | 4.6 | 3.2 | 2.0 |
| | $\varphi$ | 35.5 | 30 | 36 | 35 | 41 |
| | $\nu$ | 0.24 | 0.20 | 0.21 | 0.18 | 0.24 |

可写成矩阵形式：按表2-5-2所列参数

$$X=\begin{bmatrix} 1.98 & 1.07 & 2.34 & 1.18 & 1.30 \\ 29.78 & 14.6 & 27.7 & 18.58 & 5.00 \\ 5.28\times10^4 & 1.85\times10^4 & 7.52\times10^4 & 3.58\times10^4 & 2.1\times10^4 \\ 5.8 & 3.0 & 4.6 & 3.2 & 2.0 \\ 35.5 & 30 & 36 & 35 & 41 \\ 0.24 & 0.20 & 0.21 & 0.18 & 0.24 \end{bmatrix}$$

根据现有试验设备和加载能力，选择几何比尺$c_l=15$。

由相似准则对相似材料1、2、3、4号有：

$$C_{\sigma_t}=C_{\sigma_c}=C_E=C_c=C_1\cdot\frac{r_N}{r_M}=15\times\frac{2.77}{1.95}=21.3$$

对相似材料5号有：

$$C_{\sigma_t}=C_{\sigma_c}=C_E=C_c=C_1\cdot\frac{r_N}{r_M}=15\times\frac{2.77}{1.17}=35.5$$

同时，对所有相似材料有：$C_\varphi=1$；$C_\nu=1$。

按照式（2-7-1）计算隶属函数值$\mu_{ij}$，得

$$\underset{\sim}{\mu}=\begin{bmatrix} 0.228 & 0.954 & 0.000 & 0.994 & 0.001 \\ 0.875 & 0.551 & 0.954 & 0.702 & 0.315 \\ 0.084 & 0.671 & 0.000 & 0.701 & 0.730 \\ 0.878 & 0.581 & 0.891 & 0.620 & 0.645 \\ 0.817 & 1.000 & 0.800 & 0.833 & 0.633 \\ 0.400 & 0.667 & 0.600 & 0.800 & 0.400 \end{bmatrix}$$

对于这一给定问题，我们就各参数在问题中的重要程度在许多专家中做了调查，所有被统计者之权数均值构成权重模糊向量$\underset{\sim}{W}$。

$$\underset{\sim}{W}=(0.30,\ 0.10,\ 0.25,\ 0.10,\ 0.10,\ 0.15)。$$

根据公式（2-5-2）和（2-5-3）则有：

$$\underset{\sim}{Z}=\underset{\sim}{W}\cdot\underset{\sim}{\mu}=(0.30,\ 0.10,\ 0.25,\ 0.10,\ 0.10,\ 0.15)\circ\begin{bmatrix} 0.288 & 0.954 & 0.000 & 0.994 & 0.061 \\ 0.875 & 0.551 & 0.954 & 0.702 & 0.315 \\ 0.084 & 0.671 & 0.000 & 0.701 & 0.730 \\ 0.878 & 0.581 & 0.891 & 0.620 & 0.645 \\ 0.817 & 1.000 & 0.800 & 0.833 & 0.633 \\ 0.400 & 0.667 & 0.600 & 0.800 & 0.400 \end{bmatrix}$$

$$=(0.4064\quad 0.7684\quad 0.3545\quad 0.8090\quad 0.4201)$$

可见，第4号相似材料，即砂：可赛银：石膏：水为6：2：8：1.6的相似材料是模拟顶板岩石的最佳相似材料。

这里需要指出的是：在实际应用中这样选择的材料并不一定是最终材料，有时还会加入微量的修正剂以调整某项指标。

模糊最佳综合选择的相似材料用来进行模拟试验，试验结果和现场实际吻合的较好。

## §2-6 采矿方法选择中的模糊决策[25]

1986年，云庆夏、黄光球、张永高等运用模糊数学中模糊性度量和模糊关系方程，提出了采矿方法选择的模糊决策方法，使所选出的采矿方法更加符合实际，更加合理。

影响采矿方法选择的因素很多，如矿岩性质，矿体产状、矿石价值、有用成分分布等。这些因素的描述往往是模糊的，如矿石、围岩不够稳固，有用成分分布不太均匀等。

一般情况下，人们靠经验选择采矿方法，具有较大的主观随意性。特别是当矿床赋存条件复杂，可供选用的采矿方法很多时，很难对近似的方案进行取舍。

鉴于地下采矿方法选择，是一个典型的模糊决策问题，因此，运用模糊数学中模糊性度量和模糊关系方程，提出了采矿方法选择的模糊决策方法。该方法由三步组成，即采矿方法初选，技术经济分析和综合分析比较。在方法初选中，根据矿山的地质采矿技术条件，计算各种采矿方法的模糊贴近度，选出一组可供选用的采矿方法；在技术经济分析中，通过解模糊关系方程，求出不同矿山的权系数，算出设计矿山的各种技术经济指标。在综合分析比较中，运用多目标决策方法，从所选出的技术经济指标中挑选出最优的采矿方法。

### 一、数学模型

1.用相似优先比法初步选择采矿方法

各种采矿方法都有一定的选用范围，然而这个范围的界线是模糊的。因此，对于某一待设计矿山，每种采矿方法都有不同程度的适用性。当然，这种适用性也是模糊的。通过模糊度的计算，便可选择出适宜使用的采矿方法。

选取几种采矿方法，依次以$A_1, A_2, \cdots, A_n$表示（见表2-6-1）。每种采矿方法的适用条件，用围岩稳固性、矿石稳固性、厚度、倾角……等$m$种因素分别以$C_1$，$C_2$，$\cdots, C_m$表示。以设计矿山的地质采矿技术条件为固定样本$A_K$，比较它和各种采矿方法的相似程度。相似程度以海明距离（$d_K$）表示：

各种采矿方法的影响因素　表 2-6-1

| 相似因素 | | $C_1$ $C_2$ …… $C_j$ …… $C_m$ |
|---|---|---|
| 采矿方法 | $A_1$ | $X_{11}$ $X_{12}$ …… $X_{1j}$ …… $X_{1m}$ |
| | $A_2$ | $X_{21}$ $X_{22}$ …… $X_{2j}$ …… $X_{2m}$ |
| | ⋮ | ⋮ |
| | $A_i$ | $X_{i1}$ $X_{i2}$ …… $X_{ij}$ …… $X_{im}$ |
| | ⋮ | ⋮ |
| | $A_n$ | $X_{n1}$ $X_{n2}$ …… $X_{nj}$ …… $X_{nm}$ |
| 设计矿山条件$A_K$ | | $X_{K1} X_{K2} \cdots\cdots X_{Kj} \cdots\cdots X_{Km}$ |

模糊关系 $R$　表 2-6-2

| | 1　2　……　$j$　……　$n$ |
|---|---|
| 1 | $r_{11}$ $r_{12}$ …… $r_{1j}$ …… $r_{1n}$ |
| 2 | $r_{21}$ $r_{22}$ …… $r_{2j}$ …… $r_{2n}$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $i$ | $r_{i1}$ $r_{i2}$ …… $r_{ij}$ …… $r_{in}$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $n$ | $r_{n1}$ $r_{n2}$ …… $r_{nj}$ …… $r_{nn}$ |

$$d_{Ki} = |X_K - X_i|\text{；}\quad d_{Kj} = |X_K - X_j|\text{。}$$

式中：$X_K$——固定样本的某一因素值；$X_i$——第$i$种采矿方法的相应因素值；$X_j$——第$j$种采矿方法的相应因素值。

据上述，即可计算出相似优先比$r$：

$$r_{ij} = d_{Ki}/d_{Ki} + d_{Kj}\text{；}\quad r_{ji} = 1 - r_{ij}$$

从而得到模糊关系矩阵$\underset{\sim}{R}$（见表2-6-2）：

$$R = (r_{ij})_{n\times n},\quad r_{ij}\in[0,\ 1],\quad i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\text{。}$$

$r_{ij}$满足如下要求：（1）若$0.5<r_{ij}\leqslant 1$，则$X_i$优于$X_j$；（2）若$0\leqslant r_{ij}<0.5$，则$X_j$优于$X_i$；（3）若$i=j$，则$r_{ij}=r_{ji}=1$。

对每个因素$C_i(i=1,2,\cdots,m)$，都可以计算出对应的相似关系$R_i(i=1,2,\cdots,m)$。

据$R_i$值，可对每个矩阵顺序由大到小选取$\lambda$值，$\lambda\in[0,1]$。将$\lambda$值与矩阵中各元素值相比较。当元素之值大于或等于$\lambda$时，该元素值变为1。以首先达到全行为1的$\lambda$-截矩阵所对应的采矿方法与设计矿山最相似，并记以序号“1”。删除该采矿方法的影响，亦即删去该行及所对应的列。再选取$\lambda$值，依次求出相似的采矿方法，分别记以序号2、3、4等等。序号越小，其相似程度越高。

序号表示各种采矿方法对应的各因素与所设计矿山的相似程度。将各序号求和，则表示这些因素综合起来的相似程度。和数越小，说明该采矿方法与设计矿山越相似。据此，可以排出各种采矿方法的适用顺序，如表2-6-3。适当地选取一个“阈值”可初选出一组可供采用的采矿方法。

初选的结果　　表2-6-3

| 因素 | | $C_1$ $C_2$ …… $C_j$ …… $C_m$ | 序号和 |
|---|---|---|---|
| 采矿方法 | $A_1$ | $a_{11}$ $a_{12}$ …… $a_{1j}$ …… $a_{1m}$ | $\sum_j a_{1j}$ |
| | $A_2$ | $a_{21}$ $a_{22}$ …… $a_{2j}$ …… $a_{2m}$ | $\sum_j a_{2j}$ |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | $A_i$ | $a_{i1}$ $a_{i2}$ …… $a_{ij}$ …… $a_{im}$ | $\sum_j a_{ij}$ |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | $A_n$ | $a_{n1}$ $a_{n2}$ …… $a_{nj}$ …… $a_{nm}$ | $\sum_j a_{nj}$ |

2.用模糊关系方程推测技术经济指标

设计矿山采用初选采矿方法后的技术经济指标，要从类似条件的矿山统计数据中选取。因为矿床赋存条件变化很大，这种类似条件仅仅是“类似”，不可能“相等”，因而所选取的数据要加权计算，即

$$Y=\sum_i^n W_iX_i \tag{2-6-1}$$

式中：$Y$——所设计矿山的某项指标；$W_i$——类似条件的生产矿山所具有的权值；$X_i$——类似条件的生产矿山的对应指标；$n$——选用的生产矿山数。

权值$W_i$的大小，取决于有关的地质条件和开采技术条件。如某一采矿方法的采准比，主要取决于矿体倾角、厚度及赋存稳定性等因素。因此，可列出线性关系：

$$B=W\cdot A \tag{2-6-2}$$

或

$$(b_1b_2\cdots b_m)=(W_1W_2\cdots W_m)\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}.$$

式中：$b_i$——所设计矿山的地质开采条件，如围岩稳固性，矿石稳固性等等；$a_{ij}$——类似生产矿山的地质采矿条件；$W_i$——各生产矿山的权。

将上述诸值用相对值表示，使各值在[0，1]区间内。例如，普氏系数$f$被其最大值20除，表示矿岩是稳固的隶属度。这样线性关系式（2-6-2）就变成了一个模糊关系方程，根据已知的地质条件$B$、$A$，便可求出数值$W$。

为解算模糊关系方程，必须采用“徐罗曹李法”（参阅汪培庄著《模糊集合论及应用》）。此法首先将前述的模糊关系方程$A$矩阵的各列按$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_m$的次序标准化排列；然后用$b_j$上铣第$j$列，求下确界；再经过本铣，在所得的矩阵中逐行划去大于上界（即下确界）的元素；最后在所得的矩阵的每一列中，选定一个非空白、且未被划去的元素，对这些元素逐行取上确界，得到一组“拟最小解”。在这些拟最小解的基础上进行筛选，即可求出方程的解。

若方程无解，则删除或置换$A$中的某一生产矿山，直到有解为止。

根据求出的$W$值，从方程（2-8-1）中即可推测出初选的采矿方法的技术经济指标。

3.用多目标决策进行最终选择

对初选出的一组采矿方法，可据推测出的技术经济指标，按传统的方法计算出各种采矿方法的效果。这包括：（1）以价值表示的采矿方法经济效果指标，如采出矿石成本、最终产品成本、盈利等；（2）劳动生产率指标；（3）矿石和有用成分的实际损失指标；（4）其它如矿块生产能力、回采强度、采准切割工作量等等。由于上述指标的单位不同，互相间没有可比性，故必须用多目标决策，从初选出的采矿方法中最终选出最优的采矿方法。此过程可编成程序，由计算机来完成。

设被评价的采矿方法数目为$n$，每种采矿方法的效果指标数目为$m$。用$f_i$表示每个效果指标，则$n$个方法的指标组成一个$n\times m$阶的矩阵：

$$F=(f_{ij})_{n\times m}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1j} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2j} & \cdots & f_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1} & f_{i2} & \cdots & f_{ij} & \cdots & f_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nj} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}6\text{-}3)$$

由于$f_i$代表各种不同类型的单位，需要使其无量纲化。这里，采用相对偏差$b_{ij}$的方法，即

$$b_{ij}=\frac{|f_i^0-f_{ij}|}{f_i^0}$$

式中：基准值$f_i^0=\max f_i$或$\min f_i$。

这样，$F$矩阵转化为$B$矩阵：

$$B=(b_{ij})_{n\times m}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \quad (2\text{-}6\text{-}4)$$

则综合性指标$K_i$可按下式计算：

$$K_j=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(b_{ij})^2} \qquad j=1,\ 2,\ \cdots n。$$

$K$值最小的方案，便是最优方案。

若要区别对待各个指标的重要性，则需添加相对重要性系数$V_i$。这时综合性指标$K_j$的算式：

$$K_j=1/W_{cp}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(b_{ij}V_i)^2} \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

式中：

$$W_{cp}=\sum_{i=1}^{m}(V_i)/m。$$

## 二、应用实例

某铜铁矿床，倾角60°～70°，平均厚50m。矿体连续性好，形状较规整，地质构造简单，矿石以含铜磁铁矿为主，较致密坚硬，$f=8\sim12$，中等稳固。上盘围岩为大理岩，

**综合技术经济指标** 表 2-6-4

| 序号 | 指标名称 | | 符号 | 单位 | 方案比较：有底柱分段崩落法 | 无底柱分段崩落法 | 水砂充填法 | 胶结充填法 | 计算方法 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 采场生产能力 | | | 吨/日 | 216.42 | 300 | 163.6 | 71.92 | 模糊变换 |
| 2 | 劳动生产率 | | | 吨/工班 | 16.2 | 21.92 | 14.49 | 6.65 | 模糊变换 |
| 3 | 采准切割工作量 | | | 米/千吨 | 17.5 | 9.09 | 10.78 | 10.4 | 模糊变换 |
| 4 | 矿石回收率 | | $\eta$ | % | 83.77 | 76.83 | 94.12 | 95.14 | 模糊变换 |
| 5 | 矿石贫化率 | | $\rho$ | % | 23.39 | 15.86 | 4.64 | 7.13 | 模糊变换 |
| 6 | 服务年限 | | | 年 | 33.14 | 27.67 | 29.91 | 31.04 | $T=\frac{\eta Q}{A(1-\rho)}$ |
| 7 | 采出矿石品位 | 铜 | $\alpha'_{Cu}$ | % | 1.33 | 1.46 | 1.65 | 1.61 | $\alpha'=\alpha(1-\rho)$ |
| | | 铁 | $\alpha'_{Fe}$ | % | 24.52 | 26.93 | 30.52 | 29.72 | |
| 8 | 采出矿石品位 | 铜 | $A_{Cu}$ | 吨/年 | 5705.7 | 6263.4 | 7078.5 | 6906.9 | $A_{Cu}=A\alpha'_{Cu}$ |
| | | 铁 | $A_{Fe}$ | 吨/年 | 105190.8 | 115529.7 | 130930.8 | 127498.8 | $A_{Fe}=A\alpha'_{Fe}$ |
| 9 | 选矿回收率 | 铜 | $\varepsilon_{Cu}$ | % | 94 | 94 | 95 | 95 | 选取 |
| | | 铁 | $\varepsilon_{Fe}$ | % | 68 | 68 | 70 | 70 | 选取 |
| 10 | 选矿总回收率 | 铜 | $\varepsilon z_{Cu}$ | % | 78.74 | 72.22 | 89.41 | 90.38 | $\varepsilon z=\eta\varepsilon$ |
| | | 铁 | $\varepsilon z_{Fe}$ | % | 56.96 | 52.24 | 65.88 | 66.6 | $\varepsilon z=\eta\varepsilon$ |
| 11 | 精矿品位 | 铜 | $\beta_{Cu}$ | % | 20 | 20 | 20 | 20 | 已知 |
| | | 铁 | $\beta_{Fe}$ | % | 65 | 65 | 65 | 65 | 已知 |
| 12 | 精矿产出率 | 铜 | $\gamma_{Cu}$ | % | 6.25 | 6.86 | 7.84 | 7.65 | $\gamma=\frac{\alpha'\varepsilon}{\beta}$ |
| | | 铁 | $\gamma_{Fe}$ | % | 25.65 | 28.17 | 32.87 | 32.01 | $\gamma=\frac{\alpha'\varepsilon}{\beta}$ |
| 13 | 精矿年产量 | 铜 | $A_{jCu}$ | 吨/年 | 28812.5 | 26429.4 | 33633.6 | 32818.5 | $A_j=\gamma A$ |
| | | 铁 | $A_{jFe}$ | 吨/年 | 110038.5 | 120849.3 | 141012.3 | 137322.9 | $A_j=\gamma A$ |
| 14 | 精矿总产量 | 铜 | $Q_{jCu}$ | 吨 | 888436.56 | 814213 | 1005947 | 1018808.3 | $Q_j=\frac{\eta Q}{1-\rho}\gamma$ |
| | | 铁 | $Q_{jFe}$ | 吨 | 3646143.6 | 3343940.4 | 4217535.4 | 4293013.7 | |
| 15 | 采矿成本 | | $C_c$ | 元/吨 | 6.92 | 8.74 | 16.35 | 28.56 | 模糊变换 |
| 16 | 选矿成本 | | $C_x$ | 元/吨 | 9 | 9 | 9 | 9 | 选取 |
| 17 | 采选总成本 | | $C$ | 元/吨 | 15.92 | 17.74 | 25.35 | 37.56 | $C=C_c+C_x$ |
| 18 | 采选年经营费 | | $R$ | 万元/年 | 682.97 | 761.05 | 1087.52 | 1611.32 | $R=CA$ |
| 19 | 每吨矿石总价值<br>铜Cu<br>铁Fe | | $V$<br>$V_1$<br>$V_2$ | 元/吨<br>元/吨<br>元/吨 | 62.32<br>54.50<br>7.82 | 68.41<br>59.82<br>8.59 | 78.4<br>68.37<br>10.03 | 76.47<br>66.71<br>9.76 | $V=V_1+V_2$<br>$V_1=\gamma_{Cu}P_{Cu}$<br>$V_2=\gamma_{Fe}P_{Fe}$ |
| 20 | 企业年总产值 | | $E$ | 万元/年 | 2673.53 | 2934.79 | 3363.36 | 3280.56 | $E=VA$ |
| 21 | 企业年盈利 | | $S$ | 万元/年 | 1990.56 | 2173.74 | 2275.84 | 1669.24 | $S=E-R$ |

注：工业储量指标均相同且已知。

岩溶发育，$f=7\sim9$；下盘为矽卡岩化斜长岩及花岗闪长斑岩，稳固性差。矿石品位高，平均含铜1.73%，含铁32%，矿山设计年产量为49.2万吨。地表允许陷落。

1.方法初选

根据国内各生产矿山的资料对19种采矿方法的适用条件整理成表，以作为计算机的运算数据。用计算机算出各因素模糊关系矩阵$\underset{\sim}{R}$，进一步求出各因素的序号及各采矿方法的序号和，从而初选出一组采矿方法：有底柱分段崩落法、无底柱分段崩落法、水平分层水砂充填法和胶结充填采矿法。

2.技术经济指标：

为了推测各采矿方法在所设计矿山的技术经济指标，选取了具有类似条件的生产矿山。根据它们的矿岩稳固性、矿体厚度和倾角，可用方程（2-6-2）的模糊关系方程解算，再用方程（2-6-1）求出各种技术经济指标。有关各种采矿方法的技术经济指标推测结果见表（2-6-4）。

3.综合分析比较

据计算出的综合技术经济效果，再就盈利、回收率、劳动生产率及采准切割工作量四项指标进行多目标决策。计算结果列于表2-6-5。

从表2-6-5可知，水砂充填采矿法的综合指标$K_j=0.156$，小于其它三种采矿方法的综合指标。说明此法最佳。此结果与传统设计方法一致。

**多目标决策** 表 2-6-5

| 采矿方法 | 代号 | 年盈利额（万元/年） | 矿石回收率（%） | 劳动生产率（吨/工班） | 采切工程量（米/千吨） |
|---|---|---|---|---|---|
| 有底柱分段崩落法 | Ⅰ | 1990.56 | 83.77 | 16.2 | 17.5 |
| 无底柱分段崩落法 | Ⅱ | 2173.74 | 76.83 | 21.92 | 9.09 |
| 水砂充填法 | Ⅲ | 2275.84 | 94.12 | 14.49 | 10.78 |
| 胶结充填法 | Ⅳ | 1669.24 | 95.14 | 6.65 | 10.4 |
| 相对偏差 $b_{ij}$ | | | | | |
| | Ⅰ | 0.125 | 0.112 | 0.261 | 0.925 |
| | Ⅱ | 0.045 | 0.193 | 0 | 0 |
| | Ⅲ | 0 | 0.011 | 0.339 | 0.186 |
| | Ⅳ | 0.267 | 0 | 0.697 | 0.144 |
| 权数 | | 5 | | 1 | 1 |
| $(b_{ij}W_i)^2$ | | | | | |
| | Ⅰ | 0.391 | 0.13 | 0.068 | 0.856 |
| | Ⅱ | 0.051 | 0.335 | 0 | 0 |
| | Ⅲ | 0 | 0.001 | 0.115 | 0.036 |
| | Ⅳ | 1.782 | 0 | 0.486 | 0.021 |
| | | $\Sigma(b_{ij}W_i)^2$ | 综合性指标$K_j$ | | |
| | Ⅰ | 0.532 | 0.292 | | |
| | Ⅱ | 0.386 | 0.249 | | |
| | Ⅲ | 0.152 | 0.156 | | |
| | Ⅳ | 2.289 | 0.605 | | |

## 三、结　论

采矿方法选择是一个模糊决策问题，需要从许多模糊不清的因素中判别。运用模糊数学原理，提出一种新的多目标决策方法，为采矿方法的选择提供了一条新途径。

实际计算表明，此法是成功的。

## §2-7　采矿方法选择的专家咨询系统[26]

1986年，阮孟伍论述了采矿方法选择常采用“素质决策法”的优缺点。为了实现科学的决策方法，把素质决策和数量决策结合起来，应用模糊数学原理，建立矿山采矿方法选择的专家咨询系统，填补了我国采矿科学技术在人工智能领域中的一项空白。对此作出初步探讨是很有现实经济意义的。

### 一、引　言

在人们的一切生产、设计和科学研究的活动中，都存在着一个决策过程。当科学的决策理论和方法还没有被人们所认识、所掌握的时候，决策过程往往是决策者凭借自己的丰富的实践经验和聪明才智在进行着。这一方法通常称之为“素质决策”。在采矿工程中，那些难以用数量表达的定性分析或仅能靠丰富的实践经验确定重要性系数的时候，传统的素质决策更显示了它的优越性。但是，在多因素、多目标决策中，由于众多复杂因素的相互影响以及目标之间的相互联系和制约，靠经验往往不能进行科学的分析和全面的衡量，难免出现主观随意性和片面性。一旦决策失误，甚至会造成严重后果，这样的教训是不少的。因此，在素质决策的同时，如何对复杂的影响因素进行系统的层次分析，如何用目标之间的数量关系揭示其内在联系和制约的规律，建立衡量准则，这就是称之为“数量决策”的方法。只有把素质决策和数量决策结合起来，才能成为科学的决策方法。

正确地选择采矿方法是一项极其重要而复杂的决策过程。因为采矿方法不仅对地下资源的回收程度、投资大小、劳动生产率高低和矿石开采成本等主要技术经济指标有影响，而且还影响着工作安全，生产规模、矿石加工的经济效果。也因为矿床的赋存条件及矿石围岩的物理化学性质千变万化，在实际生产中所采用的采矿方法多种多样，使采矿方法选择变得很复杂。

地质采矿技术条件及技术经济指标的不确定性、不精确性和采矿方法选择的复杂性，反映了采矿方法选择中客观上存在着大量的模糊性概念问题。特别是专业人员凭借自己的经验作出的判定，实质上是人脑对模糊事物作出模糊推理、模糊评定、判断。因此，运用模糊数学理论，建立数学模型，对采矿方法选择中的模糊性进行定量分析，把素质决策与数量决策结合起来，探索和建立在矿业工程中应用人工智能领域中的专家咨询系统，并用多个实例计算加以验证，为正确选择采矿方法提供一条新途径、新方法。

### 二、数 学 模 型

1.提出几种初选采矿方法：

众所周知，在平面直角坐标上，对$x$，$y$两个因素在{0，1}中取值，若“有”此因素

则取为"1"，若"无"，则取值为"0"。显然有四种不同的情况：（0，0），(0，1)，(1，0)，(1，1)。即平面直角坐标上的四个点。

在选择采矿方法时，考虑的因素很多。如矿体的厚度，倾角、矿岩稳固性，矿体形态、结块与发火以及它们中可能存在的交互影响等。

如果说有$n$个因素影响采矿方法的选择，那么根据它们的"有"与"无"取值，有$2^n$种不同情况。也就是说在$n$维欧氏空间中具有$2^n$个点，分别以$x_1$，$x_2$，$\cdots x_{2^n}$表示。我们可以把这$2^n$种情况叫做矿体特征群。这个特征群，就是选择采矿方法时所考虑的论域$X$。可见，在这个特征群里，我们可以找到为所有矿山选择采矿方法时，由某些因素所组成的某个点$x_i$。当把不同的采矿方法看成论域$X$的模糊子集$\underset{\sim}{A}_j$时，我们的最终目的就是要确定论域$X$中的某个元素$x_i$以多大的隶属度属于那个模糊子集$\underset{\sim}{A}_j$。所谓隶属度，是表示$x_i$隶属于某采矿方法$\underset{\sim}{A}_j$的隶属函数值。也就是$x_i$隶属于某采矿方法$\underset{\sim}{A}_j$的可能性程度的大小。我们以$\mu_{\underset{\sim}{A}_j}(x_i)$表示隶属函数。因此，根据最大隶属原则，求出隶属函数值中的最大值，则所对应的采矿方法就是选择的结果。

其计算步骤如下：

1）计算得分向量

$$D=(x_i)(A_i)=(d_j)$$

其中：$(x_i)$为$i$矿山地质采矿技术条件的特征向量；$(\underset{\sim}{A})$为模糊子集的权矩阵。

2）选取最大隶属度

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_j}(x_i)=\max\frac{(d_j)}{Q}\quad(j=1,2,\cdots,m)$$

其中：$Q=ak$表示各类最高数值之和；$a$表示权值的最高分；$k$表示$n$个因素所属类别总数；$m$表示采矿方法总数。

一般情况下，可以选择隶属度较大的2～3种采矿方法，供第二步进行详细的评价，作最后的决择。

2.选择最佳采矿方法方案

用上述方法选取出几种采矿方法后，还需要对这些方法进行具体的详细的方案设计，提出和计算出各种重要的技术经济指标。并进行综合分析与评审，选出最佳采矿法方案，付诸实施。

若有$n$个方案，每个方案均有$m$个不同的技术经济指标。由于各种技术经济指标的重要性不同，赋予不同的权值$a$。

因为技术经济指标是多种多样的，使用的单位不一致，为了能够对比不同方案的优劣起见，需采用无量纲值。对于不同方案的同一指标项，可用下式（视具体情况用不同的线性的或非线性的）确定其隶属函数，实现无量纲化。

1）对于指标值以大为优时

$$\mu_{ij}=\frac{E_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}E_{ik}}\quad(i=1,2,\cdots,m\quad j=1,2\cdots,n)$$

2）对于指标值以小为优时

$$\mu_{ij}=1-\frac{E_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}E_{ik}}$$

式中：$E_{ij}$表示第$j$个方案第$i$项的技经指标值。

计算结果可得包含有$n$个方案、$m$个指标的一个模糊关系矩阵$\underset{\sim}{R}$。把$\underset{\sim}{R}$作为模糊变换器，用权向量$\underset{\sim}{A}$左乘，则得模糊评定结果：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{R}$$

根据最大隶属原则，选出$\underset{\sim}{B}$中元素最大值所对应的方案，为我们最后选定的最佳方案。

## 三、权矩阵的确定

从上述可知，确定权矩阵是极为重要的，它关系到所选采矿方法的成败。在权矩阵中，必须列出影响选择结果的重要因素，并对这些因素在各种采矿方法中的适用程度作出符合实际的判断。这需要矿业界的专家们共同努力，把他们的科学思想和丰富的实践经验反映到矩阵中来。一旦确定，存于计算机内。那么矿山技术人员、设计研究人员就可以充分利用专家们的智慧选择采矿方法。这就是我们矿业工程中人工智能领域里的一个重要的专家咨询系统，也是整个矿山系统的一个组成部分。

1.权矩阵的内容和权值的确定

权矩阵的内容主要是依据那些影响采矿方法选择的因素来确定的。而在这些因素中，譬如某种采矿方法适用于急倾斜矿体，但对极厚的水平矿体却也能采用的情况下，考虑矿体的厚度和倾角间的交互作用往往十分方便。权矩阵如表2-7-1的形式。

表 2-7-1

| 因素类号 \ 因素名称 \ 采矿方法 | | 全面法 | 房柱法 | 留矿法 | ………… | ………… |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | ………… | $A_m$ |
| 1 | 薄矿体×水平$x_1$<br>$x_2$<br>⋮ | | | | | |
| 2 | ⋮ | | | | | |
| 3 | ⋮ | | | | | |
| ⋮<br>$K$ | ⋮<br>$x_n$ | | | | | |

权值的确定要考虑各方法对各因素的适用程度，赋以不同的权值，最合适的方式赋以最高的权值，不太合适的赋以低的权值，完全不适合的甚至赋以负权值。可以理解，权矩阵的确定是以相应的科学技术水平为背景。在某一时期有其相对的稳定性。但是，随着科学技术的进步，权矩阵会随着权值变化而相应有所改变。

2.地质条件和采矿条件的特征向量

根据地质条件和采矿条件要求，对应于表2-17-1中的因素赋值。若"有"记为"1"，若"无"记为"0"。其形式如表2-7-2。

表 2-7-2

| 因　　素 | $x_1$　$x_2$　$x_3$　$x_4$ ……………………………… $x_n$ |
|---|---|
| 赋　　值 | 1　0　0　1　0　1………………………………1 |

## 四、实　例

例 1　某矿矿石中稳、围岩中稳以下，倾角70°，厚度30米，富矿，分布均匀，含硫6%不发火，遇水有结块性，初期地表有露天采场同时生产，重选期2～3年。

经所提供方法处理，选用充填法是较为合适的采矿方法。与实际符合。

例 2　某铅锌矿床有三个矿体都赋存在中厚层大理岩中，矿体为顺层分布的似层状或脉状矿床。Ⅰ号矿体长385米，厚平均4.89米，倾角平均36°，为块状及浸染状黄铁，磁黄铁铅锌矿石。

经处理，选用全面采矿法是合适的。与实际符合。

例 3　某铜铁矿床，品位较高，走向长350米，倾角60°～70°，平均厚度50米，矿石中等稳固，围岩稳固性较差，地表允许陷落。

经选择，初步选用上向水平分层充填法，分层崩落法，分段崩落法作进一步的技术经济分析。而根据传统方法选择，并作详细的技术经济分析，该矿选用矿房尾砂分层充填，矿柱分段崩落法的采矿方法方案。可见，采用专家咨询系统和传统方法，基本是一致的。

表 2-7-3

| 指　　标 | 方案 | | | 权 |
|---|---|---|---|---|
| | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | |
| 矿井生产能力　百万吨/年 | 1.5 | 2.4 | 1.2 | 18.5 |
| 矿井服务年限　年 | 50 | 45 | 75 | 11 |
| 回采工作面生产能力　吨/日 | 800 | 650 | 1200 | 17.5 |
| 动力配备　千瓦/人 | 65 | 54 | 40 | 12.5 |
| 巷道掘进速度　米/月 | 110 | 90 | 140 | 8 |
| 技术工艺系统可靠性 | 0.8 | 0.75 | 0.78 | 10 |
| 建井工期　月 | 60 | 84 | 78 | 14 |
| 巷道工程量，米³/千吨 | 170 | 185 | 200 | 14.5 |
| 工业建筑工程，米³/千吨 | 100 | 80 | 120 | 11.5 |
| 巷道维护长度，米/千吨 | 24 | 20 | 30 | 11.5 |
| 损失率，% | 14 | 10 | 16 | 5 |
| 矿井劳动生产率，吨/月人 | 160 | 140 | 200 | 18.5 |
| 盈　利% | 5.6 | 21.3 | 7.4 | 19.5 |
| 成　本，卢布/吨 | 7.5 | 8 | 9 | 15.5 |
| 建设预算费，百万卢布 | 40 | 70 | 50 | 13 |
| 单位基建费，卢布/吨 | 26.5 | 29.2 | 41.6 | 14.5 |
| 煤的价格，卢布/吨 | 9 | 14 | 12 | 11.5 |
| 劳动装备程度，卢布/人 | 14 | 24 | 9.2 | 10 |
| 折算费用，卢布/吨 | 10.2 | 10.9 | 13.2 | 16 |

**例 4** 西班牙鲁别尔斯矿，年产铅锌矿石约100万吨。矿体由碳酸盐和碎屑岩类组成，平均厚度5米，矿体倾角近90°，矿岩稳固。该矿初步设计曾考虑用深孔空场法和水平分层充填法，经重新估价而改用VCR法。

经所提出的方法选择前三种采矿方法，其结果为(1)VCR法；(2)深孔留矿法；(3)上向水平分层充填法。可见两者也是一致的。

**例 5** 设有三种方案提供决策，其技术经济指标如表2-17-3所列。为了确定各指标的权值，苏联采用了专家调查法，向生产技术人员、采矿设计人员、经济工作专家和科研人员共90人，按20分制评定、汇总后取平均值，其结果也列于表2-7-3。

根据上述算式可知，其权向量

$\underset{\sim}{A}$ = (18.5, 11, 17.5, 12.5, 8, 10, 14, 14.5, 11.5, 11.5, 5, 18.5, 19.5, 15.5, 13, 14.5, 10, 16)。

其隶属函数矩阵为：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.294 & 0.471 & 0.235\\ 0.294 & 0.265 & 0.441\\ 0.302 & 0.245 & 0.453\\ 0.591 & 0.660 & 0.749\\ 0.323 & 0.265 & 0.421\\ 0.800 & 0.750 & 0.780\\ 0.730 & 0.622 & 0.649\\ 0.694 & 0.666 & 0.640\\ 0.666 & 0.734 & 0.600\\ 0.676 & 0.730 & 0.595\\ 0.650 & 0.750 & 0.600\\ 0.320 & 0.280 & 0.400\\ 0.163 & 0.621 & 0.216\\ 0.694 & 0.674 & 0.633\\ 0.750 & 0.562 & 0.687\\ 0.728 & 0.700 & 0.572\\ 0.257 & 0.400 & 0.343\\ 0.297 & 0.508 & 0.195\\ 0.703 & 0.682 & 0.615\end{bmatrix}$$

则

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{R}=(128.231,\ 138,\ 522,\ 127.077)$$

$$\underset{\sim}{B}'=(0.326,\ 0.352,\ 0.322),\ （归一化）$$

根据最大隶属原则，故第Ⅱ方案为首选。

## 五、结　论

（1）随着计算机科学的发展和模糊数学的兴起，人工智能是近几年来发展起来的又

一门新兴学科。由于模糊数学能够模拟人脑的思维方法，人工智能也得到了广泛的应用。在我国矿业界的专家咨询系统目前还是一个空白，有待专家们去开发，建立具有我国特色的专家咨询系统。

（2）权矩阵的建立非常重要，其准确程度取决于矩阵的内容是否符合实际。特别是矿山地质条件千变万化，采矿方法多种多样和人们对选择采矿方法的不同要求，使得这一工作变得更加复杂艰巨。因此，权矩阵的建立不仅需要正确地确定权值的大小，还必须对赋权内容作进一步研究、补充和完善。

（3）利用此系统，大大加快了采矿方法选择的速度，并提高了可靠性。

（4）凭经验的定性方法应该在选择采矿方法过程中，始终予以重视，以便比较。

## §2-8 缓倾斜煤层合理开采方式的多目标综合评价[28]

1986年，左秀峰、张先尘以最常见的缓倾斜煤层为对象，以大屯徐庄煤矿为典型，对井田合理开采方式作了系统分析，研究讨论了多目标评价及多级参数分级决策方法，对开采方式的各种方案进行优选的问题，编制了适合于缓倾斜密距煤层的合理井田开采方式多目标评价的计算机程序。同时结合大屯徐庄煤矿的条件做了具体分析和评价，获得了有理论和实际意义的成果。

正确确定井田开采方式（定义井田开采方式为水平和采区准备及工作面回采方式的总和）是煤矿设计、建设和生产中的重要问题。合理的井田开采方式随着生产经验的不断积累和开采技术的进步而不断发展。

我国许多矿井对改革井田开采方式有丰富的实践。一些院校及设计、研究单位作了大量的研究工作，从工作面的参数设计到采区的系统设计；从走向长壁和倾斜长壁采区设计到走向长壁跨多组上山的开采设计；研究了综合优化及多目标决策的方法；构造了经济数学模型；提供了合理的开采方式及发展趋势，为进一步研究奠定了基础。但在这些研究中，多数采用的是单目标评价，而采用多目标评价时也仅构造了单目标的经济数学模型，不能保证不漏掉多目标综合效果好的方案；在综合优化中，考虑了各参数之间的联系，却忽视了各参数之间重要性程度的差别；对实施决策的可能性和可靠性也缺乏研究。鉴此，我们应用系统工程方法和模糊数学方法对这些问题做了初步探讨。

### 一、合理确定井田开采方式的过程

如图2-8-1所示，在提出问题之后，首先明确解决问题所要达到的目标。而后就要对与问题有关的地质、技术和经济等条件进行分析和预测，确定最优性准则，对可能方案进行初步的技术论证。根据多目标的最优化准则构造出反映各方案优劣程度的技术经济数学模型，最后应用决策理论对各方案做决策分析，选用最优或次优方案供决策者参考。由于环境条件的复杂性和动态性，在决策实施过程中还会遇到许多新情况和新问题。这些信息的及时反馈能导致对决策的重新研究，以便对原定的技术决策做出适当的修改和调整。

合理确定井田开采方式有如下多项目标：(1)合理集中生产；(2)简化巷道系统；(3)减少吨煤生产费用；(4)提高回采率；(5)减少巷道维护工作量；(6)保证采掘接替正常；

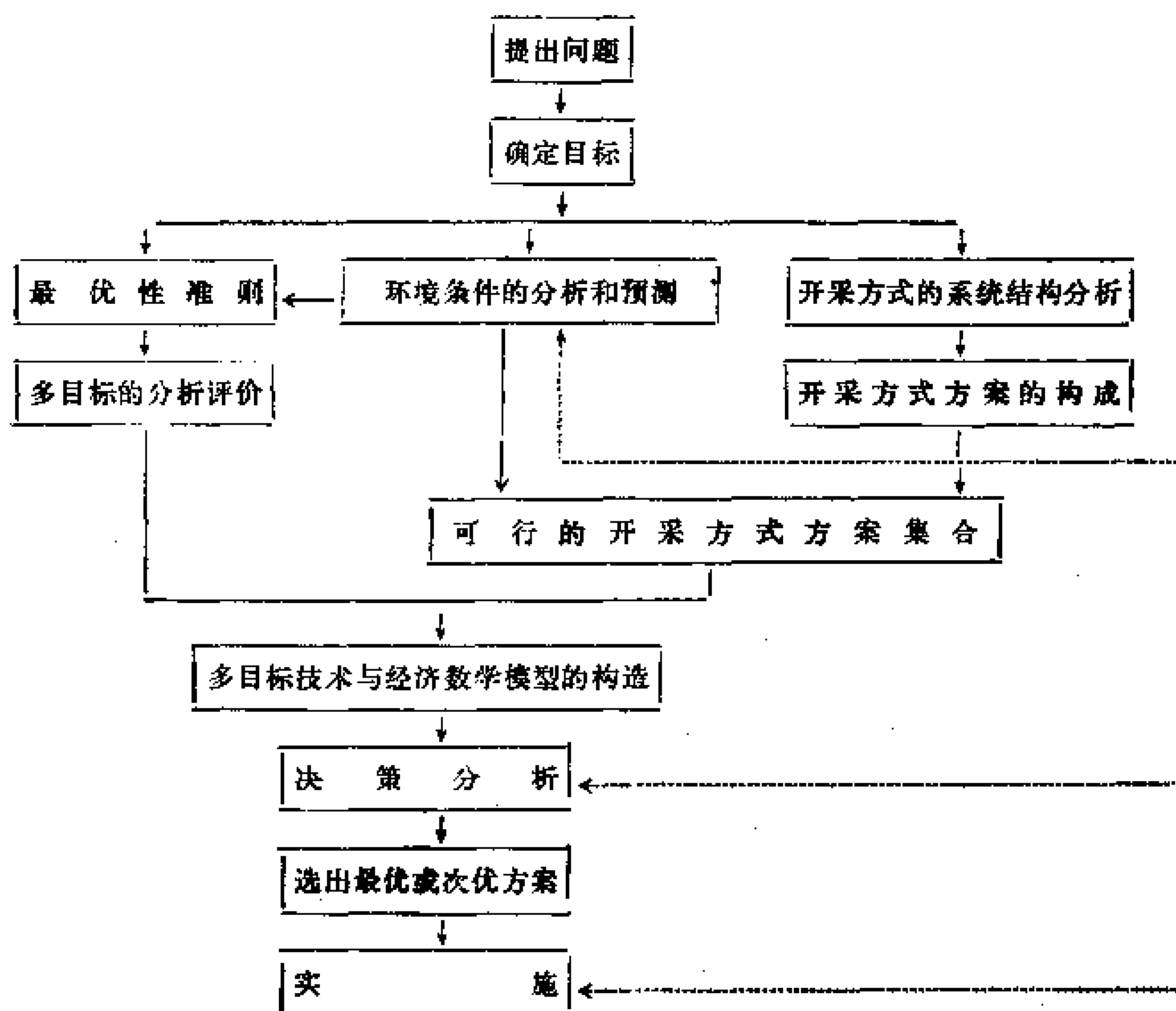



图 2-8-1 合理开采方式的确定过程

(7)保证生产系统的可靠性；(8)为井下生产安全可靠性创造条件。

## 二、开采方式工艺模型的构造

一般的单双翼布置采区和倾斜长壁采区已有明确的概念。而本文关于连续式回采的采区概念为：水平内由工作面连续回采的煤层块段组成的，具有完整的最小生产系统所服务的范围称为采区；具有一个独立的主要生产系统的块段称为小分区。

开采方式的不同方案是由表2-8-1中的各参数的变化构成的(图2-8-2)。

图2-8-2还只是开采方式组成参数之间的机械组合。实际上有些参数之间的组合是不能成立的；有些参数之间的组合虽然成立，但从技术经济上看是非优的。通过对参数之间相容性分析，排除那些不能成立的参数组合及技术经济上明显非优的组合方案，即得到一般的开采方式方案构成的参数组合逻辑图2-8-3。

对于这样复杂的问题，除个别情况外，一般只靠经验的技术论证是不能确定哪个方案较优，哪个方案较差。这就要求根据开采方式技术经济合理性的确定目标，研究制定一套定量计算评价方法，帮助人们确定评选出较优的方案。

## 三、开采方式的评价指标及目标函数的建立

1.合理确定开采方式的评价指标

依据开采方式合理确定的多项目标．定出评价开采方式优劣的标准如下：

1）吨煤生产成本$SF$反映了生产的综合经济效果，是较重要的指标。

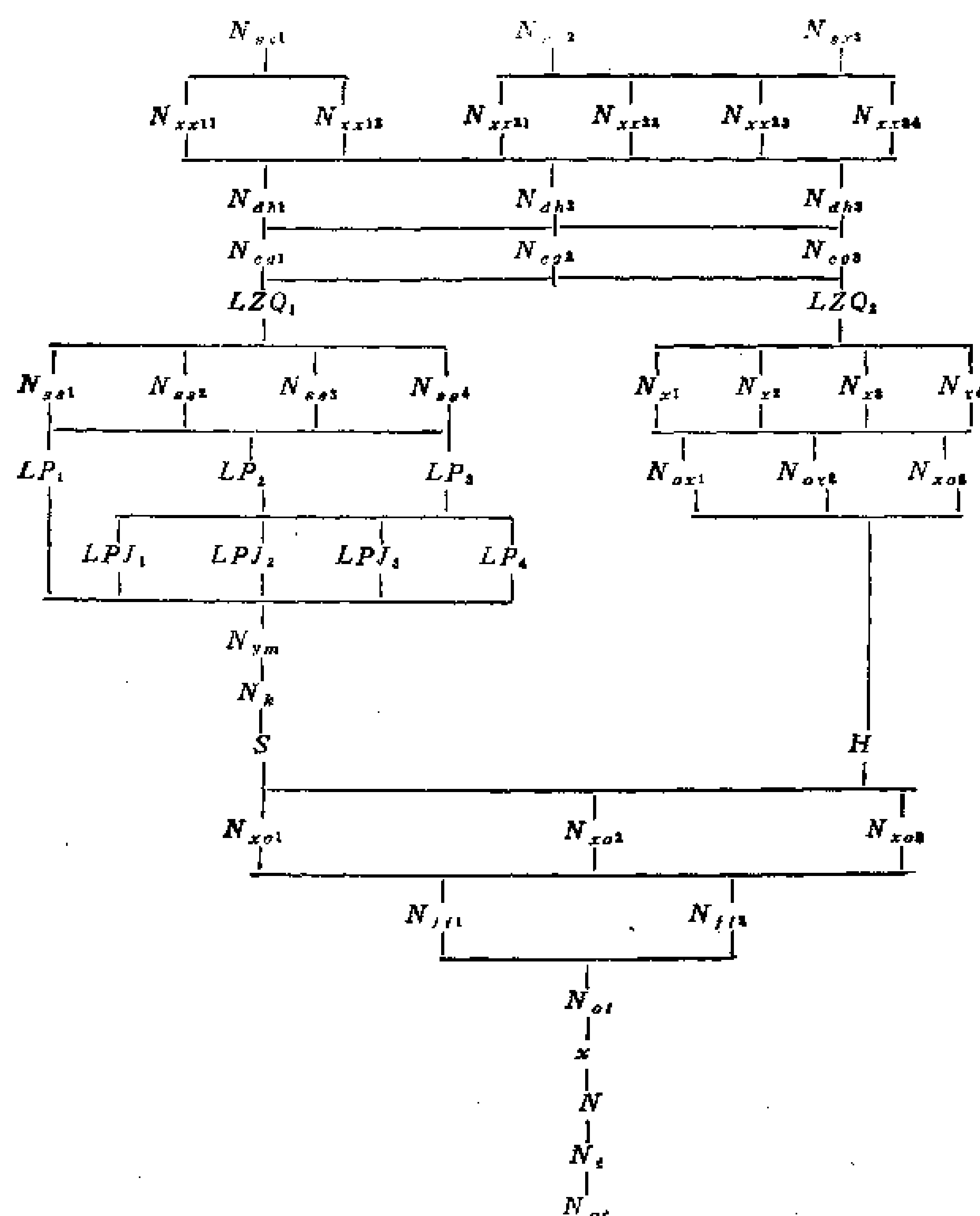


图 2-3-2　开采方式的参数组合

2）生产能力$A_t$反映了矿井集中生产程度，反映了对社会产生效益的大小。由于能源紧张，生产能力越大，给社会带来的效益也越大。

3）初期准备工作量$CL$反映了初期投资的多少。由于资金有限，人们总是希望以较少的投资达到同一目的。

4）准备工期$CT$反映了投资发挥效益的滞后时间。投资发挥效益的时间越早，则带来的经济效果就越好。

5）生产服务年限$TY$反映了生产稳定性的大小，对采掘接续有很大影响。

6）回采率$C$反映了资源利用情况。

7）生产劳动安全条件系数$S$反映了矿井生产条件的好坏和生产可靠性的大小。

2.多目标函数的建立

按评价指标，建立多目标函数如下：

$$G=\{G_1,G_2\cdots,G_7\} \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

$$G_1=SF=FJ+WF+YF+AF+YFf+BF+GF+PF \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

式中：$SF$——吨煤生产成本；$FJ$——巷道掘进费；$WF$——巷道维护费；$YF$——煤炭

## 决策参数符号说明

表 2-8-1

| 决策参数 | 参数取值 | 意义 |
|---|---|---|
| $N_{sx}$ | $N_{sx_1}$ | 上山开采 |
| | $N_{sx_2}$ | 下山开采 |
| | $N_{sx_3}$ | 上下山同采 |
| $N_{xx}$ | $N_{xx_{11}}$ | 上山进回风大巷分列布置 |
| | $N_{xx_{12}}$ | 上山进回风大巷并列布置 |
| | $N_{xx_{21}}$ | 下山进回风大巷并列布置 |
| | $N_{xx_{22}}$ | 保留上山巷道为下山的回风巷道 |
| | $N_{xx_{23}}$ | 进回风大巷并列布置、并增设一条下山集中进风排水大巷 |
| | $N_{xx_{24}}$ | 利用上山回风，并增设一条下山集中进风，排水大巷 |
| $N$ | | 区段个数 |
| $x$ | | 工作面长度 |
| $N_{dh}$ | $N_{dh_1}$ | 大巷分层布置 |
| | $N_{dh_2}$ | 大巷分组集中布置 |
| | $N_{dh_3}$ | 大巷大集中布置 |
| $LZQ$ | $LZQ_1$ | 走向长壁采煤 |
| | $LZQ_2$ | 倾向长壁采煤 |
| $N_{cg}$ | $N_{cg_1}$ | 单层布置采区 |
| | $N_{cg_2}$ | 分组联合布置采区 |
| | $N_{cg_3}$ | 大联合布置采区 |
| $N_{xo}$ | $N_{xo_1}$ | 留设区段煤柱布置 |
| | $N_{xo_2}$ | 沿空送巷布置 |
| | $N_{xo_3}$ | 沿空留巷布置 |
| $N_{jj}$ | $N_{jj_1}$ | 单工作面布置 |
| | $N_{jj_2}$ | 对拉工作面布置 |
| $N_{ot}$ | $No_z$ | 综采工作面个数 |
| | $No_g$ | 高普工作面个数 |
| | $No_l$ | 普采工作面个数 |
| | $No_p$ | 炮采工作面个数 |

| 决策参数 | 参数取值 | 意义 |
|---|---|---|
| $N_t$ | | 同采区段个数 |
| $N_{ot}$ | | 区段内同采面数 |
| 走向长壁采区 | | |
| $N_{ss}$ | $N_{ss_1}$ | 单翼后上山布置 |
| | $N_{ss_2}$ | 单翼前上山布置 |
| | $N_{ss_3}$ | 单翼区段连续前进式单组上山布置 |
| | $N_{ss_4}$ | 双翼单组上山布置 |
| $LP$ | $LP_1$ | 无区段集中平巷 |
| | $LP_2$ | 一区段设一组集中巷 |
| | $LP_3$ | 二区段设一组集中巷 |
| $LPJ$ | $LPJ_1$ | 一煤一岩集中巷 |
| | $LPJ_2$ | 双岩区段集中巷 |
| | $LPJ_3$ | 机轨合一集中巷 |
| | $LPJ_4$ | 双煤区段集中段 |
| $N_{ym}$ | | 上山组数与轨道 |
| | | 上山组数之比 |
| $N_k$ | | 采区内小分区数 |
| $S$ | | 小分区走向长度 |
| 倾斜长壁采区 | | |
| $N_{xt}$ | $N_{x_1}$ | 无集中平巷 |
| | $N_{x_2}$ | 设轨道集中平巷 |
| | $N_{x_3}$ | 设皮带集中平巷 |
| | $N_{x_4}$ | 既设轨道又设皮带集中平巷 |
| $N_{ox}$ | $N_{ox_1}$ | 无条带集中斜巷 |
| | $N_{ox_2}$ | 仅设一条集中斜巷 |
| | $N_{ox_3}$ | 一条带设一条集中斜巷 |
| $H$ | | 采区斜长 |

运提费；$AF$——通风费；$YFf$——辅助运提费；$PF$——排水费；$BF$——工作面搬家费；$GF$——工作面直接成本。

$$G_2 = A_t = No_z \cdot Ah_z + No_g \cdot Ah_g + No_j \cdot Ah_j + No_p \cdot Ah_p \qquad (2\text{-}8\text{-}3)$$

式中：$A_t$——采区生产能力；$No_z$——综采工作面同采个数；$Ah_z$——综采工作面生产能力；$No_g$——高挡普采工作面同采个数；$Ah_g$——高挡普采工作面生产能力；$No_j$——普采工作面同采个数；$Ah_j$——普采工作面生产能力；$No_p$——炮采工作面同采个数；$Ah_p$——炮采工作生产能力。

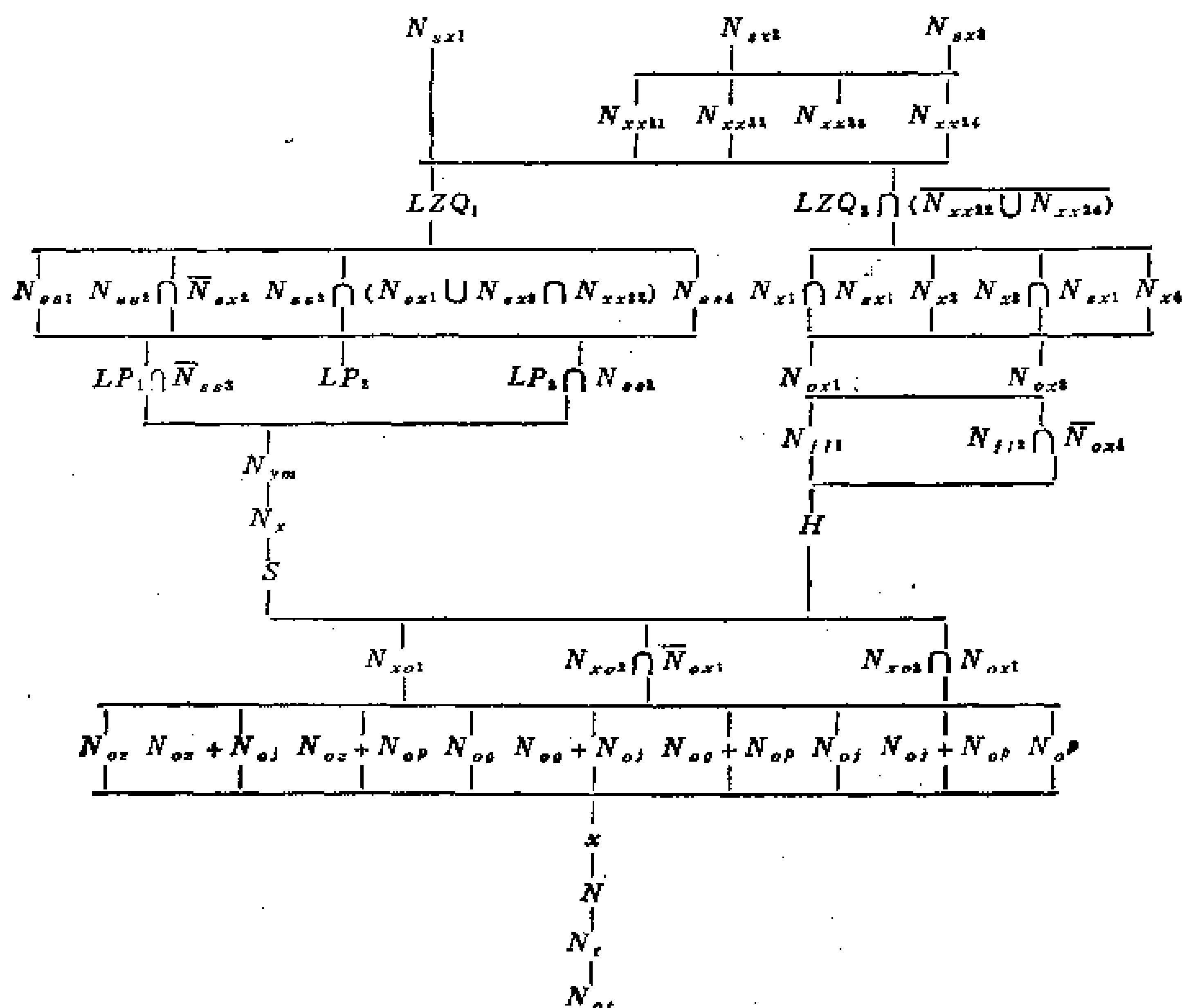


图 2-8-3　开采方式方案的参数组合逻辑图

$$G_3 = CL \qquad (2\text{-}8\text{-}4)$$

式中：$CL$——初期准备工作量。

$$G_4 = CT \qquad (2\text{-}8\text{-}5)$$

式中：$CT$——初期准备工期。

$$G_5 = TY = Z_c / A \qquad (2\text{-}8\text{-}6)$$

式中：$TY$——采区设计生产服务年限；$Z_c$——采出设计采出煤量。

$$G_6 = C \qquad (2\text{-}8\text{-}7)$$

式中：$C$——回采率。

$$G_7 = SA = SA(NO_i) \cdot SA(Nf_i) \cdots\cdots SA(N_{ss}) \qquad (2\text{-}8\text{-}8)$$

式中：$SA$——方案的生产劳动安全条件系数；$SA(NO_i)$——决策变量$NO_i$取值所对应的生产劳动安全条件系数；$SA(Nf_i)$——决策变量$Nf_i$取值所对应的生产劳动安全条件系

数；$SA(N_{aa})$——决策变量$N_{aa}$取值所对应的生产劳动安全条件系数。

## 四、决策评价方法

1.决策参数的分级决策

矿井系统的建设总是按照设计决定，先开掘井筒到井底车场，实现开拓方式、水平高度等决策，而后开掘井底车场和大巷，进行水平和采区的准备，实现大巷布置方式、采区巷道布置系统及参数等决策；之后才开切工作面进行回采，实现回采工作面设备、工艺及参数等决策。在实现各项决策的过程中，可能会因为某些因素和实际条件的变化而修改原定的设计决策，相应地要对后续的技术决策做适当的调整。而且愈是靠后的技术决策，变更的可能性愈大。为此，有必要实行分级决策，主要的出发点是：

（1）矿井是一个具有多元素、多层次的复杂系统，其元素的构成系统的层次是在系统的形成过程中依次完成和出现的。所以各取定的决策变量实际上是按照一定的空间、时间的顺序实现的。这样各决策变量在系统的形成过程中具有一系列的制约关系，先实现的决策影响到后实现的决策。因此，矿井设计应该具有序贯决策的性质。

（2）由于决策实现的概率性，优先得到的最优决策在实际中不一定实现，这样就有可能造成“最优”决策的失误。所以不分类别地评选出最优和次优方案是不够的，而应该找出各决策参数实现的转移与其效果变化之间的关系。选出效果最优，而实现的可能性又大的方案。

（3）由于各决策参数所涉及到的范围不同，重要性程度不同，其决策的实现与否对效果变化的影响是不一样的。所以要区别对待重要性程度不同的决策参数，提高较重要的决策参数决策的可靠性。

综上所述，煤矿开采方案的实现是由一组重要性程度不同的决策参数按照一定顺序实现的过程。这个过程实际上是一种多层次的、动态的控制过程。一个决策参数的选择就是一种控制。矿井设计方法只有反映出这种决策控制过程的特性，才能作出可靠的最优设计。而决策树分析方法恰恰能反映出这个过程的层次性，能方便地区别对待重要性程度不同的决策参数，并能较方便地处理决策的动态性问题。

矿井设计决策参数的分级决策方法既不同于单参数的决策，又有别于简单的综合优化决策，而是集决策参数的分析与综合于一体的系统综合决策方法。其决策步骤清晰、有层次，决策结果便于分析对比，决策变量之间的关系简要明瞭，适合于多元素、多层次的复杂系统的设计。在得到方案实施中的反馈信息后，能较容易地作出适当的调整。

分级决策方法根据决策参数的重要性，可更改的能动能及参数之间的制约关系，按照由全局性、长期性的决策到局部性、经常性的决策顺序，将决策参数分为九级(图2-8-4)。决策顺序是由下至上做决策效果分析，再由上至下做出各级参数的最优选择（图2-8-5）。

首先在第一级、第二级…第八级决策参数的控制下，对第九级决策参数进行优选，得到各方案中的最优和次优方案，再按其实现的可能性将其效果评价值加权平均，得到各类方案的综合效果评价值（类方案是指主要定性决策相同的定性方案集合，它包含若干个其它定性、定量参数不同的可行方案）。然后以此为基础，采用决策树分析方法逐级向上分析评价第八级、第七级、…，第一级决策参数。上级决策参数的决策效果评价值是由下级参数决策效果的综合而得到的。最后根据各级决策的评价值，由上而下确定各级最优和次

优决策参数，得到最优和次优的开采方式。

2.多目标的综合效果评价

对于把多目标化为单目标的理想的多目标综合效果评价方法，基本的问题是选择目标函数的标准化形式、综合效果函数形式及各目标权重系数的确定。

1）各目标函数的标准化

各目标值$G_i$（$i=1, 2, \cdots, 7$）具有不同的量纲，其标准化形式取为：

$$g_i=|G_i-G_{iopt}|/\delta_i \quad i=1, 2, \cdots, 7 \tag{2-8-9}$$

式中：$G_{iopt}$——第$i$项指标的最优值；$\delta_i$——第$i$项指标的约束值$G_{bi}$与最优值$G_{iopt}$的绝对差值；

$$\delta_i=|G_{bi}-G_{iopt}|$$

$g_i$表示了方案的第$i$项指标在最优值和最差值之间的相对优劣程度。

2）综合效果函数

$$g_{com}=\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(w_i \cdot g_i)} \tag{2-8-10}$$

$X_1$：$N_{ex1}$ $N_{ex2}$ $N_{ex3}$

$X_2$：$N_{xx11}$ $N_{xx12}$ $N_{xx21}$ $N_{xx22}$ $N_{xx23}$ $N_{xx24}$

$X_3$：$N_{dh1}$ $N_{dh2}$ $N_{dh3}$

$X_4$：$N_{cq1}$ $N_{cq2}$ $N_{cq3}$

$X_5$：$N_{ss1}$ $N_{ss2}$ $N_{ss3}$ $N_{ss4}$ LP...

$X_6$：$LP_1$ $LP_2$ $LP_3$ $N_{ox1}$ $N_{ox2}$ $N_{ox3}$

$X_7$：$N_{x01}$ $N_{x02}$ $N_{x03}$

$X_8$：$N_{ff1}$ $N_{ff2}$

$X_9$：$N_{sm}$ $N_k$ $S$ $H$ $N_x$ $N_{ol}$ $x$ $N$ $N_1$ $N_{ot}$

图 2-8-4 决策参数分级逻辑图

$X_1$ → $X_2$ …… $X_8$ → $X_1$；$X_1$ → $X_3$ …… $X_6$ → $X_9$

图 2-8-5 参数决策过程顺序图

式中：$w_i$——第$i$项指标的权重系数。

以$\min\{g_{com}\}$所对应的决策参数的决策为最优。

3）各指标权重系数的确定

针对大屯徐庄煤矿的井田合理开采方式的确定这一问题，应用Delphi法征求了大屯煤电公司30位工程技术人员对上述七项指标重要程度的评定意见。评价采用百分制，得分越多的指标越重要。由于评定指标权重系数的模糊性，采用模糊统计方法来处理专家们对指标权重系数的看法。

（1）对评价开采方式优劣程度的七项指标的权重系数，请专家用区间数$a_{ij}=[x_1, x_2]$反映出自己的观点。

（2）用模糊统计方法对专家的意见进行处理，得到各指标的模糊权重系数，其隶属函数为：

$$\mu_i(x)=m_i(x)/n \tag{2-8-11}$$

式中：$\mu_i(x)$——第$i$项评价指标模糊权重系数的隶属函数，$i=1, 2, \cdots, 7$；$m_i(x)$——在

第$i$项评价指标每一评分上，$x$出现的个数$x \in a_{ij}$（$j=1, 2, \cdots, n$）；$n$——专家的人数；$a_{ij}$——第$j$位专家对第$i$项评价指标的评定值（区间数）。$n$越大，$\mu_i(x)$越精确。

（3）根据最大隶属原则和可靠性原则，选取$\mu_i(x)$为最大值的$x$的平均值作为第$i$项指标的权重系数$W_i$

$$W_i = \sum a_i^0 / m^0 \quad (2\text{-}8\text{-}12)$$

式中：$a_i^0$——$\mu_i(x)$取最大值时各个评分值；$m^0$——$\mu_i(x)$取最大值时$a_i^0$的个数。

对大屯煤电公司工程技术人员的评定意见处理结果见表2-8-2。

评价指标权重系数的评定结果　　表 2-8-2

| 评价指标 | 生产成本 | 生产能力 | 初期准备工程量 | 准备工期 | 服务年限 | 回采率 | 生产劳动安全条件系数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 权重系数 | 90 | 90 | 70 | 60 | 70 | 70 | 90 |

3.方案效果的计算评价过程及计算机程序的编制

方案效果的计算过程见图2-8-6。

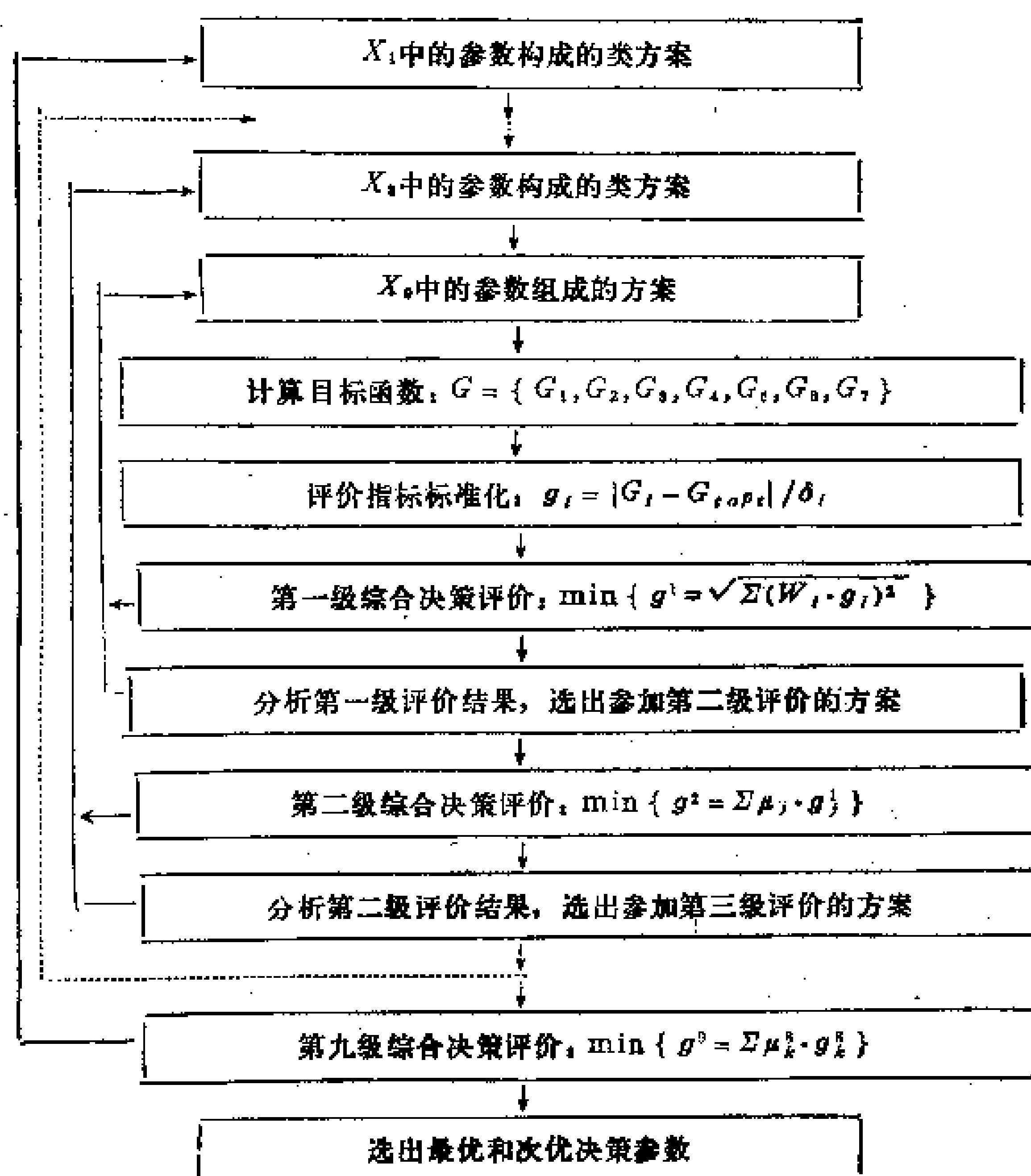



图 2-8-6　方案优劣的计算评价过程

由于开采方式方案的众多，必须借助于电子计算机来计算方案效果的各评价指标值及综合效果评价指标值。计算机程序框图见图2-8-7。

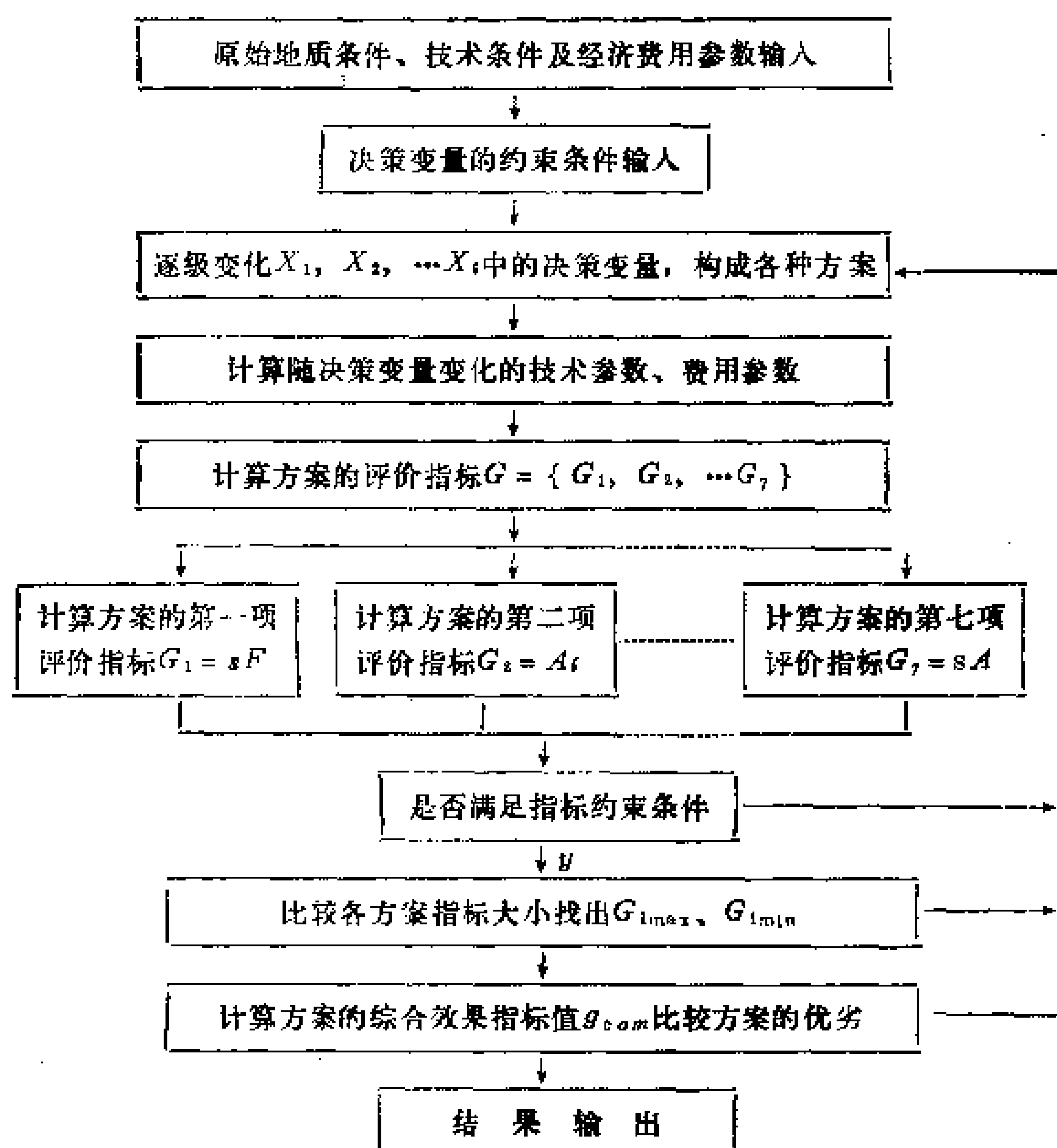



图 2-8-7 计算机程序内容结构图

## 五、实例分析——徐庄煤矿合理开采方式的确定

1.条件概况

徐庄井田走向长12km，倾斜宽3.4km，面积为42km²。煤层为单斜构造，煤层倾角15°～25°。断层主要受边界断层$F_{20}$的控制，大部分都为$NE$向与$F_{20}$斜交。现开采7，8两层煤，7号煤层是厚煤层，稳定可采。该矿为低级瓦斯矿井。

徐庄煤矿设计能力为90万吨/年。第一水平设在－400米水平。1979年12月投产。为加大开发强度，现正酝酿延深扩建方案。

2.可能的开采方式

经过对徐庄煤矿条件的分析及各种方案的初步比较，可能的开采方式方案，见图2-8-8。

3.方案优劣的评价

对于上山开采、下山开采的开采方式，在煤层走向约束距离$S_{st}$分别为4000m，2000m，600m（相当于徐庄煤矿井田煤层受断层切割的块段尺寸）的条件下做优化计算。在$S_{st}$＝4000m时，上山开采计算了22个类方案，下山开采计算了32个类方案，每个类方案中有六七百到二万多个方案不等，共计算比较了394.083个方案。每一类方案的综合评价效果是由该类方案中前10个较优方案的效果进行平均而得到的。这就完成了最低一级决策参数的评价。然后用决策树逐级向上分析评价各级决策参数，见图2-8-9。

$N_{sx1}$　$N_{sx2}$　$N_{sx3}$

$N_{xx11}$　$N_{xx12}$　$N_{xx21}$　$N_{xx22}$　$N_{xx23}$　$N_{xx24}$

$N_{dh1}$　$N_{dh2}$　$N_{dh3}$

$LZQ_1$　$LZQ_2\cap\overline{(N_{xx22}\cup N_{xx24})}$

$N_{cg1}$　$N_{cg2}\cap\overline{N}_{dh1}$　$N_{cg3}\cap N_{dh3}$　$N_{cg1}\cap N_{dh1}$　$N_{cg2}\cap N_{dh2}$　$N_{cg3}\cap N_{dh3}$

$N_{ss1}\cap\overline{N}_{cg1}$　$N_{ss2}\cap\overline{N}_{cg1}\cap\overline{N}_{sx3}$　$N_{ss4}$　$N_{x1}\cap N_{xx11}$　$N_{x2}$　$N_{x3}\cap N_{xx11}$　$N_{x4}$

$N_{ss3}\cap\overline{N}_{cg1}\cap(N_{sx1}\cup N_{sx2}\cap N_{xx22})$

$N_{ox1}$　$N_{ox3}\cap\overline{N}_{cg1}$

$LP_1\cap\overline{N}_{ss2}$　$LP_2\cap\overline{N}_{cg1}$　$LP_3\cap\overline{N}_{cg1}$　$N_{ox2}\cap(N_{x2}\cup N_{x4})\cap N_{cg1}\cap N_{xx11}$

$LPJ_1$　$LPJ_2$　$LPJ_3$　$LPJ_4$

$N_{ym}$　$N_b$　$S$　$H$

$N_{x01}$　$N_{x02}$　$N_{x03}$

$N_{f11}$　$N_{f12}$

$N_{oz}$　$N_{oz}+N_{oj}$　$N_{oz}+N_{op}$　$N_{og}$　$N_{og}+N_{oj}$　$N_{og}+N_{op}$　$N_{oj}$　$N_{oj}+N_{op}$　$N_{op}$

$x$　$N$　$N_t$　$N_{ot}$



图 2-8-8　徐庄煤矿开采方式方案的参数组合逻辑图

现以$S_{ys}=4000$m，$H_{ys}=1000$m的条件，上山开采($N_{ts1}$)—走向长壁($LZQ_1$)—跨多组上山采区($N_{ss2}$)—设区段集中平巷($LP_2$)—沿空送巷煤层顺槽($N_{x02}$)支叉为例，分析说明由下而上的决策评价过程：

$N_{x02}$的决策效果评价值为4.132，这是由该类方案中前十个较优方案评价的平均值而得到的；评价$LP_2$决策效果时，要考虑$LP_2$所属的两条支路$N_{x01}$，$N_{x02}$的决策效果值。$N_{x01}$决策效果值为4.9037，与$N_{x02}$的决策效果值4.132相差18.68%。但目前在徐庄煤矿还没有掌握沿空送巷技术的情况下，留设煤柱的顺槽布置($N_{x01}$)实现的可能性较大，故以$N_{x01}$、$N_{x02}$决策效果的平均值4.51788作为$LP_2$的决策效果评价值；对于$N_{ss2}$决策，所属$LP_1$的决策效果评价值与$LP_2$的决策效果评价值相差12.19%，以$LP_2$的决策效果作为$N_{ss2}$的综合效果；对于$LZQ_1$的决策，所属$N_{ss1}$，$N_{ss3}$，$N_{ss4}$的决策效果都较$N_{ss2}$的决策效果差，但其中$N_{ss4}$决策实现的可能性较大，所以淘汰$N_{ss1}$、$N_{ss3}$决策，而将$N_{ss2}$和$N_{ss4}$

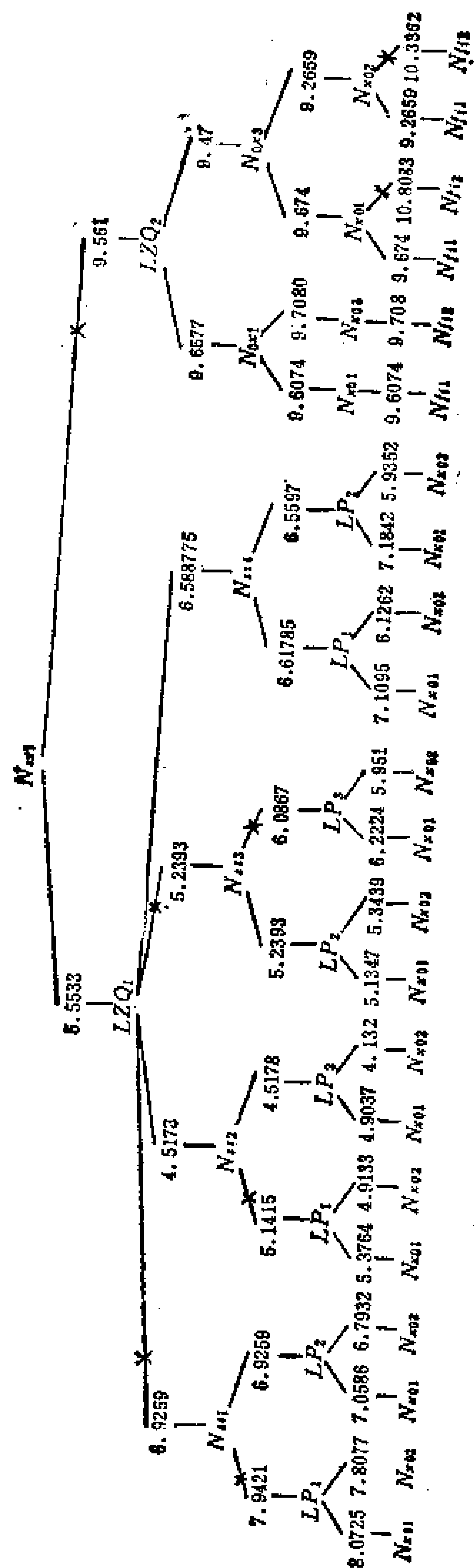


图 2-8-9　上山开采方案决策分析图（$S_{走}=4000\text{m}$，$H_{斜}=1000\text{m}$）

## 上山开采时最优的开采方式

表 2-8-3

| | $LZQ$ | $N_{ss}$ | $LP$ | $N_{xo}$ | $N_k$ | $N_{ym}$ | $N$ | $N_t$ | $N_{oz}$ | $N_{og}$ | $N_{oj}$ | $N_{op}$ | $S$ | $x$ | $SF$ | $A_t$ | $CL$ | $CT$ | $TY$ | $C$ | $SA$ | $G_{com}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_{ys}=4000$ $H_{ys}=1000$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 6 | 3 | 5 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 600 | 200 | 10.135 | 987450.2 | 8771.8 | 31.15 | 34.39 | 0.909 | 23.405 | 4.03723 |
| $S_{ys}=2000$ | 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1000 | 120 | 7.699 | 863092.0 | 5047.5 | 35.52 | 20.65 | 0.893 | 22.918 | 6.20996 |
| $H_{ys}=1000$ | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1000 | 120 | 7.980 | 863092.0 | 7847.5 | 40.57 | 20.65 | 0.893 | 28.861 | 6.47258 |
| $S_{ys}=600$ | 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 600 | 120 | 7.448 | 863092.0 | 4247.5 | 27.35 | 12.22 | 0.881 | 22.918 | 8.47611 |
| $H_{ys}=1000$ | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 600 | 120 | 7.655 | 863092.0 | 5109.9 | 27.86 | 10.69 | 0.877 | 28.961 | 9.04374 |

## 下山开采时最优的开采方式

表 2-8-4

| | $N_{xt}$ | $LZQ$ | $N_{ss}$ | $LP$ | $N_{xo}$ | $N_k$ | $N_{ym}$ | $N$ | $N_t$ | $N_{oz}$ | $N_{og}$ | $N_{oj}$ | $N_{oP}$ | $S$ | $x$ | $SF$ | $A_t$ | $CL$ | $CT$ | $TY$ | $C$ | $SA$ | $G_{com}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_{ys}=4000$ | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 6 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 800 | 180 | 10.347 | 981467.2 | 5978.1 | 24.65 | 33.20 | 0.910 | 18.245 | 4.14599 |
| | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 4 | 2 | 5 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 800 | 200 | 9.842 | 987450.0 | 5937.5 | 24.83 | 30.55 | 0.858 | 19.066 | 4.46051 |
| $H_{ys}=1000$ | 4 | | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 6 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 800 | 180 | 9.968 | 981467.2 | 8978.1 | 28.56 | 33.20 | 0.910 | 21.405 | 4.36461 |
| $S_{ys}=2000$ | 2 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1000 | 120 | 7.451 | 863092.0 | 6147.5 | 24.56 | 20.65 | 0.893 | 21.785 | 5.20297 |
| $H_{ys}=1000$ | 4 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1000 | 120 | 7.769 | 863092.0 | 7047.5 | 31.98 | 20.65 | 0.893 | 25.558 | 5.05204 |
| $S_{ys}=600$ | 2 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 600 | 120 | 7.277 | 863092.0 | 4547.5 | 19.86 | 12.22 | 0.881 | 21.785 | 8.11165 |
| | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 600 | 120 | 6.929 | 863092.0 | 3347.5 | 16.33 | 12.22 | 0.881 | 17.299 | 8.12356 |
| $H_{ys}=1000$ | 4 | 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 600 | 120 | 7.248 | 863092.0 | 3247.5 | 16.11 | 12.22 | 0.881 | 20.295 | 7.5030 |
| | 4 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 600 | 120 | 7.596 | 863092.0 | 4447.5 | 18.63 | 12.22 | 0.881 | 25.558 | 7.70359 |

的决策效果评价值进行平均，得到$LZQ_1$决策的决策效果评价值5.5533；最后比较$LZQ_1$、$LZQ_2$的决策效果。$LZQ_2$的决策效果评价值为9.5387，效果很差，被淘汰。同理可得到其它各支叉中各级决策参数决策效果评价值，并且各级各决策参数的评价是同时进行的。至此就得到各级全部决策参数效果评价值。下面就由上至下找出最优和次优的决策参数。

由上而下的过程较简单，只要取各级决策效果好的决策参数就选出了优越的方案。由图2-11-9可看出：$LZQ$应取$LZQ_1$决策，$N_{ss}$取$N_{ss2}$决策，$LP$取$LP_2$决策，$N_{so}$取$N_{so2}$决策。在$LZQ_1 \cap N_{ss2} \cap LP_2 \cap N_{so2}$类方案中的最优决策为：$N_k=6$、$N_{ym}=3$、$N=5$、$N_t=3$、$N_{oz}=3$、$N_{og}=0$、$N_{oj}=1$、$N_{op}=0$，$S=600$，$x=200$。

按照上面分析决策的同样过程，可评选出$S_{ys}=2000$米，$S_{ys}=600$米时的最优方案。同理也可以求出下山开采的最优方案。见表2-8-3和表2-8-4。

## 六、结　论

用优化设计理论方法和模糊数学方法对缓倾斜煤层合理井田开采方式确定的多目标综合评价法有如下有意义的研究成果：

1）用系统分析方法分析井田开采方式系统结构、层次及其构成元素之间的相互关系，而后建立开采方式的工艺模型是合适的。

2）在综合最优化方法的基础上，采用决策树分析方法，对决策参数进行的分级决策适合于多元素、多层次的复杂系统的设计决策，决策有层次、步骤清晰，决策结果便于分析对比。另外这种方法适于不确定条件下的决策，关键是对不确定条件出现的可能性需要研究。

3）采用多目标评价方法，建立统一的包含七项评价指标的技术经济数学模型，有利于采区设计的计算机化。用模糊统计方法确定各指标的权重系数，有助于提高设计决策的可靠性。

4）结合大屯煤炭公司的生产情况，对徐庄煤矿二水平的开采方式，就$S_{ys}=4000$m，2000m，600m三种情况分别对下山和上山开采做了优选，得到如下几点结论：

（1）徐庄煤矿除了在倾斜断层较密集的煤层块段可用倾斜长壁采煤法试采外，一般不适于倾斜长壁采煤方法开采；

（2）上山开采时，当完整的煤层块段走向长度$S_{ys}$较大时（4000m），跨多组前上山，有区段集中巷的布置较优。当$S_{ys}$较小时（2000m，600m），一般的双翼布置采区、无区段集中巷的布置较优越；

（3）煤层顺槽沿空送巷布置比留煤柱的顺槽布置优越，应推广应用；

（4）在现有的技术和地质条件的限制下，宜加大采区走向长度，倾斜长度在1000m左右较优；

（5）采煤工艺采用综采、适当搭配普采或炮采是比较适宜的；

（6）下山开采时，保留上山巷道作为下山开采时的回风巷的方案较优。在下山底部设置不设置集中通风排水大巷方案的综合评价指标值相差不超过10%，可认为是等价方案；

（7）小分区走向长度$S$和工作面长度$x$的优越区间随着类方案的不同而变化。工作面长度$x$的确定与技术管理水平有很大的关系。

5）对方案优劣的评价，一开始就做多目标的综合评价，才能不漏掉综合评价值好的方案。并便于研究各单项评价指标在综合评价中的作用及其相互关系。

6）今后应继续发展和完善综合决策方法、技术经济数学模型、设计实施的反馈系统，使之能够应用于煤炭生产实际。

## §2-9　决策论在选择采区巷道布置方案中的应用[29]

1985年，吕光华为了合理选择某煤矿的采区巷道最优布置方案，针对其地质条件提出了三类七种巷道布置方案。按多目标综合评价方法，给各方案的技术经济效果的评价项目确定了评价值，并给每个评价项目用两两比较方法确定了重要性系数。建立了各方案评价总指标公式，用决策论中的决策树方法选择评价总指标具有最大值的方案即为采区巷道布置最优方案。在采区巷道布置方案的优化设计中，这种定量化的判定方法，无疑是一种有益的尝试。

### 一、方案的提出

某煤矿的采区走向长度为1500～2000m，倾斜长度为1000m，面积为150～200万$m^2$；开采一煤层，平均厚度为3.3m，距地表200～300m，煤层平均倾斜角度7°～10°；地质构造比较简单，只在采区东部有一落差为0.5～1.0m的断层；顶板为灰色砂岩，底板为砂岩与页岩互层；煤质较硬；含水量小；属高瓦斯矿井。

据根上述地质条件，可提出以下三类七种采区巷道布置方案：

不同布置方案中的主要巷道位置　　　　表 2-9-1

| 主要巷道 | 长向长壁开采 | | | 倾斜长壁开采 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 双煤上山（Ⅰ） | 一岩(石门)一煤上山（Ⅱ） | 双岩上山（Ⅲ） | 三煤斜巷（Ⅳ） | 一岩双煤斜巷（Ⅴ） | 三岩斜巷（Ⅵ） |
| 主要运输大巷 | 在煤层底板岩石中 | 同左 | 同左 | 同左 | 同左 | 同左 |
| 主要轨道大巷 | 在煤层底板岩石中 | 同左 | 同左 | 同左 | 同左 | 同左 |
| 运输机上山（斜巷与石门） | 在煤层中 | 在煤层底板岩石中 | 在煤层底板岩石中 | 在煤层中 | 在煤层底板岩石中 | 在煤层底板岩石中 |
| 轨道上山（或斜巷） | 在煤层中 | 同左 | 在煤层底板岩石中 | 在煤层中 | 在煤层中 | 在煤层底板岩石中 |
| 煤层运输机平巷 | 在煤层中 | 同左 | 同左 | — | — | 超前顺槽在煤层中 |
| 煤层轨道平巷 | 在煤层中 | 同左 | 同左 | — | — | 超前顺槽在煤层中 |
| 总回风巷 | 在煤层底板岩石中 | 同左 | 同左 | 同左 | 同左 | 同左 |

1.走向长壁开采方式

（1）双煤上山采区巷道布置方案；（方案Ⅰ）

（2）一岩一煤上山采区巷道布置方案；

（3）一岩(石门)一煤上山采区巷道布置方案；(方案Ⅱ)

（4）双岩上山采区巷道布置方案；（方案Ⅲ）

2.倾斜长壁开采方式

（1）三煤斜巷采区巷道布置方案；(方案Ⅳ)

（2）一岩两煤斜巷采区巷道布置方案；(方案Ⅴ)

（3）三岩斜巷采区巷道布置方案（方案Ⅵ）；

3.走向-倾斜长壁开采方式

由于采区的地质构造简单，没有较大的断层，可不考虑走向-倾斜长壁混合开采方式；一煤一岩上山布置方案和一煤一岩(石门)布置方案比较相似，只需考虑一个。这样，只对六种采区布置方案（Ⅰ，Ⅱ，…，Ⅵ方案）进行分析比较和优选。

根据我国的生产技术水平，结合所比较采区的地质条件，确定不同方案中的巷道层位，见表2-9-1。

## 二、方案的评估与选优

为了应用决策论中的方法，在上述六个方案中选出最优方案，必需选定评价各方案技术经济效果的评价项目。根据煤矿开采的特点和采区在矿井生产中的地位和作用，将评价方案的评价项目共分为以下六项：

（1）巷道生产费用，为了便于比较主要计算了巷道掘进和维护费用。各方案的生产费用如下：方案（Ⅰ）59.40万元；（Ⅱ）69.10万元；（Ⅲ）78.10万元；（Ⅳ）34.50万元；（Ⅴ）44.20万元；（Ⅵ）63.60万元。（2）生产集中化程度。（3）采煤机械化程度。（4）采区范围内的生产系统。（5）煤炭损失。（6）安全生产程度。

为了便于分析和比较，可将评价项按照在采区生产中实现的程度分为若干等级，分别给评价值。譬如，对于巷道生产费用最高的评价值定为0，最低的评价值定为1；生产集中化程度高的评价值定为1，最低的评价值定为0；煤炭损失最少评价值的定为1，最低的定为0；生产系统完善且简化的评价值定为1，生产系统不完善且复杂的评价值为0等等。即评价值在0与1区间。这样对每个方案来说，含有六个评价项目就有六个评价值，如0；0.2；0.4；0.6；0.8；1.0。根据实际情况分别给各方案以相应的评价项目，使其基本上符合实际的评价值，见表（2-9-2）。

不同方案评价项目的评价值　　　　表 2-3-2

| 供选方案 | 巷道生产费用 | 生产集中化程度 | 采煤机械化程度 | 采区生产系统 | 煤炭损失率 | 安全生产好坏 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 方案 Ⅰ | 0.4 | 0.2 | 0.8 | 0.4 | 0.0 | 0.2 |
| 方案 Ⅱ | 0.2 | 0.3 | 0.6 | 0.2 | 0.4 | 0.4 |
| 方案 Ⅲ | 0.0 | 0.6 | 0.6 | 0.0 | 0.6 | 0.2 |
| 方案 Ⅳ | 1.0 | 1.0 | 0.8 | 1.0 | 0.4 | 0.8 |
| 方案 Ⅴ | 0.8 | 0.6 | 1.0 | 0.8 | 0.6 | 0.4 |
| 方案 Ⅵ | 0.6 | 0.6 | 0.8 | 0.6 | 1.0 | 0.8 |

由表2-9-2可以看出：各评价值随着方案的不同，其取值是不同的，均在0与1之区间内。

所得到的六个可供选择方案的评价值的矩阵模型，其形式如下：

$$A_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}0.4\\0.2\\0.8\\0.4\\0.0\\0.2\end{bmatrix}^T;\quad A_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix}0.2\\0.8\\0.6\\0.2\\0.4\\0.4\end{bmatrix}^T;\quad A_{\mathrm{III}}=\begin{bmatrix}0.0\\0.6\\0.6\\0.0\\0.6\\0.2\end{bmatrix}^T$$

$$A_{\mathrm{IV}}=\begin{bmatrix}1.0\\1.0\\0.8\\1.0\\0.4\\0.8\end{bmatrix}^T;\quad A_{\mathrm{V}}=\begin{bmatrix}0.8\\0.6\\1.0\\0.8\\0.6\\0.4\end{bmatrix}^T;\quad A_{\mathrm{VI}}=\begin{bmatrix}0.6\\0.6\\0.8\\0.6\\1.0\\0.8\end{bmatrix}^T$$

也可以写成如下模糊关系矩阵形式：

$$R=\begin{bmatrix}0.4 & 0.2 & 0.8 & 0.4 & 0.0 & 0.2\\0.2 & 0.8 & 0.6 & 0.2 & 0.4 & 0.4\\0.0 & 0.6 & 0.6 & 0.0 & 0.6 & 0.2\\1.0 & 1.0 & 0.8 & 1.0 & 0.4 & 0.8\\0.8 & 0.6 & 1.0 & 0.8 & 0.6 & 0.4\\0.6 & 0.6 & 0.8 & 0.6 & 1.0 & 0.8\end{bmatrix}$$

由表2-9-2还可以看出：六个评价方案的评价项目，在采区生产中的重要程度（用重要性系数表示）是有差别的。为了选择出最优的巷道布置方案，需要给每个评价项目规定一个重要性系数。这里采用两两比较方法确定重要性系数。重要性系数表示不同的评价项目在采区生产过程中的重要程度，用0和1打分确定。其具体做法是：把不同评价项目按任意顺序排列起来，并填入表2-9-3中，然后按其功能的重要程度进行一一对比，重要的评价项目得1分，次要的评价项目得0分；再把得分累计起来，用全部评价项目的总分去除就会得到每个评价项目的重要性系数。可用公式求出：

$$W_i=N\Big/\sum_{i=1}^{n}N \qquad (2\text{-}9\text{-}1)$$

式中：$W_i$——重要性系数（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$）；$N$——每个评价项目的得分总和；$\sum_{i=1}^{n}$——全部评价项目的总分数，$n=6$。

重要性系数$W_i$的计算结果见表2-9-3。

由表2-9-3看出，决策的矩阵模型所需要的决策系数向量：

$W=[W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4,\ W_5,\ W_6]=[0.33,\ 0.13,\ 0.27,\ 0.07,\ 0.07,\ 0.13]$

为了从上述六个方案中选出最优方案，可规定一个评价总指标$M(A_i)$，决策的任务就

**用两两比较法确定重要性系数** 表 2-9-3

| 评价项目 | 一对一比较结果 | | | | | | | | | | | | | | | 得分累计 $(N)$ | 重要性系数 $(W_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 巷道生产费用 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | 5 | 0.33 |
| 生产集中化程度 | 0 | | | | | | 0 | 0 | 1 | 1 | | | | | | 2 | 0.13 |
| 采煤机械化程度 | | 0 | | | | | 1 | | | | 1 | 1 | 1 | | | 4 | 0.27 |
| 采区生产系统 | | | 0 | | | | | 1 | | | 0 | | | 0 | 0 | 1 | 0.07 |
| 煤炭损失率 | | | | 0 | | 0 | | | 0 | | | 0 | | 1 | | 1 | 0.07 |
| 安全生产的好坏 | | | | | 0 | 1 | | | | 0 | | | 0 | | 1 | 2 | 0.13 |
| 合计$\sum_{i=1}^{n} N$ | | | | | | | | | | | | | | | | 15 | 1.00 |

是选择$M(A_i)$具有最大值的方案。巷道布置方案决策树如图2-9-1所示。

评价值总和$M(A_i)$可采用下列公式进行计算：

$$M(A_i)=\sum_{i=1}^{n} WA_i \quad (i=\text{I},\ \text{II},\ \cdots,\ \text{VI}) \qquad (2\text{-}9\text{-}2)$$

按照图2-9-1，把选定的数据代入公式(2-9-2)中则得点④的值：

$$M(A_1)=W_1A_1=[0.33,0.13,0.27,0.07,0.07,0.13]\cdot\begin{bmatrix}0.4\\0.2\\0.8\\0.4\\0.0\\0.2\end{bmatrix}$$

$$=0.33\times0.4+0.13\times0.12+0.27\times0.8+0.07\times0.4+0.07\times0.0$$
$$+0.13\times0.2=0.43$$

同理，点⑤的值$M(A_{\text{II}})=0.43$，点⑥的值$M(A_{\text{III}})=0.31$由上述计算看出：点④和点⑤的评价值相等，即$M(A_{\text{I}})=M(A_{\text{II}})=0.43$，也就是说，选择双煤上山布置方案与一岩（石门）一煤上山布置方案都可行，那么到底选择哪个方案才是更合理的？根据《运筹学》中的有关理论，当$M(A_i)$的值相同时，可比较和计算$Q(A_i)$的值，其具体计算公式如下：

$$Q(A_i)=M(A_i)-\min(a_{ij}) \qquad (2\text{-}9\text{-}3)$$

式中：$Q(A_i)$——$A_i$方案的评价值总和与$A_i$评价项目中最小评价值之差；$a_{ij}$——$A_i$方案某评价项目的评价值。

将有关数据代入公式(2-10-3)，则

$Q(A_{\text{I}})=0.43-0.0=0.43$；$Q(A_{\text{II}})=0.43-0.2=0.23$；

$Q(A_{\text{III}})=0.31-0.0=0.31$。

从计算结果可以看出：$Q(A_{\text{I}})>Q(A_{\text{III}})>Q(A_{\text{II}})$。这种情况下，选取方案Ⅰ，即双煤上山布置方案是合理的。因此，可删去双岩上山布置方案和一岩（石门）一煤上山布置方案，将图2-9-1中的点④转移到点②。以上是走向长壁开采中三种巷道布置方案的比较结果。

同理，可以利用公式2-9-2计算点⑦、点⑧、点⑨的值，即：点⑦的值$M(A_{Ⅳ})=0.88$，点⑧的值$M(A_{Ⅴ})=0.76$，点⑨的值$M(A_{Ⅵ})=0.71$。由于$M(A_{Ⅳ})>M(A_{Ⅴ})>M(A_{Ⅵ})$，点⑦的评价值$M(A_{Ⅳ})$最大，则把图2-9-1中的点⑦转移到点3，也就是说三煤斜巷布置方案最优。以上是倾斜长壁开采中三种方案比较的结果。

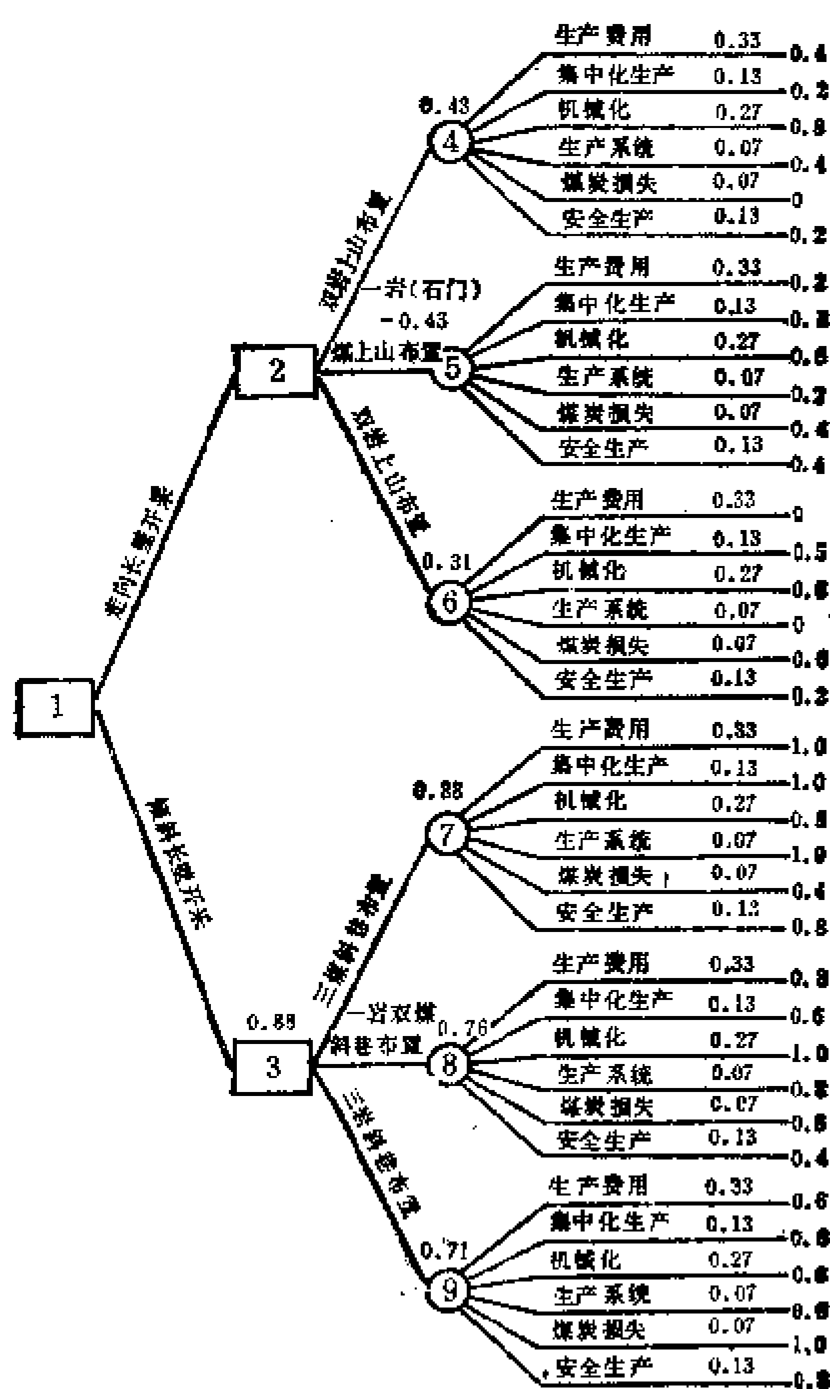



图 2-9-1 采区巷道布置方案决策树

从以上计算和比较看出，走向长壁开采中的最优方案是双煤上山布置方案，而倾斜长壁开采中的最优方案是三煤斜巷布置方案。我们的最终目的是要求选择出一个最优方案，因此把点2和点3相比较，点3的评价值比点2的大，即$M(A_{Ⅳ})>M(A_{Ⅰ})$，即0.88>0.43。所以，应放弃走向长壁开采方式，选用倾斜长壁开采中的方案Ⅳ，即最优方案——三煤斜巷布置方案。

## §2-10 多目标边坡工程的风险决策和模糊决策[30]

1985年，祝玉学、张绪珍针对露天矿边坡工程是既具有投资不可挽回性质的特定工程，又从属于采矿工程这一特点，提出了边坡工程决策的四个阶段；分析了边坡工程决策中的地质采矿技术因素、技术经济指标、环境数据等往往具有很大的不确定性和不精确性，亦即既具有随机性又具有模糊性，建立了概率统计数学模型和模糊数学模型，对多目标边坡工程进行风险决策和模糊决策，使边坡工程设计方案达到综合效益最优化，并提高其实施的可靠性。这在理论上和实践上是有重要意义的。

在采矿工业中，边坡工程决策是伴随露天采矿境界的确定而作出的，实际上是对边坡设计方案和可能的工程措施的分析、判断和决定。边坡工程的特定工程性质决定它更突出的具有投资不可挽回的性质。因此，必须尽可能采用系统的可靠方法，充分利用一切所得到的数据和信息，鉴别和选取那些具有最高投资价值的或最高投资收益率的工程方案，并对未来的经济效果作出相当可靠的预测。

在决策的“明智”与“错误”，成功与失败的交替中，形成和发展了各种各样的决策方法。特别是随着创造理论、决策论、数学规划、最优控制论、网络分析，预测理论的发展，随着计算机技术的发展，决策方法诸如创造与逻辑思维方法、系统分析方法、经济分析方法、统计决策方法、线性规划与动态规划方法、数学分析方法等得以迅速的发展和应

用。但就决策科学来说，特别是在矿物工业中，仍处于发展阶段，在我国还是刚始萌动。因此，本文关于风险决策和模糊决策两种方法在边坡工程中的应用也是探讨性的。

边坡工程的决策过程，一般分作四个阶段：

1.目标选择

根据所得到的信息，对开采的自然状况、工程及经营环境所要处理的问题有一较深刻的认识，然后寻找出决策条件，确定所要达到的目标。边坡设计方案的确定是一个多目标的综合性问题，它涉及到资源开发和利用、采掘强度与效率、采掘作业安全及基建投资与生产成本、效益等等。

2.制定方案

通过分析、推理和判断，提出边坡的各种设计方案，并预测其可能结果。制定方案实质上就是为达到预定目标的初步构思策略。策略是一个集合。应当采取尽可能多的可供选择的策略，以便于作出最优决策。

3.方案选择

通过全面的技术论证和经济分析，进行综合平衡和对比分析，按预定的评价函数，筛选出最优方案。

4.方案评价及预测结果

边坡工程决策是以矿山系统的技术经济分析为基本依据。边坡工程既是一特定工程又从属于采矿工程，故要着眼于综合效益最优化。

## 一、风 险 决 策

在决策分析中，需用各种直接数据和环境约束数据，这些数据往往具有很大的不确定性和不精确性。数据的这种变化性必然造成预测结果的变化，这表明有风险存在。在边坡工程中常见的风险源有：处理类似不稳定类型的经验不足；数据及其估计的偏差、分析的误差；地质采矿条件和采矿工艺过程的变化；外部经济环境的改变，未来技术的发展等等。这些因素的影响，必须根据经验和对未来可能性的了解作出判断。

通常以未来结果的可能变化性定义风险，它与估计给定工程收益的概率分布状态有关。在投资分析中，人们所关心的是不利的变化性，因而，也有人把风险定义为遭受损失的机会。而不确定性则是缺乏确定性或者是对精确结果的怀疑，它与用来估计概率分布的不充足数据的状态有关。从这个意义上讲，是不确定性引起的风险。不确定的程度，可以用预测者的概率分布形式来描述和量度，风险的尺度可以通过数学分析的方法和模拟的方法求得。

1.数学分析方法

概率是风险定义和风险尺度的基础，因此，可以用一种概率指标来衡量概率分布的密集程度，借以表征风险。在某些情况下，可以用统计技术客观地估计概率分布，谓之客观概率，它是随机事件的一种客观属性。然而，在某些情况下，是不知道客观概率的，必须主观地估计概率分布，谓之主观概率，它是决策者对随机事件是否发生的一种信任程度，它是根据已有信息对随机事件客观属性的一种合理判断。在采矿工程的决策分析中，主观概率是常用的。下面，具体地讨论风险的比较和衡量方法。

1）风险比较

假定有两个边坡设计方案$A$和$B$，它们的可能收益的期望值相同，均为500万元，这是否意味着它们具有同样的可接受性呢？其实不然，因为可接受性既取决收益又取决于风险。如果根据有关征询意见估计方案$A$和$B$的工程收益的支付矩阵如表2-10-1，估计每种估计状况的可能，预计相应的发生概率为：最差状况20%，正常状况60%，最佳状况20%，则可以通过每种状况的估计收益与相应发生概率相乘，累加其积而求得每个方案的加权平均值，即收益的期望值，如表2-10-2所示。

支付矩阵　　表 2-10-1

| 估计状况 | 可能收益 | |
|---|---|---|
| | 方案 $A$ | 方案 $B$ |
| 最差 | 400 | 0 |
| 正常 | 500 | 500 |
| 最佳 | 600 | 1000 |

期望值的计算　　表 2-10-2

| 方案 | 估计状况 | 估计状况的发生概率 | 估计状况的发生结果 | 可能收益的加权值 | 期望值（万元） |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 最差 | 0.2 | 400 | 80 | 500 |
| | 正常 | 0.6 | 500 | 300 | |
| | 最佳 | 0.2 | 600 | 120 | |
| $B$ | 最差 | 0.2 | 0 | 0 | 500 |
| | 正常 | 0.6 | 500 | 300 | |
| | 最佳 | 0.2 | 1000 | 200 | |

实际上，在最差估计与最佳估计之间有无限多个可能数，如果改变一个原来的假设，令方案$A$小于400或大于600万元的概率为零；方案$B$小于0或大于1000万元的概率为零，并对其间指定一系列估计状况的概率和相应的结果，就可以绘制出收益的概率分图，如图2-10-1所示。

通常，概率分布越集中，或者分布越耸起，风险就越低。概率分布集中，表明实际结果越靠近期望值。从图2-13-1可以看出，方案$A$实际盈利比方案$B$更靠近期望值500万元。

2）风险尺度——标准差

风险尺度是用概率分布的集中程度的标准差来刻划。标准差越小，概率分布越密集，相应地，风险也就越小。

假定独立的随机变量$A_j$代表可能收益的估计值，$j=1, 2, \cdots, N$，为估计状况数，则随机变量$A_j$的期望值$E(A)$等于随机变量$A_j$与其可能发生概率$P_j$积之和，即

$$E(A)=\sum_{j=1}^{N}(A_j \cdot P_j) \qquad (2\text{-}10\text{-}1)$$

随机变量$A_j$的方差$V(A)$为

$$V(A)=\sum_{j=1}^{N}(A_j-E(A))^2 \cdot P_j \qquad (2\text{-}10\text{-}2)$$

标准差系方差的平方根，即

$$\sigma=\left(\sum_{j=1}^{N}(A_j-E(A))^2 \cdot P_j\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (2\text{-}10\text{-}3)$$

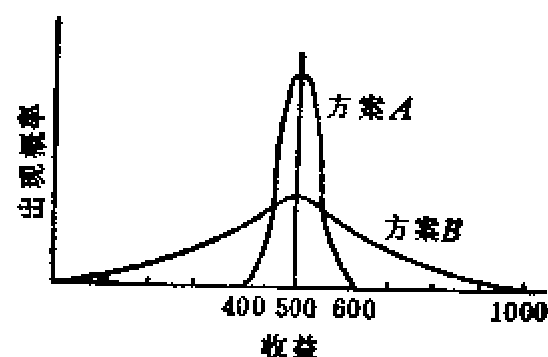



图 2-10-1　风险比较

依此计算图2-13-1一例的标准差，计算过程见表2-10-3。

结果表明：方案$A$的标准差为36.25万元，而方案$B$的标准差为316.23万元。因方案$B$的标准差比较大，故而工程的风险也大。

3）风险尺度——变异系数

在边坡工程中，为了提高边坡可靠性或提高边坡角而经常采取一系列稳定工程措施，

这自然会使投资增加，但相应地也引起收益的变化。然而，在两种投资方案的标准差相近或相同情况下，就无法用标准差来度量风险。

标准差计算过程　　表 2-10-3

| 方案 | 估计状况 | $A_j-E(A)$ | $(A_j-E(A))^2$ | $(A_j-E(A))^2\cdot P_j$ | $V(A)$ | $\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 最差 | 400－500＝－100 | 10000 | (10000)·(0.2)＝2000 | 4000 | 63.25 |
| | 正常 | 500－500＝0 | 0 | 0×(0.6)＝0 | | |
| | 最佳 | 600－500＝100 | 10000 | 1000×0.2＝2000 | | |
| B | 最差 | 0－500＝－500 | 250000 | 250000×0.2＝50000 | 100000 | 316.23 |
| | 正常 | 500－500＝0 | 0 | 0×0.6＝0 | | |
| | 最佳 | 1000－500＝500 | 250000 | 250000×0.2＝50000 | | |

讨论图2-10-2所示的投资$C$和$D$的概率分布。投资$C$的期望收益为1000万元，标准差为300万元；投资$D$的期望收益为4000万元，而标准差也为300万元。相同的标准差造成人们对风险的迷惑，这时，使用变异系数来比较不同投资方案的风险，即用标准差$\sigma$除以期望值$E(A)$，求得变异系数。

$$\nu=\sigma/E(A) \qquad (2\text{-}10\text{-}4)$$

它反映单位收益的风险。结合此例，可得投资方案$C$的$\nu_C=0.3$，投资方案$D$的$\nu_D=0.075$。就是说$\nu_C$比$\nu_D$高，选取投资方案$D$较为合适。

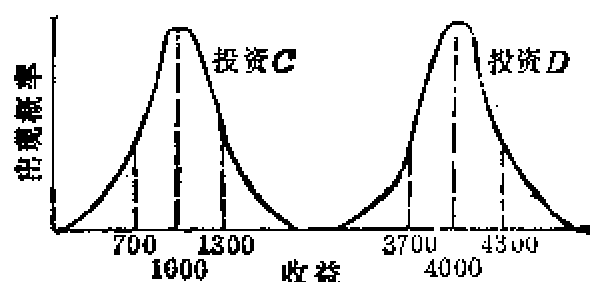



图 2-10-2　不同期望收益的两个投资方案的概率分布

4）风险尺度——现值≤0的概率

在决策分析，人们往往更关心损失的可能性。为此，考察一下现金流量的变化。

假定每个分析时期末的净现金流量，在统计上是独立的随机变量，也以$A_j$表示，$j=0,1,2,\cdots,N$为时期数。这样，现值$P.V.$为

$$P.V.=\sum_{j=1}^{N}(1+i)^{j}\cdot A_j \qquad (2\text{-}10\text{-}5)$$

式中：$i$为贴现率或最低要求的收益率。

因为常数乘以随机变量积的期望值等于常数乘以随机变量期望值；常数乘以随机变量积的方差等于常数平方乘以随机变量方差。于是

$$E[P.V]=\sum_{j=1}^{N}(1+i)^{-j}E(A_j) \qquad (2\text{-}10\text{-}6)$$

$$V[P.V]=\sum_{j=1}^{N}(1+i)^{-aj}\cdot V(A_j) \qquad (2\text{-}10\text{-}7)$$

式中：$E(\cdot)$为期望值；$V(\cdot)$为方差；$\sigma[\cdot]=\sqrt{V(\cdot)}$为标准差。

根据中心极限定理，随着$N$值的增大，独立分布的随机变量$P.V.$，趋于正态分布，其期望值为$E[P.V.]$，方差为$V[P.V.]$。

例如，某露天矿期望投资10000万元，方差为$1\times10^6$(万元)$^2$，年收益的期望值$E(A)=1800$万元，方差为$4\times10^4$(万元)$^2$，贴现率$i=10\%$，分析时期$j=10$年。计算现值$P.V.$出现负值的概率。

计算期望值和方差：

$$E[P.V.]=-10000+\sum_{j=1}^{10}(1.10)^{-j}\cdot 1800=1059.20(\text{万元})$$

$$V[P.V.]=1\times 10^{6}+(4\times 10^{4})\ \sum_{j=1}^{10}(1.10)^{-2j}\ =1162170(\text{万元})$$

$P.V.\leqslant 0$ 的概率为：

$$P_r(P.V.\leqslant 0)=P_r\left(S\leqslant\frac{0-E(P.V.)}{\sqrt{V\cdot(P.V.)}}\right)$$

$$=P_r\left(S\leqslant-\frac{1059.20}{1078.04}\right)$$

$$=P_r(S\leqslant-0.982)=0.163。$$

根据$S$值从正态概率积分表中查得，该矿山出现现值为负值的概率为16.3%。

2.蒙特卡洛模拟方法

当实际试验其它分析方法不可行时，蒙特卡洛模拟方法是一种非常有效的风险决策方法。由于它不需要复杂的数学计算，又能提供投资收益率（$IRR$）或净现值（$NPV$）的预期的完整变化和决策信息，因而得以广泛接受。

蒙特卡洛模拟过程如图2-10-3所示。根据输入数据的类型，可分为离散型模拟和连续性模拟。

1）离散型模拟

由于数据不足，只能凭主观判断对预期结果（例如现金流量）估计概率值（表2-11-4），然后分配随机数（表2-13-5），再由随机数表随机抽样，产生的可能结果（表2-10-6）。

现金流量的概率分布　表 2-10-4

| 现金流量 | 估计概率值 |
|---|---|
| 10000 | 0.10 |
| 15000 | 0.50 |
| 20000 | 0.25 |
| 25000 | 0.15 |

随机数的分布　表 2-10-5

| 现金流量 | 随机数 |
|---|---|
| 10000 | 00～09 |
| 15000 | 10～59 |
| 20000 | 60～84 |
| 25000 | 85～99 |

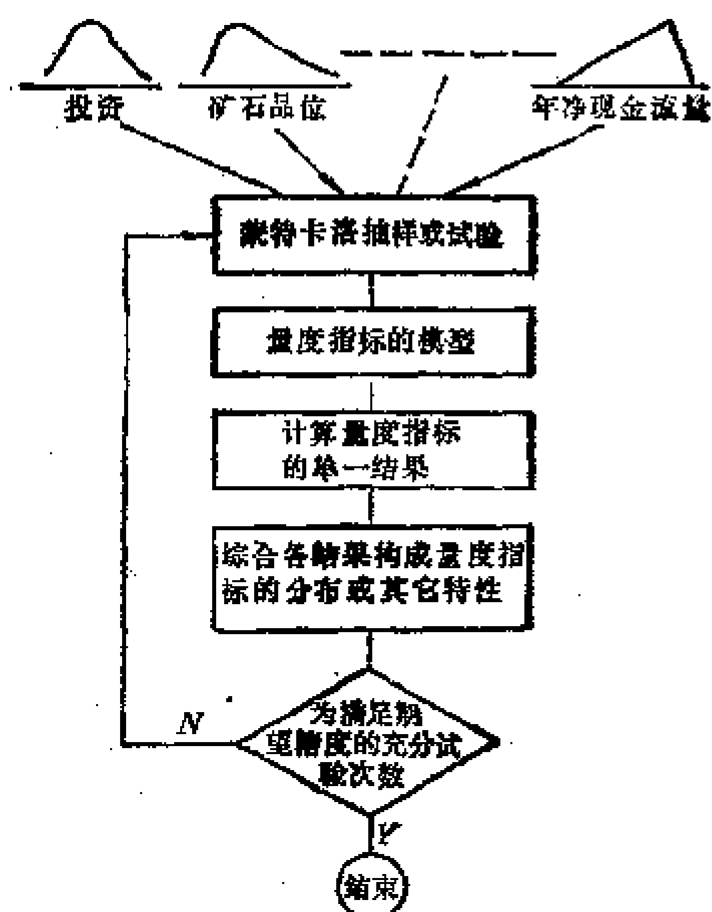



图 2-10-3　用于投资项目分析的蒙特卡洛模拟程序

根据上述模拟结果，可求其平均值175000/10＝17500。

2）连续型模拟

如果有充分的历史资料，输入变量可以拟合一定的理论分布；或者为输入变量指定一

个范围和概率分布，则可以根据概率分布的特征值，在计算机上进行逆变换，从而将随机变量输入到经济模型，获得期望的度量指标$NPV$或$IRR$。

产生的结果　表 2-10-6

| 随机数 | 现金流量的结果 |
|---|---|
| 47 | 15000 |
| 91 | 25000 |
| 02 | 10000 |
| 88 | 25000 |
| 81 | 20000 |
| 74 | 20000 |
| 24 | 15000 |
| 05 | 10000 |
| 51 | 15000 |
| 74 | 20000 |

下面列举一个铜钼矿的实例，其输入数据见表2-10-7。输出的$IRR$累积分布图如图2-10-4所示，$IRR$的概率表示于表2-10-8。

从表2-10-8可以看出，达到每个$IRR$的概率均为5%，如果每个可能$IRR$值乘以0.05，并累加各结果，则可求得期望的$IRR$＝30.826。

正如前述，蒙特卡洛模拟提供的信息比其它方法更完整　给出$IRR$和$NPV$的预计范围，以及达到一定收益水平的概率。

某铜钼矿模拟的输入数据　表 2-10-7

| 变量 | 分布 | 使用数据 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 最低 | 最频 | 最高 |
| 储量(吨) | 不对称三角形 | $2\times10^6$ | $2.5\times10^6$ | $3.5\times10^6$ |
| 铜品位(小数) | 不对称三角形 | 0.0065 | 0.0080 | 0.0090 |
| 钼品位(小数) | 不对称三角形 | 0.0018 | 0.0035 | 0.0040 |
| 铜回收率(小数) | 不对称三角形 | 0.84 | 0.87 | 0.89 |
| 钼回收率(小数) | 不对称三角形 | 0.66 | 0.70 | 0.88 |
| 铜售价(元/公斤) | 不对称三角形 | 1.32 | 1.39 | 1.65 |
| 钼售价(元/公斤) | 不对称三角形 | 8.14 | 10.56 | 12.32 |
| 采矿成本(元/吨) | 不对称三角形 | 3.50 | 4.0 | 5.0 |
| 选矿成本(元/吨) | 不对称三角形 | 7.50 | 9.0 | 10.5 |
| 采矿投资(元) | 不对称三角形 | $9\times10^7$ | $1\times10^8$ | $1.2\times10^8$ |
| 选矿投资(元) | 不对称三角形 | $4.5\times10^7$ | $5\times10^7$ | $5.5\times10^7$ |
| 采矿速度(吨/日) | 不对称三角形 | 27000 | 30000 | 35000 |
| 边坡不稳定费用(元) | 常数 | $4\times10^6$ | $4\times10^6$ | $4\times10^6$ |

达到 $IRR$ 的概率　表 2-10-8

| 概率 | $IRR$ | 概率 | $IRR$ |
|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.4 | 0.50 | 32.4 |
| 0.95 | 14.4 | 0.45 | 34.1 |
| 0.90 | 18.9 | 0.40 | 35.2 |
| 0.85 | 20.8 | 0.35 | 36.9 |
| 0.80 | 23.3 | 0.30 | 37.5 |
| 0.75 | 25.4 | 0.25 | 39.9 |
| 0.70 | 26.9 | 0.20 | 41.7 |
| 0.65 | 28.5 | 0.15 | 42.5 |
| 0.60 | 29.9 | 0.10 | 45.8 |
| 0.55 | 31.1 | 0.05 | 48.4 |

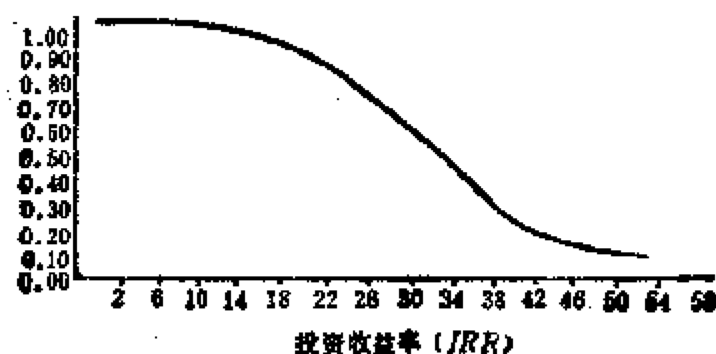



图 2-10-4　$IRR$的累积概率分布

## 二、模 糊 决 策

在实际工程技术的决策中，总是存在着各种不确定因素，它或具有随机性或模糊性，或既具有随机性又具有模糊性。常常模糊性更能完全地反映某些客观事实，通过模糊关系的确定，就可以吸取人脑对于模糊现象的识别和判断的优点，定量程度上的差异。

1.隶属度与隶属函数

对象$x$具有某种性质的程度差异，可用[0,1]闭区间的一个实数来度量。这个数就是隶属度。如果它依变量$x$的不同而改变，则称为隶属函数。隶属函数刻划因子与对象之间的模糊关系，它可以用模糊统计方法确定，也可以凭经验判断。

隶属函数可用来测量在策略集合中选取不同的策略时，究竟能在多大程度上达到了目标，利用它就能选出最佳方案。

模糊集合是二值逻辑{0，1}推广至[0，1]闭区间的任意的、无穷多个值的连续逻辑。隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$必须满足$0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant 1$。

2.模糊线性加权变换

模糊线性加权变换公式如下：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=(a_1a_2\cdots a_n)\cdot\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12}\cdots r_{1m} \\ r_{21} & r_{22}\cdots r_{2m} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ r_{n1} & r_{n2}\cdots r_{nm} \end{bmatrix}=(b_1b_2\cdots b_m) \qquad (2\text{-}10\text{-}8)$$

式中：$\underset{\sim}{R}$——模糊关系矩阵；$\underset{\sim}{A}$——输入的模糊向量；$\underset{\sim}{B}$——输出的模糊向量；$(a_1a_2\cdots a_n)$为因素的权数，要求满足归一化条件，即$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，$a_i\in[0,1]$；$b_j=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot r_{ij}$ $(j=1,2,\cdots,m)$。

3.实例

某露天矿有五个边坡设计方案，其各项参数根据分析计算结果列于表2-13-9，试决定方案的优劣顺序，选出最佳方案。

边坡设计方案的参数　　表 2-10-9

| 项　目 | 方 案 Ⅰ | 方 案 Ⅱ | 方 案 Ⅲ | 方 案 Ⅳ | 方 案 Ⅴ |
|---|---|---|---|---|---|
| 可采矿量(万吨) | 4700 | 6700 | 6900 | 8800 | 7600 |
| 基建投资(万元) | 5000 | 5500 | 5300 | 6800 | 6000 |
| 采矿成本(元/吨) | 4.0 | 6.1 | 5.5 | 7.0 | 6.8 |
| 不稳定费用(万元) | 30 | 50 | 40 | 200 | 160 |
| 净现值(万元) | 1500 | 700 | 1000 | 50 | 100 |

首先，确定隶属函数：

1）可采矿量的隶属函数

因为勘探的地质储量为8800万吨，故可用资源的利用系数来作为隶属函数，其图形见

图2-10-5。

$$\underset{\sim}{\mu_A}(x)=x/8800 \qquad (2\text{-}10\text{-}9)$$

2）基建投资的隶属函数

投资约束是≤8000万元，即其隶属度为0；而0万元投资的隶属度为1。根据三点共线的条件，可得（图2-10-6）：

$$\mu_B(x)=-\frac{1}{8}x+1 \qquad (2\text{-}10\text{-}10)$$

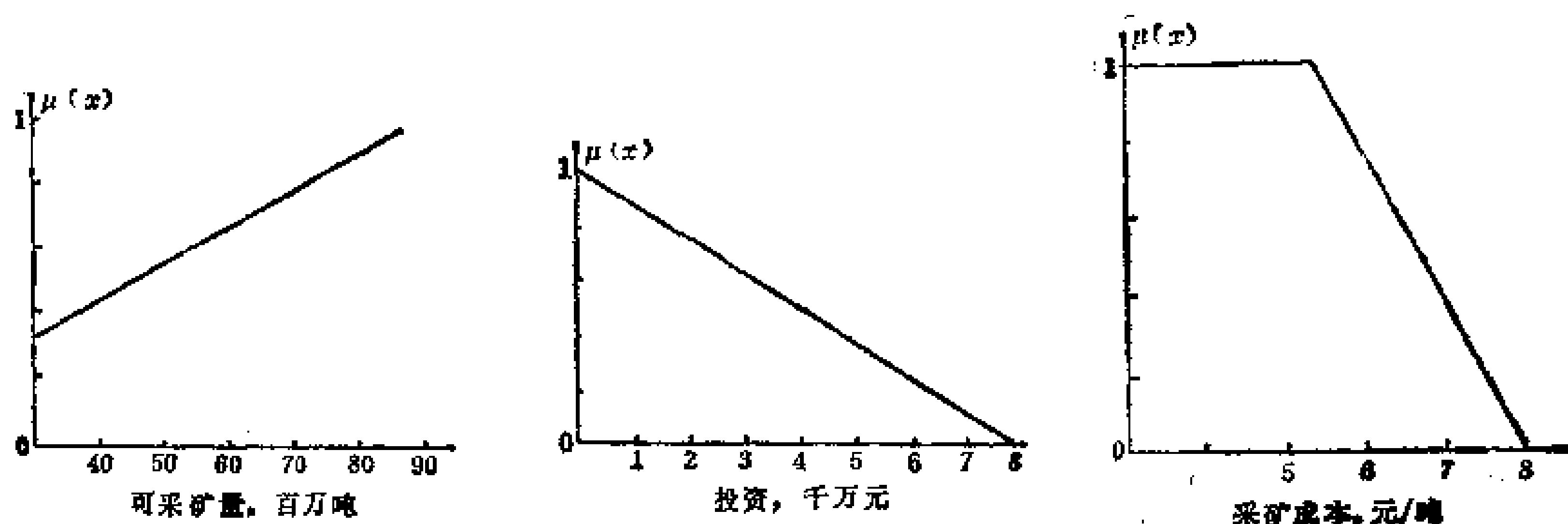



图 2-10-5 可采矿量的隶属函数　　图 2-10-6 投资的隶属函数　　图 2-10-7 采矿成本的隶属函数

3）采矿成本的隶属函数

根据专家意见，采矿成本$a_1$≤5.5元/吨，即可谓低成本，而最高成本$a_2=8.0$元/吨。大致可用"降半梯形分布"来描述（图2-10-7），即

$$\underset{\sim}{\mu_C}(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x\leqslant a_1)\\ a_2-x/a_2-a_1 & (a_1<x\leqslant a_2)\\ 0 & (a_2<x)\end{cases} \qquad (2\text{-}10\text{-}11)$$

4）不稳定费用的隶属函数

采用线性函数的隶属函数（图2-10-8）：

$$\underset{\sim}{\mu_D}(x)=1-\frac{1}{200}x, \qquad (2\text{-}10\text{-}12)$$

5）净现值的隶属函数

取下限为0.5百万元，上限15百万元，采用线性的隶属函数（图2-10-9），即：

$$\underset{\sim}{\mu_E}(x)=\frac{1}{14.5}(x-0.5) \qquad (2\text{-}10\text{-}13)$$

根据各隶属函数计算或从各隶属函数图形上查出五个方案所对应的不同隶属度，见表2-10-10。

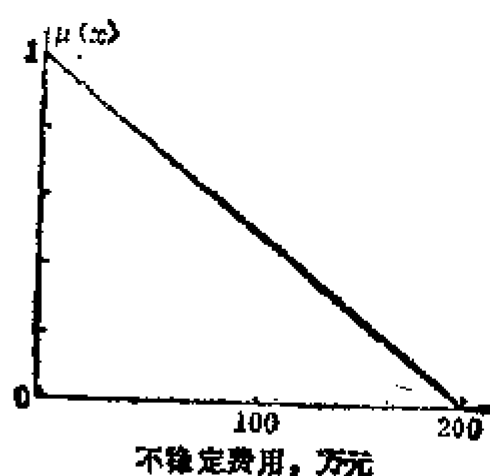



图 2-10-8 不稳定费用的隶属函数

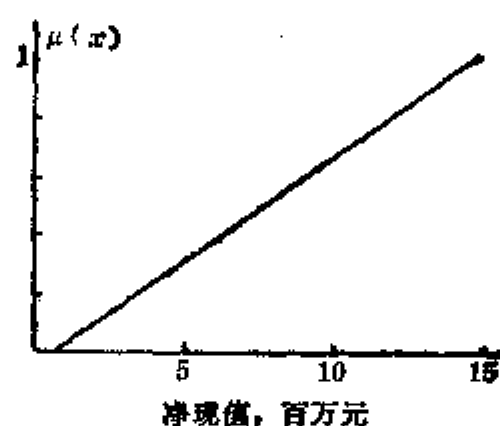



图 2-10-9 净现值的隶属函数

各方案的隶属度　　表 2-10-10

| 项　　目 | 方　案　I | 方　案　II | 方　案　III | 方　案　IV | 方　案　V |
|---|---|---|---|---|---|
| 可采矿量 | 0.534 | 0.761 | 0.670 | 1.000 | 0.864 |
| 投　　资 | 0.376 | 0.313 | 0.333 | 0.150 | 0.250 |
| 采矿成本 | 1.000 | 0.760 | 1.000 | 0.400 | 0.480 |
| 不稳定费用 | 0.850 | 0.750 | 0.800 | 0.000 | 0.200 |
| 净 现 值 | 1.000 | 0.448 | 0.655 | 0.000 | 0.034 |

这样，就决定了模糊关系矩阵为：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.534 & 0.761 & 0.670 & 1.000 & 0.864\\0.375 & 0.313 & 0.338 & 0.150 & 0.250\\1.000 & 0.760 & 1.000 & 0.400 & 0.480\\0.850 & 0.750 & 0.800 & 0.000 & 0.200\\1.000 & 0.448 & 0.655 & 0.000 & 0.034\end{bmatrix}_{5\times 5}$$

把这个$\underset{\sim}{R}$作为模糊变换器，权数$\underset{\sim}{A}$表示模糊向量。$\underset{\sim}{A}=(0.25,\ 0.20,\ 0.20,\ 0.10,\ 0.25)$，则结果：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}$$

$$=(0.25,0.20,0.20,0.10,0.25)\circ\begin{bmatrix}0.534 & 0.761 & 0.670 & 1.000 & 0.864\\0.375 & 0.313 & 0.338 & 0.150 & 0.250\\1.000 & 0.760 & 1.000 & 0.400 & 0.480\\0.850 & 0.750 & 0.800 & 0.000 & 0.200\\1.000 & 0.448 & 0.655 & 0.000 & 0.034\end{bmatrix}$$

$$=(0.744,0.592,0.679,0.360,0.391)$$

由此可知，I方案最佳，III方案次佳，继后是II，V方案，IV方案最差。

## 三、结　语

露天矿边坡设计实际上是露天采场的境界设计，这是关系到整个采矿系统的重大问

题。只有把边坡工程纳入整个采矿系统的技术效果与经济效果的综合评价，才能充分发挥边坡工程为矿山企业增加经济效益、保证生产安全的作用，才能选取最佳的边坡设计方案。

正是因为关系重大，决策也就显得更重要。然而，目前在我国的边坡工程界。还缺少管理决策的机构和方法的研究，迫切需要科学的决策方法，以替代“印象”决策。多目标边坡工程的风险决策和模糊决策，是科学的定量化的决策的一个初步尝试，是有现实意义的。

## §2-11　矿山建设投资经济效果的综合评价[35]

1986年，冯保成针对矿山建设投资经济效果评价中存在问题，论证了矿山建设项目的微观经济效果和宏观经济效果综合评价的必要性和重要性，建立了多层次，多指标的矿山建设投资经济效果指标体系，提出了多层次多算子模糊数学模型，编制了BASIC语言算法程序，形成用模糊集合理论的综合评价方法。该方法还可广泛应用于其他建设项目投资经济效果的综合评价。

国家计委《关于建设项目进行可行性研究的试管理办法》规定：“对建设项目的经济效果要进行静态的和动态的分析，不仅计算项目本身的微观效果，而且要衡量项目对国民经济发展所起的宏观效果和分析对社会的影响，……”。

这就是说，在评价矿山建设投资经济效果时，既要讲求矿山企业的微观经济效果，又要讲求国民经济的宏观经济效果；不仅要作静态经济效果分析，而且更重要的是要作动态经济效果分析。

要对矿山建设项目的微观经济效果和宏观经济效果进行综合评价，采用哪些评价指标进行评价就是一个重要的问题。

矿山建设（包括新建，改、扩建）是一个较复杂的技术经济系统工程，它具有多因素、多条件、多变量的约束，且达到多目标优化的特点。因而，要从不同的技术经济特征，提出有科学依据的一组备择方案，以便于多方案纵向横向评价，从中择优。坚持多方案比选是防止主观片面，进行正确决策的重要经验。每个技术方案通过技术经济计算，可以得到很多技术的和经济的单项指标，每一单项指标都有一定的技术概念和经济概念，分别说明某一特定意义的技术问题和经济问题。为了从不同的侧面分别阐述技术方案的特征，经济效果上的优劣，就必须采用多指标，而且赋于各个指标以不同的权值，显示不同指标的不同重要性，从而建立矿山建设投资经济效果指标体系。在指标体系中，既要有微观经济效果指标，又要有宏观经济效果指标；既要有价值指标，又要有实物指标和时间指标；既要有静态指标，又要有动态指标，从而构成一个多层次的多指标的矿山建设投资经济效果指标体系。这样，就可以对不同技术方案的经济效果的优劣进行比较，为矿山建设投资经济效果的综合评价和择优提供重要依据。

建立矿山建设投资经济效果指标必须遵循客观性、科学性、可测性、可比性的原则。根据我国矿山建设和生产实践经验，并考虑管理的改善，提出矿山建设投资经济效果指标体系如下：

矿山建设投资经济效果指标体系

| 一级 | 二级 | 编号 | 指标 | 权重 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ⅰ-1 企业经济评价指标体系（微观经济评价指标体系）(0.60) | Ⅱ-1 价值指标 (0.40) | Ⅲ-1 | 单位产品投资额 | (0.08) |
| | | Ⅲ-2 | 单位投资增加的产值 | (0.08) |
| | | Ⅲ-3 | 单位产品成本 | (0.12) |
| | | Ⅲ-4 | 单位产品盈利 | (0.12) |
| | | Ⅲ-5 | 劳动生产率 | (0.10) |
| | | Ⅲ-6 | 静态投资收益率 | (0.15) |
| | | Ⅲ-7 | 动态投资收益率 | (0.20) |
| | | Ⅲ-8 | 追加投资比较效果系数 | (0.15) |
| | Ⅱ-2 实物指标 (0.30) | Ⅲ-9 | 新建、改扩建的生产能力 | (0.10) |
| | | Ⅲ-10 | 矿山资源的合理利用程度（矿石回收率、贫化率、选、冶实收率，综合利用率） | (0.15) |
| | | Ⅲ-11 | 建设工程项目的工程量 | (0.10) |
| | | Ⅲ-12 | 建设工程质量 | (0.15) |
| | | Ⅲ-13 | 动力、燃料、原材料消耗 | (0.08) |
| | | Ⅲ-14 | 工艺技术装备水平 | (0.12) |
| | | Ⅲ-15 | 劳动生产率 | (0.10) |
| | | Ⅲ-16 | 产品质量 | (0.15) |
| | Ⅱ-3 时间指标 (0.30) | Ⅲ-17 | 劳动保护和环境保护 | (0.05) |
| | | Ⅲ-18 | 建设时间 | (0.20) |
| | | Ⅲ-19 | 达到设计生产能力的时间 | (0.20) |
| | | Ⅲ-20 | 投资回收期（静态和动态） | (0.25) |
| | | Ⅲ-21 | 追加投资回收期（静态和动态） | (0.25) |
| | | Ⅲ-22 | 矿山生产设备维护与更新期 | (0.10) |
| Ⅱ-2 国民经济评价指标体系（宏观经济评价指标体系）(0.40) | Ⅱ-4 动态指标 (0.40) | Ⅲ-23 | 净产值的净现值 | (0.40) |
| | | Ⅲ-24 | 社会收益（纯收入）净现值 | (0.30) |
| | | Ⅲ-25 | 社会内部收益率（纯收入内部收益率） | (0.30) |
| | Ⅱ-5 静态指标 | Ⅲ-26 | 静态投资产值率 | (0.50) |
| | | Ⅲ-27 | 静态社会收益率（投资利税率） | (0.50) |
| | Ⅱ-6 辅助指标 | Ⅲ-28 | 净外汇效果 | (0.25) |
| | | Ⅲ-29 | 国际竞争力 | (0.25) |
| | | Ⅲ-30 | 就业效果 | (0.20) |
| | | Ⅲ-31 | 分配效果 | (0.15) |
| | | Ⅲ-32 | 其它社会效果（如文化、技术发展、生态环境保护） | (0.15) |

## 一、应用模糊数学理论和方法进行定量化综合评价

由于矿山建设是一项较复杂的技术经济系统工程，是多因素、多指标、多目标的复杂系统。随着系统复杂性的增加，描述系统的不确定性和不精确性也增加。这种不确定性和不精确性来自：基本数据的不足和误差；扩大指标的引用；统计方法的局限性；价格的多样性；实际外汇兑换率的变异性；通货膨胀的影响；未知的或未抑制的因素；不能以数量表示的因素；不现实或不准确的假设；技术和工艺的变化；新产品、代用品的出现；经济关系和经济结构的变化；未预见到的经济、政治发展因素等等。这些不确定性和不精确性，既具有随机性，又大多数具有模糊性。人们在评价事物的推理判断，又往往是模糊推理

和模糊判断，因而作出的决策是模糊决策。这就只能用模糊数学的理论和方法把定性描述的模糊概念、模糊推理，模糊判断和模糊决策转变为数学化、定量化。根据矿山建设投资经济效果指标体系，建立比较符合实际的多层次、多算子的模糊数学模型，从而形成用模糊集合理论的综合评价方法，就能使矿山建设投资经济效果综合评价数学化、定量化，电脑化。为投资决策作出可行与不可行的结论提供定量化的科学依据。

## 二、多层次、多算子二型模糊综合评价数学模型及微机程序设计

1.多层次多算子二型模糊数学模型

设因素集合为$V=\{V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_n\}$共$n$个因素，如{价值指标、实物指标、时间指标、动态指标，静态指标、辅助指标}。评语集合为$U=\{U_1,U_2,\cdots,\ U_m\}$，共$m$个等级，如{很优、优、良，…，很差}。

再设第$i$个因素的单因素评价为$R_i=\{r_{i1},\ r_{i2},\cdots,r_{im}\}$,它可以看作是$U$上的Fuzzy子集。其中，$r_{ik}$表示第$i$个因素$V_i$的评价对于第$K$个等级$U_k$的隶属度。从而得到$n$个因素的总的评价矩阵，称为模糊关系矩阵或综合评判的变换矩阵。

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{R}_1\\ \underset{\sim}{R}_2\\ \vdots\\ \underset{\sim}{R}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm}\end{bmatrix}=(r_{ij})_{n\times m} \tag{2-11-1}$$

对于技术经济系统，有些因素在整个系统中占据较重要的地位，而有些则次之，因此，人们对于各因素总有一个统一的权衡。应用统计试验或专家评分等方法，建立各因素的权重分配。

$$\underset{\sim}{A}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)，其中a_n\in[0,1]，\sum_{i=1}^{n}a_i=1$$

亦即采用归一化的形式，称$\underset{\sim}{A}$为权系数行向量。

评语是属“模糊性”的，为了便于计算，达到“让数据说话”必须对评语进行“量化”处理，常用的办法是对评语的各个等级实行记分制，采用“5分制”或“100分制”。

一般地，令$\underset{\sim}{C}=(C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_m)$，（$m$为等级个数），称$\underset{\sim}{C}$为评语等级数值行向量。

应用Fuzzy矩阵的复合运算，得到模型Ⅰ（初始模型）——最初一层的综合评判模型。

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m) \tag{2-11-2}$$

$$b_j=\overset{n}{\underset{j=1}{\vee}}{}^*(a_i\wedge^* V_{ij}) \tag{2-11-3}$$

$\vee^*$、$\wedge^*$为模糊分析算子，由于人们在评价事物时，有不同的考虑原则，从运算的角度可丰富综合评判数学模型，因此，可针对不同原则选用不同算子。模糊分析算子选用表如表2-11-1。

**模糊分析算子选用表** **表 2-11-1**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\vee^*$ | $\vee$<br>$u\vee v=\max(u,\ v)$ | $\vee$<br>$u\vee v=\max(u,\ v)$ | $\oplus$<br>$u\oplus v=\min(u+v,\ 1)$ |
| $\wedge^*$ | $\wedge$<br>$u\wedge v=\min(u,\ v)$ | $\cdot$<br>$u\cdot v=u\times v$ | $\cdot$<br>$u\cdot v=u\times v$ |

"∨～∧"——"max～min"算子称为主要因素决定型。因为它的结果只是由指标最大的来决定，其余指标在一定范围内变化都不影响其结果，这种模型比较适用于单项最优的情况，"∨、∧"这两个运算的特点，简单明了，但丢失信息太多。

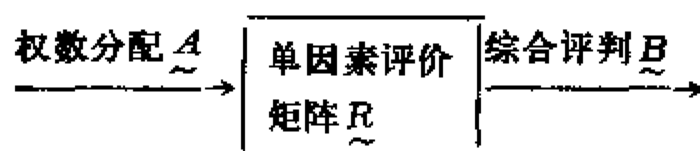
"∨ ·"——"max-product"算子称为主要因素突出型，它与"∨、∧"接近，但精细些。"max-product"算子的评判结果比"∨、∧"细腻，它多少反映了非主要指标，这种模型可用于"∨、∧"型失效，不可区别，需要"加细"的情况。

"⊕，·"——"And-product"算子称为加权平均型，它对所有因素依权重的大小均衡兼顾，比较适用于要求整体指标的情况。

假如既要考虑全面，又要兼顾重点的话，则要对"∨ ·"——max-product 和"⊕ ·"——And-product两种算子所得的结果进行加权平均，再进行比较。因此，模糊分析算子根据描述问题的具体要求选用。

$\underset{\sim}{R}$如（2-11-1）式给出，它是作为从V到U的模糊变换器，每输入一组权重$\underset{\sim}{A}$，都可以得到相应的综合评判$\underset{\sim}{B}$。

上述综合评判模型，可画成下述框图：




这是一个简单的具有相当普遍意义的模型，作为对单因素评价所进行的综合。任何一个综合评判的形成，都可以归结于上述框图。

然而，在复杂的技术系统中，由于需要考虑的因素往往很多，且多因素之间具有并列关系，因果关系及包含关系。人们在遇到这类情况时，往往把因素集合按某些属性分成几类，按照不同的层次先对每一类（因素较少）综合评判，再对评判结果进行类之间的高层次的综合，为此，提出了多层次综合评价模型。

给定集合$V$，若$P$是把$V$分成所有子集的一种分法，且满足

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_i=V,\ V_i\cap V_j=\phi,\ i\neq j$$

则称$P$是对$V$的一个划分。$V$在$P$划分之下得到的集合记为：

$$V/P=\{V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_n\}$$

多层次综合评判可按下面步骤进行：

步骤1，对因素集$V$作划分$P$，得到第二级因素级：$V/P=\{V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_n\}$，记$V_i=\{V_{i1},\ V_{i2},\ \cdots,\ V_{ik}\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。显然，$V_i$含$K_i$个因素，$V_i$有$\sum_{i=1}^{n} K_i$个因素。

步骤2，对每个$V_i$的$K_i$个因素按初始模型作综合评判：设$V_i$的诸因素权重分配为$\underset{\sim}{A}_i$，

$V_i$的总评价矩阵为$\underset{\sim}{R}_i$，则得到：

$$\underset{\sim}{A}_i \circ \underset{\sim}{R}_i = \underset{\sim}{B}_i = (b_{i1},\ b_{i2},\ \cdots,\ b_{im}),\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

步骤3，对$V/P$的$n$个因素按初始模型作综合评判，$V_i$的综合评判结果$\underset{\sim}{R}^*$是$V/P$中的单因素$V_i$的评价。设$V/P$的权重分配为$A^*$，总的评价矩阵为：

$$\underset{\sim}{R}^* = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_1 \\ \underset{\sim}{B}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{B}_n \end{bmatrix} = (b_{ij})_{n\times m}$$

则得到$\underset{\sim}{B}^* = \underset{\sim}{A}^* \circ \underset{\sim}{R}^*$，它既是$V/P$的综合评判结果，也是$V$的所有因素的综合评判结果。

上述步骤可写成如下算式：

模型Ⅱ（二级模型）：

$$\underset{\sim}{B}^* = \underset{\sim}{A}^* \circ \underset{\sim}{R}^* = A^* \circ \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_1 \circ \underset{\sim}{R}_1 \\ \underset{\sim}{A}_2 \circ R_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \underset{\sim}{A}_n \circ R_n \end{bmatrix}$$

$$= (a_1', a_2', \cdots,\ a_n) \circ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}11\text{-}4)$$

它的框图如下：

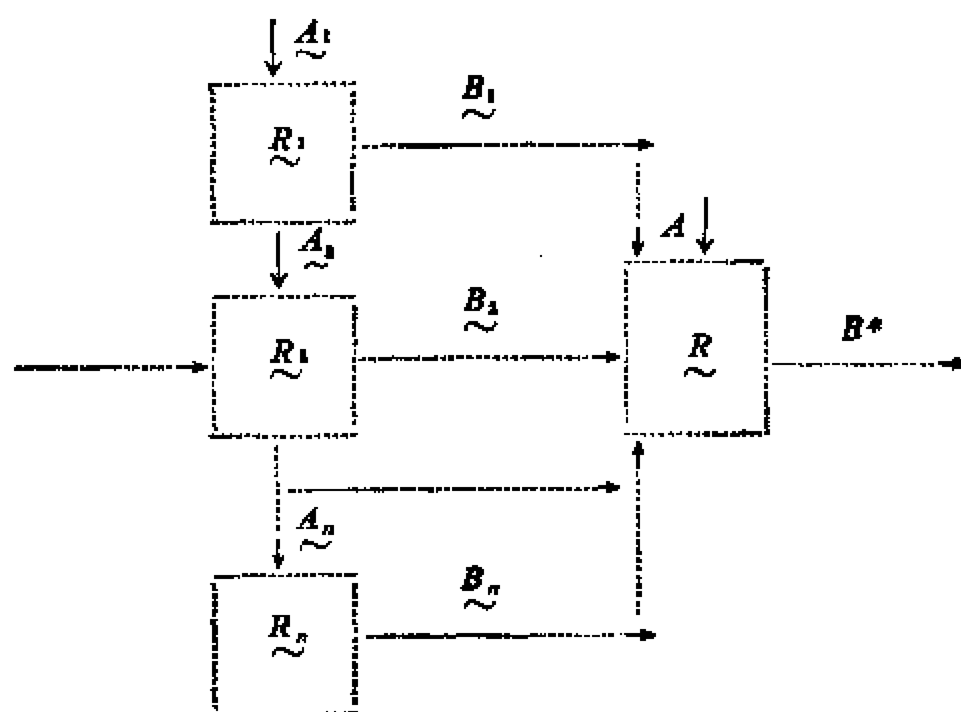



图 2-11-1 二级模型框图

上面给出的是二级模型。若$V/P$仍含有很多因素，可对它再作划分，得到三级以至更多级综合评判模型（矿山建设投资经济效果指标体系就是按三级综合评判模型划分的）。

模型Ⅱ可以反映客观事物因素间的不同层次，又避免了因素过多难分配权重的弊病。

最后，计算综合评价值：

$$W = \underset{\sim}{B}^* \cdot \underset{\sim}{C}^T \qquad (2\text{-}11\text{-}5)$$

式中：$W$——综合评价值；$\underset{\sim}{B}^*$——最终综合 评判矩阵；$C$——评语等级 评分行向量；$C^T$——$C$的转置矩阵。

不同算子计算出的$W$值进行比较，最大的即为最优。如果要做到既要全面，又要兼顾重点的比较，可将不同算子所计算出的$W$值加权平均，再进行比较，选出最优者。

综合评价值$W$具体地定量化地反映了不同建设方案的投资经济效果的评分值，对照评分变化范围，可以比较不同建设方案的投资经济效果的优劣，从而为择优投资决策提供了客观的科学的定量依据。

2.最优权重分配方案的确定。

若给定单因素评判矩阵$\underset{\sim}{R}$，而综合评判结果$\underset{\sim}{B}$是可靠的，欲求着眼点的权重分配，此即为综合评判的逆问题。该问题实质上是：

已知$\underset{\sim}{R}$和$\underset{\sim}{B}$，求解Fuzzy关系方程。

$$\underset{\sim}{X} \circ \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{B}$$

其中解出的$X$即为权重分配$\underset{\sim}{A}$。

我们可以运用Fuzzy关系方程的理论，通常采用一种简捷列表法求出方程的解，还可以采用另一种方法，也就是从一组备择的权重分配方案中，找出一种相对来说较优的方案，其作法如下：

设$J=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$为$V$上一组Fuzzy子集（一组备择方案集），根据择近原则，若有$i$使

$$(\underset{\sim}{A_i} \circ \underset{\sim}{R},\ \underset{\sim}{B}) = \max_{1\leqslant j\leqslant n}(\underset{\sim}{A_j} \circ \underset{\sim}{R},\ \underset{\sim}{B}) \qquad (2\text{-}11\text{-}6)$$

式中：$(\underset{\sim}{A_i} \circ \underset{\sim}{R},\ B) = \frac{1}{2}[((\underset{\sim}{A_i} \circ \underset{\sim}{R}) \cdot \underset{\sim}{B}) + (1-(A_i \circ R) \odot B)][(A_i \circ \underset{\sim}{R}) \cdot B]$称为$(A_i \circ \underset{\sim}{R})$与$\underset{\sim}{B}$的内积，$[(A_i \circ R) \odot B]$称为$(A_i \circ R)$与$\underset{\sim}{B}$的外积，（2-11-6）式称$(\underset{\sim}{A_i} \circ \underset{\sim}{R})$与$\underset{\sim}{B}$的贴近度。此时，则称为$A_i$是从$J$中选出的最优权重分配方案。

问题是如何确定一组备择方案？我们可以采用运筹学中常使用的Delphi法（又称咨询法）。其方法是先设计好问题的调查表。让不同类型的专家们彼此在隔离的情况下分别填写，然后汇总整理，对意见相差太远的，再进一步征询意见和讨论，消除误解，调整方案，具体步骤如下：

步骤1，每一专家独立地给出$\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$的权重分配方案（$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$），$0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$，且$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$。

步骤2，将鉴定结果列入表2-11-2，其中$m$表示专家个数，而第$i$列表示不同专家对$\lambda_i$的取法，将它视为离散随机变量$\lambda_i$的具体体现。

步骤3，求数学期望估价

$$\widetilde{M}(\lambda_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}$$

并计算每一位专家所给权重与数学期望的偏差

$$\Delta_{ji} = \lambda_{ji} - \widetilde{M}(\lambda_i),\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

步骤4，讨论结果，先让有最大偏差的专家们发表意见，消除误解，调整结果。

步骤5，再重复计算2与3步骤，并计算$\widetilde{M}(\lambda_i)$及方差估计：

$$\sigma^2(\lambda_i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{ji}-\widetilde{M}(\lambda_i))^2$$

方差的计算是为了帮助我们了解随机变量$\lambda_i$取值时，以$\widetilde{M}(\lambda_i)$为中心的分散程度。由于是对不同专家调查的，因此，得到一组备择方案。

不同专家对权重分配的意见统计表　　表 2-11-2

| 专家＼权重 | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | …… | $\lambda_i$ | …… | $\lambda_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1<br>⋮<br>$j$<br>⋮<br>$m$ | $\lambda_{11}$<br>⋮<br>$\lambda_{j1}$<br>⋮<br>$\lambda_{m1}$ | $\lambda_{12}$<br>⋮<br>$\lambda_{j2}$<br>⋮<br>$\lambda_{m2}$ | ………<br>⋮<br>………<br>⋮<br>……… | $\lambda_{1i}$<br>⋮<br>$\lambda_{ji}$<br>⋮<br>$\lambda_{mi}$ | ………<br>⋮<br>………<br>⋮<br>……… | $\lambda_{1n}$<br>⋮<br>$\lambda_{jn}$<br>⋮<br>$\lambda_{mn}$ |

3.编制微机程序设计：

根据矿山建设投资经济效果指标体系，多层，多算子二型模糊综合评价数学模型，我们使用16K微机（或64K微机），编制程序框图，用BASIC语言编制算法程序，其框图及程序如下：

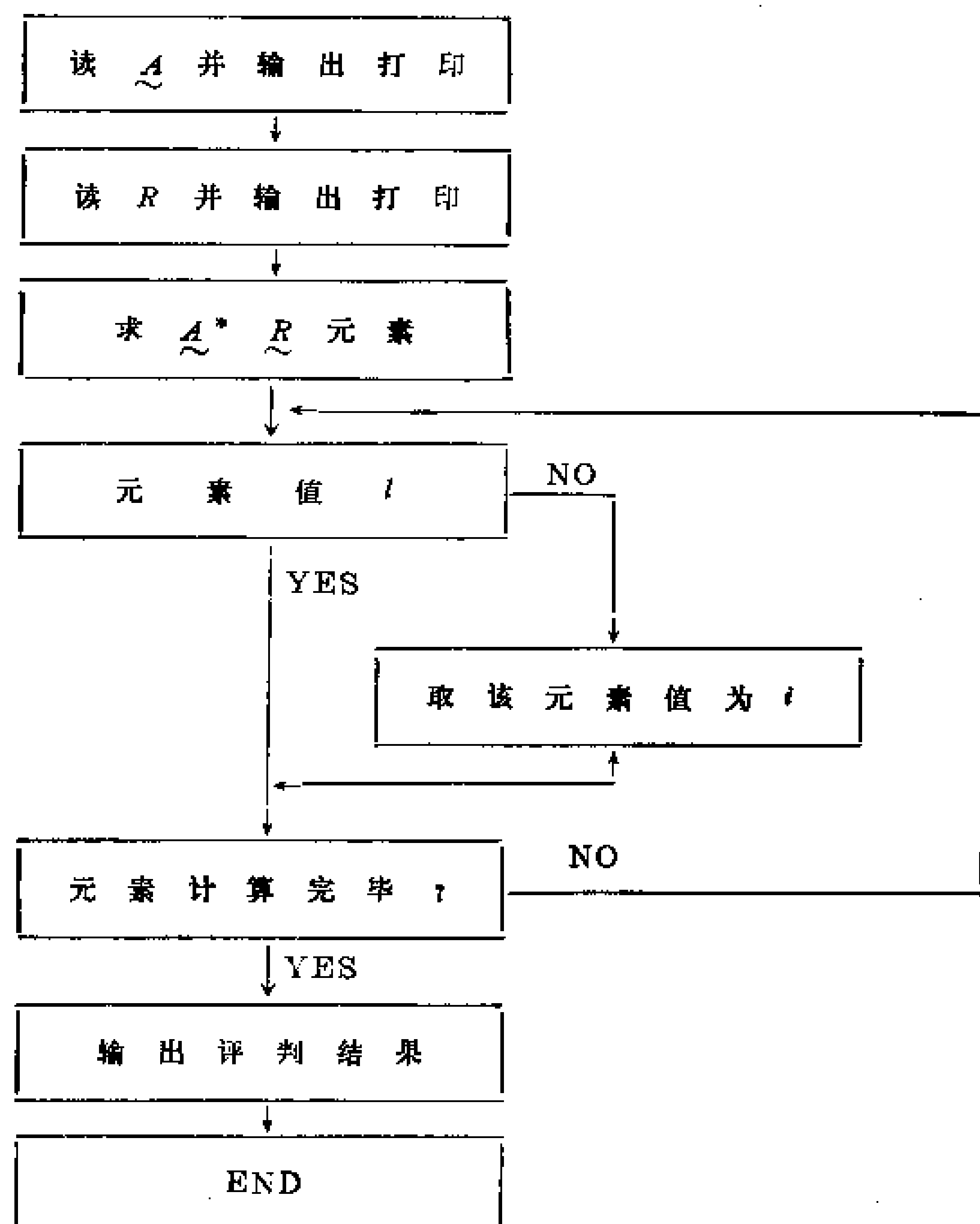



图 2-11-2　$B^*=\underset{\sim}{A}^*\circ R^*$计算框图

```
10  READ  N, M
20  DIM    A(1, N)R  (N, M)
30  FOR    I = 1   TO N
40  READ  A( 1 , N)
50  NEXT  I
60  FOR    I = 1 TO N
70  FOR    J = 1   TO M
80  READ  R(I, J)
90  NEXT  J
100 NEXT  I
110 @:@ "A: "
120 FOR    I=1 TO N
130 @USING "#####   ##", A(1, I)
140 NEXT  I
150 @
160 @:@ "R: "
170 FOR    I=1 TO N
180 FOR    J=1 TO M
190 @USING "#####   ##", R(I, J)
200 NEXT
210 @:NEXT  I
220 DIM  C(1, N )
230 FOR  I=1   TO N
240 FOR  J=1   TO M
250 C(I, J)=0
260 FOR  K=1   TO N
270 C(I, J)=C(I, J)+A(I, K)*R(K, J)
280 NEXT  K
285 IF ABS(C(I, J))>=1   THEN C(I, J)=1
290 NEXT  J
300 NEXT  I
310 @: @ "A*R: "
320 FOR  I=1   TO M
330 USING "#####   ##" C(I, J)
340 NEXT  I
350 DATA  n, m
360 DATA  r11 r12…r1m
370 DATA  r21 r22…r2m
 ⋮  ………………………
```

```
500  DATA  r_n1 r_n2 … r_nm
510  @: @*
520  END
≫  RUN
```

$A$: $a_1$ $a_2$ … $a_n$

$R$: $r_{11}$ $r_{12}$ … $r_{1m}$

$r_{21}$ $r_{22}$ … $r_{2m}$

……………………

$r_{n1}$ $r_{n2}$ … $r_{nm}$

$A*R$: $b_1$ $b_2$ … $b_m$

## §2-12 Fuzzy数学方法及微机技术在选矿破碎生产过程中的应用[36]

1985年，田成方、王学寅研讨了Fuzzy数学方法与微机技术在选矿破碎生产过程中的应用。首先，论述了被控对象的工艺特点、控制任务与目的以及控制方案的选定。接着给出控制系统的结构及其工作原理，包括自组织Fuzzy控制器的设计原理与工作方法，Fuzzy控制规则，合成算法以及Fuzzy控制表的制取等，最后给出结论：提高生产率12%左右，避免了电动机过载而停产的事件发生。

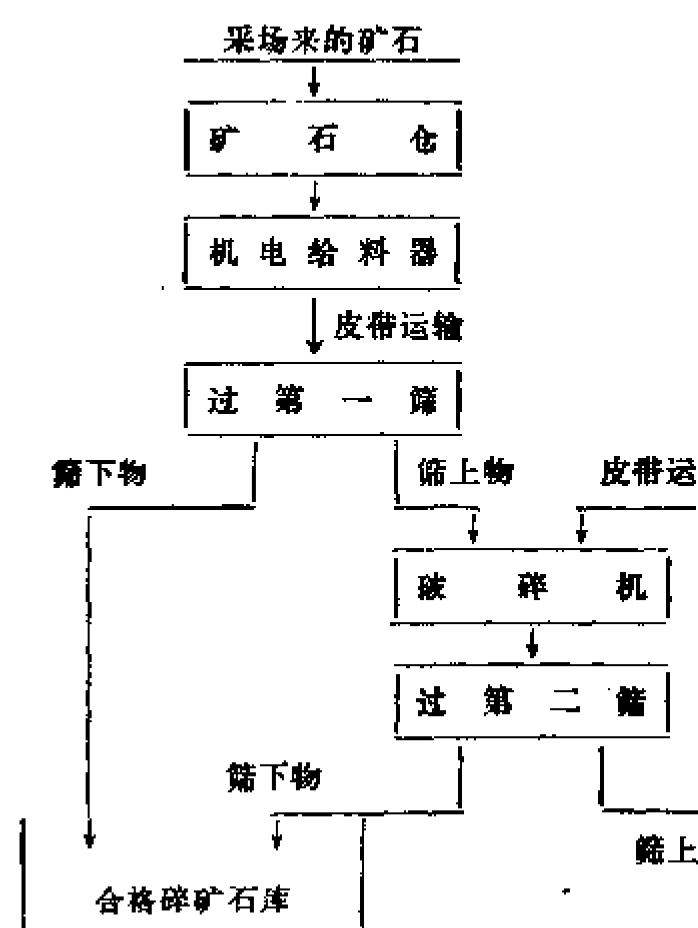



图 2-12-1 工艺基本流程

### 一、被控对象的工艺特点及控制任务

某矿区选矿厂的矿石破碎生产线的任务是将采场送来的预先破碎的矿石，再破碎成线尺寸不超过20mm的碎块，以便送往选厂；再经球磨、过筛等加工处理后进行浮选。其工艺基本流程如图2-12-1所示。

采场运来已破碎的矿石装入矿石仓，再由机电给料器以适当的给料量将矿石给出，经皮带运输机送到第一个筛子。第一个筛子把已经合格的小粒矿石筛出，并送入合格碎矿石库。筛上物被皮带运输机送入破碎机。从破碎机出来的碎矿石进入第二个筛子，筛下物为合格的碎矿石，又被送入矿石库，筛上物为未合格的碎矿，由皮带运输机送回破碎机，与给料器送来的矿石混在一起再次破碎。

当进入破碎机的矿石量越限（过多）使破碎机的拖动电动机负荷增加到规定值时，保护装置就自动切断电源，以免电动机烧毁，这时该生产线就要停工。停工后再恢复正常生产要经过很麻烦的手续，处理需要两个小时，影响很大。

自动控制的任务是使生产效率尽量提高，并尽量避免停产事件发生。为了达到这个目

的，需要根据砂石特性和破碎机工况的随机变化而及时控制机电给料器的给料量。通过改变机电给料器电流的大小来控制给料量，取得高效率生产和安全运行。

现场实测表明，从给料器到第一个筛子和回矿过程的矿石传送时间均为60s，而机电给料器和破碎机的时间常数为15s左右，故整个系统为滞后较大的随机变化的控制对象，而且其确切的数学模型不容易求得，增加了计算机控制的难度。

用PI或PID调节器控制时，由于数学模型不清，随机参量变化多，以及矿石特性和破碎工况的随机变动等，引起电动机的负荷大幅度地波动。故采用PI或PID调节器时，为了减少或避免电动机过负荷而引起停产的机率，只能把给定值定得很低。因此，就无法充分利用设备的生产能力，致使生产效率很低。为此，采用了Fuzzy控制技术寻求提高生产效率。

## 二、控制系统结构的选定及其工作原理

开始选的Fuzzy控制器如图2-12-2的实线部分所示。它是一个普通的两输入——单输出的Fuzzy控制器，其控制规则是总结大量操作者对控制对象的认识和操作经验而得出的。图2-12中的$GE$，$G\dot{E}$和$GU$分别是偏差、偏差变化和控制量的比例系数。在离线Fuzzy计算时，偏差$e$和偏差变化$\dot{e}$经Fuzzy化转换为偏差和偏差变化Fuzzy集$\underset{\sim}{E}$和$\underset{\sim}{\dot{E}}$。$\underset{\sim}{E}$和$\underset{\sim}{\dot{E}}$与Fuzzy关系矩阵$\underset{\sim}{R}$合成后得到控制量Fuzzy集$\underset{\sim}{U}$，$\underset{\sim}{U}$经决策得到控制量$u$，再乘以比例系数得到确定的$u_i$、$\underset{\sim}{E}$、$\underset{\sim}{\dot{E}}$。$\underset{\sim}{U}$和$u$与论域中的偏差和偏差变化的不同组合相对应，从而得到控制表。

按上述方法所得的控制表，应用到该系统时效果较差，因为本系统的随机变化的工况较多，滞后较大。所以应当进一步改善'设计一个能自动对Fuzzy控制规则进行修正和完善的自组织Fuzzy控制器。也就是在结构上增加了性能测量、控制量校正和控制规则修正三部分，如图2-12-2虚线部分所示。自组织模糊控制系统的硬件结构如图2-12-3所示。其中电流互感器检测出拖动电机相应负荷的电流值，通过整流滤波变成对应的直流电压输出，供给ADA转换器。经ADA输出的数字$Y$送入Z-80Ⅱ型单板机。计算机将它与给定值$S$比较，得出偏差$e$送自组织Fuzzy控制器入口，经自组织Fuzzy控制表得出给料机可控硅触发角$\alpha$值去触发给料机电源的可控硅，输出相应电压来调节给料机电源的电流，即可调节给料量，达到稳定拖动电机负荷的目的。

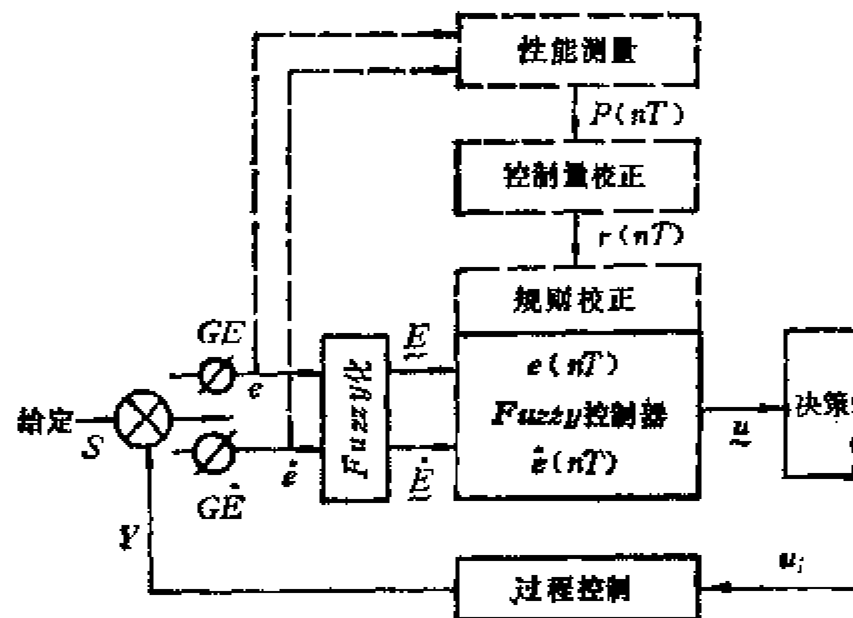



图 2-12-2　自组织Fuzzy控制器

自组织Fuzzy控制器的控制表，可以用下述两种方法（计算机离线Fuzzy算法）来获得：

1.通过自组织Fuzzy控制修改Fuzzy关系矩阵获得控制表

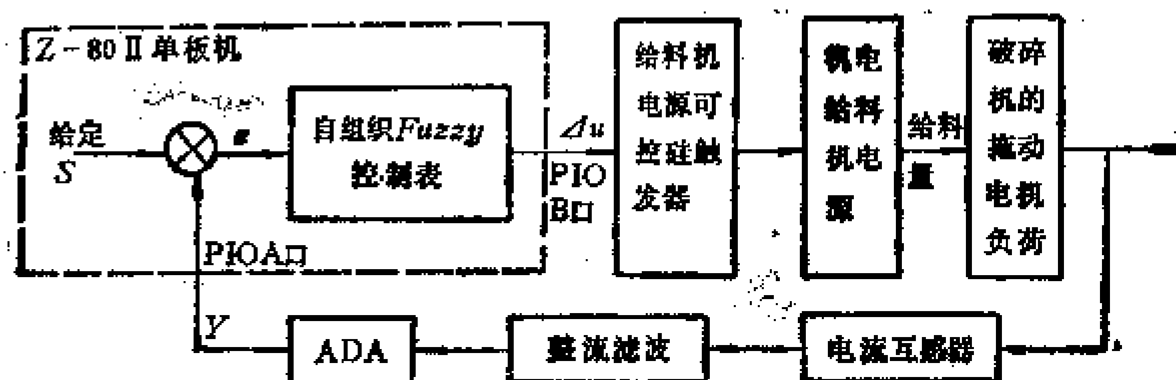



图 2-12-3　自组织模糊控制系统硬件结构图

因为本系统的输出有滞后量，即$(nT-mT)$时刻的控制对$nT$时刻系统的性能有影响[如果我们把采样周期定为5s，则$m=60-15/5=9$，即$(nT-9T)$时刻的控制对$nT$时刻系统的性能有影响]。所以每一采样周期后，关系矩阵修改为

$$R(nT+T)=\{R(nT)\wedge\overline{R_1(nT)}\}\vee R_2(nT)$$

式中：$R(nT)$为$nT$采样周期时的关系矩阵；$R_1(nT)=E(nT-mT)\times\dot{E}(nT-mT)\times U(nT-mT)$；$R_2(nT)=E(nT-mT)\times\dot{E}(nT-mT)\times V(nT-mT)$；$E(nT-mT)$为偏差的Fuzzy集；$\dot{E}(nT-mT)$为偏差变化的Fuzzy集；$U(nT-mT)$为控制输出的Fuzzy集；$V(nT-mT)$为考虑了控制量校正$r(nT)$作用后的控制量Fuzzy集。

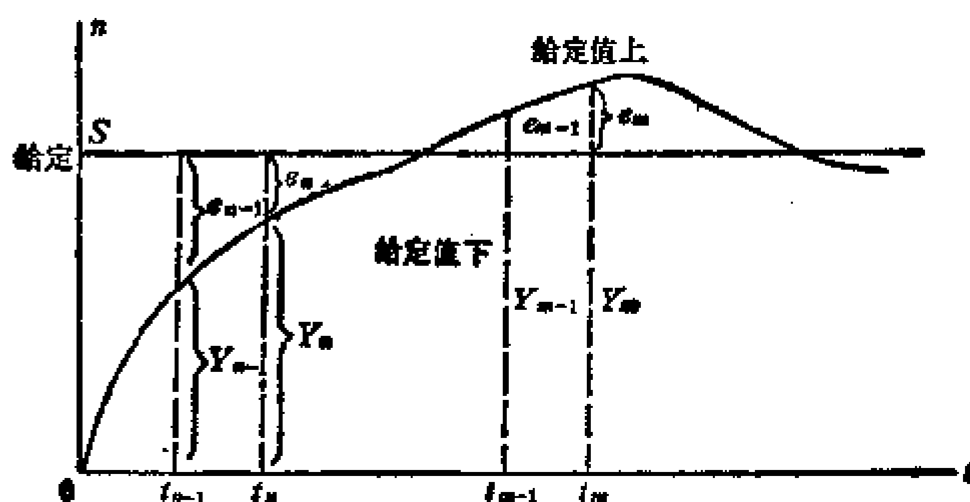



图 2-12-4　输出特性与希望特性的偏离情况

这样，可在每次采样后按上式修改，最后由性能较好的关系矩阵得到控制表。这种方法的缺点较多，计算繁琐，一般计算机的贮存量难以满足要求。由于本系统所要采用的是微型机或单板微型机，因此也不宜采用这种方法。

2.通过自组织Fuzzy控制修改控制表

本系统利用这种方法的步骤如下：

1）性能测量

取“偏差”（$e(nT)=Y_n-S$），“偏差变化”（$\dot{e}(nT)=e_n-e_{n-1}$）为两个参数，用以衡量输出特性与希望特性的偏离情况，如图2-12-4所示。并以这两个参数用求Fuzzy控制表一样的方法计算出对输出特性所需要的校正量$P(nT)$。将“偏差”$e(nT)$、“偏差变

化”$\dot{e}(nT)$、校正量$P(nT)$分成如下的档级*(“偏差”在给定值下：$e(nT)=Y_m-S$为负值；$\dot{e}(nT)=e_n-e_{n-1}$为正时是朝向给定值变化，为负时是离开给定值变化；偏差在给定值上：$e(nT)=Y_m-S$为正值；$\dot{e}(nT)=e_m-e_{m-1}$为正时是离开给定值变化，为负时是朝向给定值变化)。

$e(nT)$：－6，－5，－4，－3，－2，－1，－0，＋0，1，2，3，4，5，6；

$\dot{e}(nT)$：－6，－5，－4，－3，－2，－1，0，1，2，3，4，5，6；

$P(nT)$：－6，－5，－4，－3，－2，－1，1，2，3，4，5，6；

再根据$e(nT)$是在给定值下或上，以及$e(nT)$是朝向给定值或是离开给定值方向趋势来决定校正量$P(nT)$的大小。这样得出校正表如表2-12-1。

校　正　表　　　　表 2-12-1

| $e(nT)$ | | $\dot{e}(nT)$ | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 朝离开(或向)给定值变化 | | | | | | | 朝向(或离开)给定值变化 | | | | | |
| | | $P(nT)=r(nT)$ | | | | | | | | | | | | |
| | | －6 | －5 | －4 | －3 | －2 | －1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 给定值以下 | －6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | －5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 3 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| | －4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | －3 | 6 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | －2 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | －1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | －0 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 给定值以上 | ＋0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | －1 | －2 | －3 | －4 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | －1 | －1 | －1 | －2 | －3 | －4 | －5 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | －1 | －2 | －3 | －4 | －4 | －5 | －5 | －6 |
| | 3 | 0 | 0 | 0 | －1 | －2 | －3 | －4 | －4 | －4 | －4 | －5 | －6 | －6 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | －1 | －2 | －3 | －4 | －5 | －5 | －5 | －6 | －6 | －6 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | －2 | －2 | －3 | －5 | －6 | －6 | －6 | －6 | －6 | －6 |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | －6 | －6 | －6 | －6 | －6 | －6 | －6 |

2 )控制量校正

本系统是单输入-单输出纯滞后较大的系统，其控制量校正应为(暂不考虑滞后量的问题)。

$$r(nT)=KP(nT)$$

此处由于控制量和输出量均为归一化的，则系数$K=1$。于是：

$$r(nT)=P(nT)$$

3 )控制规则修正及制取Fuzzy控制表

有了$P(nT)$和$r(nT)$就可按自组织Fuzzy控制器的工作原理及其设计方法来制取自组织Fuzzy控制表，其结果如表2-12-2所示(未考虑纯滞后量的问题)，以$\Pi_{nr}$代表。由于

本系统的滞后量较大，正如前述，即$(nT-9T)$时刻的控制对$nT$时刻系统的性能有影响，所以此处控制量的修正量应为

$$\nu(nT-9T)=u(nT-9T)+r(nT)$$

自组织Fuzzy控制表（$\Pi_{nT}$）　　　　表 2-12-2

| $e(nT)$ | $\dot{e}(nT)$ | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $u(nT)$ | | | | | | | | | | | | |
| | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| -6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 3 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| -4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 4 | 5 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| -3 | 6 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| -2 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -1 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -0 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| +0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -2 | -3 | -4 | -5 | -6 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -3 | -4 | -4 | -4 | -4 | -5 | -5 | -6 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | -2 | -4 | -5 | -4 | -6 | -6 | -6 | -6 | -6 | -6 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -3 | -6 | -6 | -6 | -6 | -6 | -6 | -6 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -6 | -6 | -6 | -6 | -6 | -6 | -6 |

4）通过自组织Fuzzy控制修改控制表

由于初始Fuzzy控制的偏差$e(nT)$、偏差变化$\dot{e}(nT)$、控制量$u(nT)$Fuzzy集都是单峰的，因此，初始关系矩阵$R_0$的每一行最多只有一个元素为1，称这样状态为初始状态，否则称为变换状态。对控制表$\Pi_{nT}$进行直接修正的规则如下：

（1）在初始状态时，若相邻采样周期测到的$e$和$\dot{e}$不相等，则将控制表$\Pi_{nT}$中的与$e(nT-9T)$和$\dot{e}(nT-9T)$对应的控制量修正为$\nu(nT-9T)=u(nT-9T)+r(nT)$；

若相邻采样周期测到的$e$和$\dot{e}$都相等，则将控制表$\Pi_{nT}$中相应的控制量修正为

$$\left\langle \frac{\Pi_{nT}[e(nT-9T)\text{'}\,\dot{e}(nT-9T)+\nu(nT-9T)]}{2} \right\rangle$$

$$=\left\langle \Pi_{nT}[u(nT-9T)]+\frac{1}{2}r(nT) \right\rangle$$

并取整数。

（2）在变换状态时，一律按上面的方法对控制表$\Pi_{nT}$进行修正。

经上述方法不断修改，便可得到性能较好的自组织Fuzzy控制表。控制表也可在每次采样时修改和使用。这对计算机的容量和速度的要求可以降低，可以用微型机或单板机来实现。

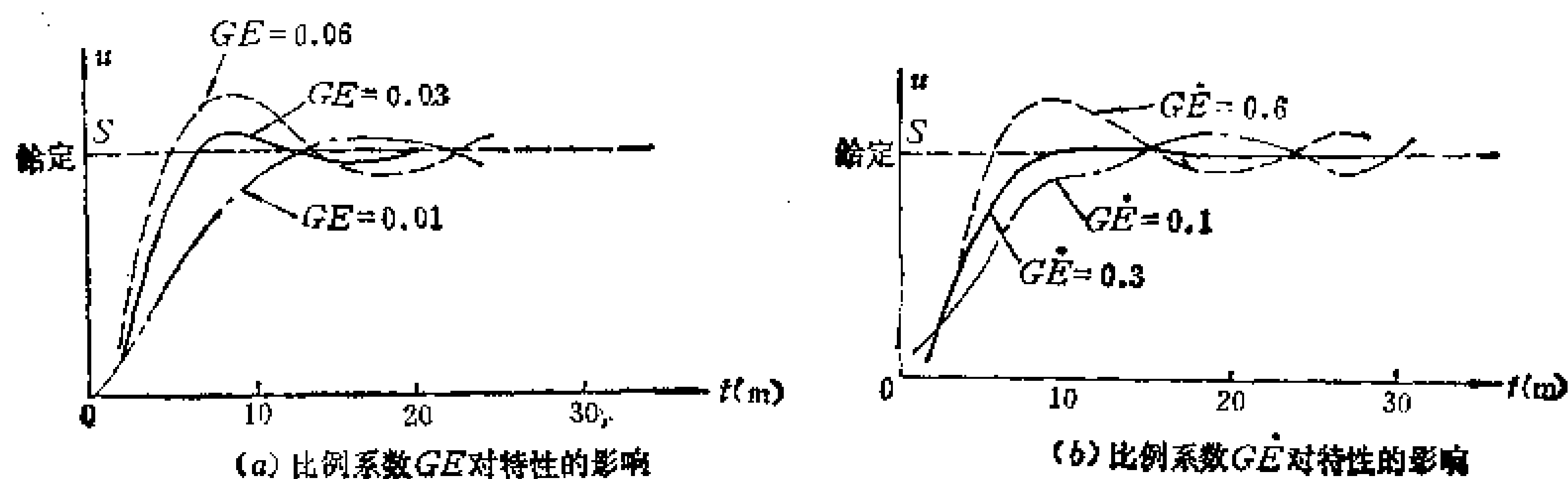
## 三、结　论

本系统采用上述自组织Fuzzy控制技术，得到了较好的控制效果。破碎机拖动电动机的最大允许功率是200kW，用$PI$或$PID$调节时只能给定在150kW上，尚不能避免停车事件的发生。采用自组织Fuzzy控制器后，就允许将它给在195kW，使生产率提高12%左右，并可避免电动机过载而停产的事件发生。

在本系统Fuzzy控制中发现，不同的比例系数$GE$、$G\dot{E}$、$GU$和不同的采样周期对特性有一定的影响；如图2-12-5所示。

由图2-12-5(a)中可以看出：当$GE$增加时，上升速度加快并出现超调量，$GE$过大，超调量增大。由图2-12-5(b)中可以看出：$G\dot{E}$的大小也影响特性曲线的上升速度和超调量。所以在实际工作中适当确定$GE$、$G\dot{E}$和$EU$是很重要的。

图2-12-6是不同采样周期对特性的影响。可见采样周期小时，系统特性上升快，但超调量增大；采样周期大时，系统特性上升慢，可减少稳态误差。



(a) 比例系数$GE$对特性的影响　　(b) 比例系数$G\dot{E}$对特性的影响

图 2-12-5　$GE$和$G\dot{E}$对特性的影响

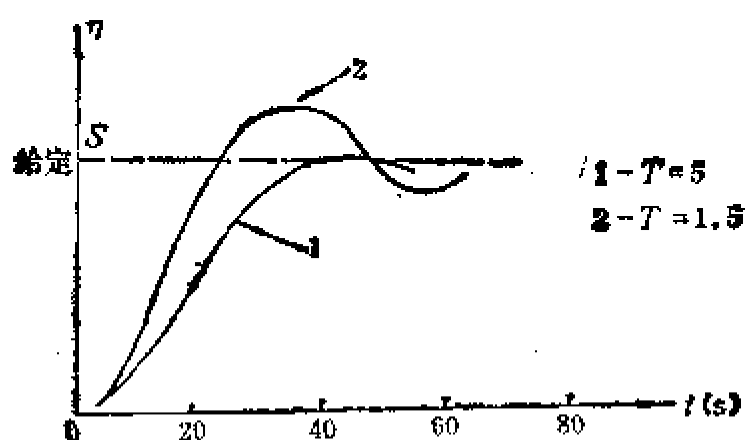


图 2-12-6　采样周期对特性的影响

# 第三章

## 模糊数学在地震工程和土建工程中的应用

在地震工程和土建工程中，是应用模糊数学理论和方法进展最快、成果最多、收效最显著的领域。近几年来，美国学者Colin.B.Brown等，中国学者冯德益、王光远等都论述了模糊数学在地震工程和土建工程中的应用。1985年，在北京召开了"地震研究中的模糊数学方法国际学术会议"（Proceedings of International Symposium on Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches 1985 Beijing），会议上宣读了47篇论文，由冯德益等编辑，地震出版社出版了英文版本的《国际学术讨论会论文集》，较全面系统地收集了国内外模糊数学在地震工程和土建工程中应用的最新成果。另外，王光远等在专题论文集中，论述了模糊数学在结构模糊优化设计中应用的最新成果。

从这些论文和专著中可知，在地震和土建工程中存在着两种不确定性，即随机性和模糊性。例如，地震的发生，由于各种不可控制的偶然因素的影响，在条件基本相同的条件下，它们的多次结果会各不相同，也就是说，地震产生的结果具有不确定性，这就是事物的随机性。再如，在同一地点对同一次发生的地震进行调查，不同的人评定的地震烈度可能各不相同，也就是说评定事物的标准或事物本身的定义有不确定性，这就是事物的模糊性。又如，"某地五年内可能发生接近9度的地震"，这个预报就既具有随机性，又具有模糊性。在土建工程的模糊系统识别中，系统的输入，系统本身和系统的输出都或者是确定性的或者是概率性的或者是模糊性的；在结构动力模型中亦存在结构和模型的两种不确定性，即具有随机性参数的结构和具有模糊性参数的结构；在结构优化设计中，设计的优劣标准、某些荷载、材料强度及其许用范围等事物既具有随机性，又具有模糊性，在现行设计方法中已初步考虑了荷载和材料强度的随机性，但目标函数、荷载、结构反应和物理量允许区间的模糊性尚未被人们注意，只有考虑了这些事物的随机性和模糊性，才能使设计更为合理、可靠、经济和适于使用。总之，在地震工程和土建工程中存在着大量的随机性和模糊性。其随机性是由于因果关系不明确造成的，其模糊性是由于事物定义不明确造成的，事物定义和因果关系均不明确时就造成事物既有模糊性又有随机性。描述随机性的概率分布和分布函数常常有相当的近似性和一定的主观性，但它们服从客观的概率统计规律，概率具有稳定性。因而，可以利用概率统计试验近似地得出，并用概率论方法把随机性数量化。描述模糊性的隶属函数、可能性分布，可能性分布函数更是具有近似性和主观性，但它们也服从客观的模糊统计规律，隶属频率也具有稳定性。因而，可以利用模糊统计和集值统计试验近似地得出，并且用模糊数学方法处理模糊性，使其数量化。特别是，往往可以把概率论方法和模糊数学方法结合起来去研究和处理地震和土建工程中既具有随机性又具有模糊性的问题，这使人们对客观世界的认识和研究更加深化。

目前，已经提出了研究和处理地震工程和土建工程中的随机性和模糊性现象的各种方

法和数学模型，通过大量的应用实践，证明了在地震工程和土建工程中应用模糊数学方法或者模糊数学与概率论相结合的方法是更为符合客观实际，更为合理，可靠。目前应用已见成效的有如下几个方面：

（1）模糊数学在地震危害估价中的应用：包括模糊聚类分析的应用、模糊信息检索的应用、模糊相似方法的应用、模糊模式识别方法、模糊多因素评价方法、模糊图论方法、模糊接近度方法的应用等等。

（2）模糊数学在地震预测和预报中的应用：包括地震预兆的模糊识别、模糊多途径地震预测、模糊模式识别的直接方法、模糊聚类分析方法、模糊多因素评价方法、对地震预测各种看法的模糊评判、地震预测后的模糊决策、模糊BAYES规则和预报决策。

（3）模糊数学在地震烈度测定中的应用：包括地震烈度的随机性和模糊性的表达式、地震烈度的二级模糊综合评定、模糊集凸组合法、模糊数语言概率均值方法、地震烈度模糊评定的广义方法。

（4）在土建工程中模糊系统的识别：包括模糊集合理论基础、条件推理关系识别、专家意见聚集。

（5）结构动态模型中的不确定性处理：包括具有随机性参数的结构、具有模糊性参数的结构。

（6）结构模糊优化设计。

（7）抗震结构的模糊优化设计。

（8）抗震结构的模糊可靠性分析。

## §3-1　模糊数学在地震危害评估中的应用[37]

1985年，冯德益、楼世博、李明忠等针对在地震危害评估中已应用的模糊数学的各种方法，总结和评论了近几年来主要由中国地震学家和数学家所得到的一些重要成果。

### 一、模糊聚类分析法的应用

按照各种类型的地震统计指数或预兆数据，以模糊相似关系为基础，利用模糊聚类分析，可以把在不同时间、区间或在不同区域内的不同极大量级的地震加以分类。其中，以模糊等价关系为基础的聚类分析方法（冯德益、楼世博等1982年，1984年）应用较多。

1.方法

所利用的方法主要包括如下步骤：

1）求得各样品之间的模糊类似关系

假设有作为矢量$x_1$，$x_2$，…，$x_n$的$n$个样品，则可以求得如下模糊类似关系：

$$U_R(x_i,\ x_j)=\frac{(x_i,\ x_j)}{\|x_i\|\cdot\|x_j\|}=r_{ij} \qquad (3\text{-}1\text{-}1)$$

式中：$\|x_k\|$是矢量$x_k$的模数；$(x_i,\ x_j)$是$x_i$和$x_j$的标量积。

一般模糊关系可以用一个$n\times n$模糊矩阵$\underset{\sim}{R}=[r_{ij}]_{n\times n}$来表达。

显然，模糊关系$\underset{\sim}{R}$是一个类似关系。因为，它是自反的（$r_{ij}=1$，$r_{ij}<1i=j$）和对

称的（$r_{ij}=r_{ji}$）。

2）把模糊类似关系变换成为模糊等价（相似）关系

关系被称之为一个等价（相似）关系，而且它是自反的、对称的和有max-min传递性的。根据相应的定理（冯德益，楼世博等1983年），利用矩阵$\underset{\sim}{R}$的合成运算可以把模糊类似关系变换成为一个模糊等价关系。

$$\underset{\sim}{Q}=\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}=[q_{ij}]_{n\times n} \qquad (3\text{-}1\text{-}2)$$

式中：$q_{ij}$是$\underset{\sim}{Q}$的元素，且定义为

$$q_{ij}\triangleq\max_{k}\min(r_{ik},\ r_{kj}) \quad 1\leqslant k\leqslant n$$

利用多次合成运算$R^{*-1}=\overbrace{\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{R}\circ\cdots\circ\underset{\sim}{R}}^{n-1}$，我们可以求得模糊等价矩阵。

3）利用"$\lambda$-水平截集方法"把原来的样品分类

选择一个适当的参数值$\lambda$，我们可以把原来的样品分成一些不同的类型。每一种类型必须包括满足如下条件的所有样品。

$$U_{R}^{*-1}(x_i,\ x_j)\geqslant\lambda, \quad 0\leqslant\lambda\leqslant1 \qquad (3\text{-}1\text{-}3)$$

式中：$U_{R}^{*-1}(x_i,\ x_j)$记为模糊等价矩阵$\underset{\sim}{R}^{*-1}$的相应元素；参数值$\lambda$必须根据实践（或经验）来确定。

2.应用

获取一个给定区域内的一些地震统计指数或者观测的预兆数据，利用上述聚类分析方法可以作出地震危害的评估。作为这种方法的例证，我们选取了一个给定区域内的地震的四种基本统计指数，即地震频率$N$、极大量级$M$和它们对于时间（在相邻的三次时间区间内）的导数$\dot{N}$、$\dot{M}$。因此，连同为了评价在下一次时间区间的地震危险，我们就有12种统计指数。为了把所有时间区间当作为样品来研究，可以根据参数值$\lambda$分类成几种类型或极大地震量级的聚类。那么，邻近时间区间作为新样品就可以被检验和被评价了。参数值$\lambda$的选择必须保证：地震发生的不同极大量级区间的时间区间应该被最大限度地分离和最小限度地混淆。

我们利用中国西部的西藏、云南、甘肃、青海、宁夏五省区在过去相邻三年内的地震数据来评价相继年内的地震极大量级。我们选择了这五个省在1953～1955年和1959～1970年时期内的15种地震样本。利用了$M\geqslant4.0$的地震指数$N$、$\dot{N}$、$M$和$\dot{M}$。为了模糊聚类分析、取参数值$\lambda=0.935$，可以得到8种类型的样本。

（1）1953年（$M=5.5$西藏；$M=5.5$，5.25，5.0，5.0云南）；1960年（$M=6.75$西藏）；1962年（$M=6.8$青海）；1963年（$M=7.0$青海）；1967年（$M=6.8$西藏），除1953年外，这种类型的最大地震的平均量级为6.9±0.2。

（2）1954年（$M=7.25$甘肃）；1964年（$M=5.8$青海）；1969年（$M=5.4$云南；$M=5.3$西藏）。1964年～1969年期间最大地震的平均量级为5.9±0.2。

（3）1961年（$M=6.0$云南）；1968年（$M=5.7$西藏），最大地震的平均量级为5.9±0.2。

（4）1955年（$M=7.5$西藏）。

（5）1959年（$M=6.0$青海）。

（6）1965年（$M=6.1$云南）。

（7）1966年（$M=6.5$云南）。

（8）1970年（$M=7.5$云南）。

显然，（1），（2），（7）类型可以表征为$M=6.9\pm0.4$的地震以大的概率发生的年份；（2），（3），（5）和（6）类型可以表征为具有极大量级$M=5.7\pm0.4$的年份；而（4）和（8）类型可以表征为具有极大量级$M\geqq7.5$的年份。

例如，我们试图作出以1973年，1974年，1976年作为三个新样本的地震危险评估。在模糊聚类分析以后，这些新样本相应地属于（8）、（1）、（2）类型。所以，在这些年内，预报的极大量级地震必然是1973年为$M=7.5$，1974年$M=6.9\pm0.4$，1976年$M=6.9+0.4$或$M=5.7+0.4$。所发生的实际最大事件是：1973年西藏的陆毫$M=7.9$；1974年云南的涌山$M=7.1$；1976年云南的龙岭$M=7.6$和西藏的松潘$M=7.2$。由此可以看出：在这几年内所评估的极大量级基本上是与实际最大事件的量级令人满意的相符合的。

## 二、模糊信息检索的应用

1982年，冯德益、古津平等，1983年楼世博、冯德益等，在地震危害评估方面，研究了以模糊集合理论为基础的信息检索分类方法。

利用模糊集合概念，我们可以把$L$时间区间分类成以$n$个描述符$d_1$，$d_2\cdots d_n$为基础的$m$种类型地震$G_1$，$G_2$，$\cdots G_m$。每种类型$G_j$可以考虑作为一个模糊集合，且用其隶属函数来表征，即$\mu_{jr}(x_i)$，$j=1, 2, \cdots, m$；$r=1, 2, \cdots, n$，$i=1, 2, \cdots, L$。

假设隶属函数$\mu_{jr}(x_i)$等价于在第$i$时间区间内以第$r$描述符为基础的第$j$种类型地震的概率$P_{jr,i}$。在第$i$时间区间内的第$j$种类型地震概率可以被确定为

$$\mu_{ij}(x_i)=M_1\cdot P_{jr,i} \tag{3-1-4}$$

式中：$M_1$是一个概率矩阵。

$$M_1=[P_{jr}]_{m\times n} \tag{3-1-5}$$

它的元素$P_{jr}$表示以第$r$描述符为基础的第$j$种类型地震的全概率。

求得所有元素的$\mu_{ij}(x_i)$，我们就可以获得样本$x_1$，$x_2,\cdots,x_L$隶属于地震类型$G_1$，$G_2$，$\cdots$，$G_m$的程度矩阵如下：

$$M_2=[\mu_{ij}(x_i)]_{L\times m} \tag{3-1-6}$$

根据给定的模糊集合$G_1$、$G_2$、$\cdots$、$G_m$，我们可以求得新的模糊集合：

$$R_{ij}=G_i\wedge G_j \quad (i\neq j,\ i,\ j=1, 2, \cdots, m)$$

它的隶属函数为：

$$\mu_{R_{ij}}(x_r)=\mu_{rj}(x_r)\wedge\mu_{ri}(x_r)$$
$$=\min[\mu_{rj}(x_r),\ \mu_{ri}(x_r)]$$
$$i=1, 2, \cdots, L;\ j=1, 2, \cdots, m$$

它的隶属函数矩阵表达为：

$$M_3=\begin{bmatrix}\mu_{R_{12}}(x_1) & \mu_{R_{13}}(x_1)\cdots\cdots\mu_{R_{m-1,m}}(x_1)\\ \vdots & \vdots \quad \cdots\cdots \quad \vdots\\ \mu_{R_{12}}(x_L) & \mu_{R_{13}}(x_L)\cdots\cdots\mu_{R_{m-1,m}}(x_L)\end{bmatrix} \tag{3-1-7}$$

利用矩阵$M_3$，我们可以确定一个阈值$\alpha$：

$$\alpha < \min[\max_i \mu_{R_{ij}}(x_r)] \qquad (3\text{-}1\text{-}8)$$

然后，根据模糊集合$G_j$，把时间区间作为样本，分类成$m$种类型地震：

$$G_j = \{x \mid \mu_j(x) \geqslant \alpha\},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m \qquad (3\text{-}1\text{-}9)$$

我们给出中国南-北地震带的北部区域内评价地震危害的两个实例。一个为短期预测，另一个为中长期预测。

第一个实例用于解释上述的方法。研究是以中国南-北地震带的银川-松潘区域的数据为依据。预测期为一个月。采用了从1966年到1980年$M \geqslant 2.6$的地震数据，利用了统计指数$N$（在每一个时间区间内的地震次数），$\dot{N} = N_{i+1} - N_i$；$M$（在每一个时间区间的极大量级）和$\dot{M} = M_{i+1} - M_i$。烈度区间被划分成五类$\underset{\sim}{G}_1$、$\underset{\sim}{G}_2$、$\underset{\sim}{G}_3$、$\underset{\sim}{G}_4$、$\underset{\sim}{G}_5$。

通过计算所得到的结果如表3-1-1所示。它表明了中国北-南地震带银川-松潘区域的预测地震和实际地震之间的比较。

检索预测地震与实际地震发生期的比较　　表 3-1-1

| 地震类型 $\underset{\sim}{G}_r$ | 检索和预测期 | 实际地震发生期 |
|---|---|---|
| $\underset{\sim}{G}_2$—地震发生 $M=4.0$ | 1976年2月，5月，11月 | 1976年2月，6月，11月 |
| $\underset{\sim}{G}_3$—地震发生 $M=5.0\sim5.7$ | 1976年9月，12月 | 1976年9月，12月 |
| $\underset{\sim}{G}_4$—地震发生 $M=6.0\sim7.0$ | 没　有 | 没　有 |
| $\underset{\sim}{G}_5$—地震发生 $M=6.8\sim7.7$ | 1976年8月 | 1976年8月 |
| $\underset{\sim}{G}_1$—地震没有发生$M<4.0$ | 1976年1月，3月，4月，6月，7月 10月，1981年1月 | 1976年1月，3月，4月，5月，7月，10月，1981年1月 |

第二个实例是研究中国北-南地震带北部区域内的中长期地震预测。预测期是10年，地震数据（$M \geqslant 5$）是从1934年到1981年。烈度区间被划分为四类：$\underset{\sim}{G}_1$、$\underset{\sim}{G}_2$、$\underset{\sim}{G}_3$、$\underset{\sim}{G}_4$，相应的量级范围分别为$M \leqslant 5.7$，$M=5.8\sim6.7$，$M=6.8\sim7.7$，$M \geqslant 7.8$。采用了四种统计指数，第一统计指数是$N_{i+1}/N_i$（$N_{i+1}$是在第$i+1$时间区间内的地震次数，$N_i$是第$i$时间区间的地震次数），其他指数为$\dot{N}$，$\overline{M}$（在给定时间区间的平均量级）和$\dot{\overline{M}} = \overline{M}_{i+1} - \overline{M}_i$。

模糊检索预测地震和实际发生地震的比较　　表 3-1-2

| 地震分类 $\underset{\sim}{G}_r$ | 检索和预测期 | 实际地震发生期 |
|---|---|---|
| $\underset{\sim}{G}_1$ = 北部区域地震 | 1936年，1943年，1954年，1956年 | 1936年，1943年，1954年 1956年 |
| $\underset{\sim}{G}_2$ = 南部区域地震 | 1960年，1967年，1973年，1981年 | 1960年，1967年，1973年，1976年 1981年 |
| $\underset{\sim}{G}_3$ = 不存在$M \geqslant 6.5$地震 | 1934，1935，1937～1942，1944～1953 1955，1957 1958，1959，1961～1966 1968～1972，1974～1980 | 1934，1935，1937～1953～1955，1957～1959，1961～1966，1968～1972，1974～1975，1977～1980 |

地震被分类成三类：$\underset{\sim}{G}_1$是在北部区域包括甘肃和宁夏所发生的地震$M\geqslant6.5$；$\underset{\sim}{G}_2$是在南部区域即云南北部所发生的地 震 $M\geqslant6.5$；$\underset{\sim}{G}_3$是在南北两个区域内不存在$M\geqslant6.5$的地震。表3-1-2列出了对于$M\geqslant6.5$的地震，模糊检索和预测地震与实际发生之间的比较结果。

从这个表可以看出：检索预测地震与实际 发 生 地 震的时间区间是十分令人满意地相吻合。

## 三、模糊相似方法的应用

1983年，冯德益等研究了一种模糊相似方法，亦即，以模糊优势比为 依 据 的 选择方法。

为了利用这种方法，必须首先给出一系列定量化的参数以及与未来时期（许多年内）相关的地震危害分析的地震统计指数。这些地震活动的定量化的统计指数可能是：地震能量释放、地震图的范围和特性、极大量级、$b$-值、重新发生时期转移特性与地震活动带的关系等。

根据地震模式研究，我们可以采取如下 8 种地震活动指数：

（1）在300～400年期间和强烈地震以前200年期间之间，地震能量释放速度的差别；

（2）在300年内强烈地震之前由$M>5$的地震中所形成的地震图区域的范围；

（3）在以100km为半径的区域内历史上的地震极大量级；

（4）在以100km为半径的区域内和在强烈地震之前的期间内所 发 生 的 地震极大量级；

（5）在强烈地震之前200年时期内，在关系$\lg N=a-bM$中的$a$-值和$b$-值。

（6）在200年内强烈地震之前，$M>5$地震重新发生率估计为具有$M>5$事件 的 平均数。

（7）在200年内$M>5$地震次数与在200～400年时期内强烈地震之前这些地震次数的比值；

（8）用一个隶属函数所表示的与地震活动带的关系。

根据在中国发生$M>7.0$的 7 次强烈地震的上述指数的 实 际 数 据，（海源$M=8.5$，1920年；谷浪$M=8.0$，1927年；邢台 $M=7.2$，1966年；北海 $M=7.4$，1969年；通海$M=7.7$，1970年；涌山$M=7.1$，1974年；唐山$M=7.8$，1976年）。我们可以得到$M>7.0$地震的标准样本的定量化指数$x_k$，如表3-1-3最后一行所示。

把已知区域的实际指数与标准样本指数加以比较，我们就能够评价在不同区域内在未来时期内的地震危险和危害。例如，我们试图评估在中国 如 下 五 个 区 域 内 在20年内的$M>7.0$地震危害：松潘1975～1994年；涌山-嵋东1973～1992年；兰州1982～2001年；扬子江口1982～2001年；郯-庐断裂带的北部1982～2001年。这些区域的相应指数如表3-1-3所示。

为了把评估样本（区域）与标准样本加以比较，根据它们之间的相似性，定义一个模糊关系矩阵$\underset{\sim}{R}$。这个矩阵的元素可表达如下：

$$r_{ew}^{(k)}=\frac{D_{std\,k}^{(k)}}{D_{ek}^{(k)}+D_{wk}^{(k)}} \qquad (3\text{-}1\text{-}10)$$

中国五个区域的定量化指标和$M>7.0$地震标准样定量化指标　　表 3-1-3

| K | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Lan Zhon | 0.33 | 5.3 | 7.0 | 6.8 | $a=2.0$ $b=0.74$ | 0.07 | 2.25 | 0.5 |
| Mouth of Yangtze | −0.09 | 5.8 | 5.5 | 5.5 | $a=2.24$ $b=1.54$ | 0.03 | 0.40 | 0.2 |
| Yong Shan | 0.57 | 6.5 | 7.5 | 7.5 | $a=1.65$ $b=0.43$ | 0.11 | 6.5 | 0.8 |
| Tancheng-lujiang | | 7.2 | 8.5 | 6.0 | $a=2.4$ $b=0.46$ | 0.025 | 0.71 | 0.8 |
| Song Pan | 0.58 | 6.4 | 7.5 | 7.5 | $a=1.2$ $b=0.31$ | 0.11 | 2.62 | 0.8 |
| $X_K$ | 0.37 | 6.7 | 7.0 | 6.9 | $a=1.41$ $b=0.38$ | 0.08 | 2.3 | 1.0 |

$$r_{me}(i)=1-r_{em}^{(i)}=\frac{D_{ek}^{(i)}}{D_{mk}^{(i)}+D_{ek}^{(i)}} \tag{3-1-11}$$

$$D_{ek}^{(i)}=|x_{ki}-x_{ei}| \tag{3-1-12}$$

这里，符号K代表标准样本，符号$e$和$m$代表任何两个评估的样本，符号$i$表示第$i$个指数，在所研究的情况下，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$和$m=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$。

从所有8个模糊关系矩阵$\underset{\sim}{R}(i)$中，我们根据元素$r_{em}(i)$的极小值可以确定评估区域的优势相似选择序。表3-1-4表明了给定五个区域的这种模糊相似选择序。

中国五个区域模糊相似选择序　　表 3-1-4

| K | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 乘　积 | 选 择 序 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 松　潘 | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 64 | 1 |
| 兰　州 | 4 | 5 | 4 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4 | 2880 | 4 |
| 扬子江口 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 | 250000 | 5 |
| 涌　山 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 64 | 1 |
| 郯庐断裂以北 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 5 | 4 | 1 | 320 | 3 |

从表3-1-4可以看出：松潘和涌山区域分别在1975～1994年和1973～1992年可能是最大危险区域，而扬子江口和兰州在1982～2001年期间可能是最小危险区域。由于在1976年和1974年分别在松潘和涌山区域已经发生$M=7.2$和$M=7.1$的强烈地震，所以，郯庐断裂北部地区在1982年～2001年时期可能是最大危险区域。

## 四、其它模糊数学方法的应用

模糊数学的一些其他方法也能够应用于地震危害评估。

1）模糊模式识别可应用于以下几个方面：

（1）地震模型的研究（Peek R., Berrill J.B.and Davis R.O.1980年）；

（2）强烈地震发生的地质条件的模糊描述（冯德益，古津平等1984年）；

（3）活化断层活化程度的模糊识别（冯德益，李明忠等，1984年）。

2）模糊多因素评价方法应用于第四纪活化断层的分类(冯德益，李明忠等1984年)。

3）模糊图论方法应用于地震聚类和地震模式识别（冯德益，楼世博等1984年）。

4）模糊接近度方法应用于研究地震源，例如，地震初始模型的检验和地震机理的确定（冯德益，李明忠，古津平，1983年）。

## §3-2 模糊数学在地震预测中的应用[38]

### 一、地震预兆的模糊识别

一般地，我们能够把预兆数据任一集合认为是由某些隶属函数来表征的一个模糊集合。地震预兆模糊识别的直接方法恰好是以各种不同预兆的隶属函数为依据的。它的有效性取决于构造这些隶属函数的技巧。

众所周知，许多预兆数据表示为随时间而变的修匀均值预兆曲线$Y=A(t)$，但就其"平直度"和"倾斜度"而论，亦即就其瞬时变化速率$\dot{Y}=\dot{A}(t)$而论，常常在"正态"和"变态"之间有重要差别。因而，为了构造相应隶属函数的表达式和具体方法，可以假定：主要地是采用预兆变化率和相关系数。例如，我们构造了一个简单的预兆隶属函数，其形式为：

$$\mu_i=\left(1+\frac{a}{|k_i|\cdot|r_i|}\right)^{-1} \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

式中：下标$i$记为在第$i$次时间区间的预兆；$k_i$是预兆曲线$Y=A(t)$的斜率或变化率的数值；$r_i$是相关系数；$a$是经验常数。

$\mu_i$的数值可以从零变化到1。$\mu_i$越大，则预兆曲线越变态。

因而，对于几种类型的预兆所构成的模糊集合，总的隶属函数可以写成为：

$$\mu=\mu_1^{n_1}\vee(\text{or}\wedge)\mu_2^{n_2}\vee(\text{or}\wedge)\cdots\vee(\text{or}\wedge)\mu_m^{n_m} \qquad (3\text{-}2\text{-}2)$$

式中：符号$\vee$和$\wedge$分别记为析取与合取，亦即

$$\mu_1\vee\mu_2=\max(\mu_1,\ \mu_2) \quad \mu_1\wedge\mu_2=\min(\mu_1,\ \mu_2)$$

$n_1$，$n_2$，$\cdots n_m$由经验确定。

虽然，在某些情况下，求得隶属函数的数学表达式是困难的。但是，根据直接经验，用模糊描述可以表示各种预兆。例如，对于一次强烈地震所具有的不同强度的磁暴感应作用是不同的。因此，我们能够把隶属函数直接定义为：

$$\mu=n\times0.4+m\times0.2 \qquad (3\text{-}2\text{-}3)$$

式中：$n$和$m$分别为在某些日子里连续出现的$k\geqslant7$和$k=6$磁暴的次数。

根据地下水的氡含量的不同数据，视在土壤电阻率、地震速度和其他预兆，我们也能够构造相应的隶属函数。在应用这些隶属函数时，能够更加明显地识别一种预兆的异常特性。能够更容易地识别一种异常的开始时间，终止时间和变换时间。冯德益、楼世博等在1984年就已给出了一些实例和具体结果。

### 二、模糊多途径地震预测

在研究地震预测时，由于我们基本上尚处于经验阶段，只能应用多种途径的方式去解

决问题。在这种情况下，模糊数学的某些方法能够取得良好的效果。

1.模糊模式识别的直接方法：

根据不同预兆的隶属函数在时间上和空间上的变化，我们能够直接地采用多途径的地震预测。必须同时利用各种经验关系和表达式。其中某些特征（例如，预兆时间、异常幅度、地震量级、震中距等等）之间的经验关系是非常重要的。为了评价这些特征的模糊程度，可以利用模糊熵的概念（冯德益、楼世博等1983年）。

2.模糊聚类分析的方法：

在取得一个给定地区的某些地震统计指数后或在一个地震站取得观测的大量预兆数据后或在不同的地震站取得观测的大量预兆数据后，我们就可以利用前述的模糊聚类分析方法去完成多途径的地震预测。为了例证这种方法，1984年，冯德益、楼世博等获得了在中国西部发生的大地震和中度地震的一些初步结果。从这些结果可以看出：利用模糊聚类分析进行的预测，一般地是与地震发生的实际情况很相符合的。

3.模糊多因素评价方法

我们把预测的地震分类成$m$种类型$u_1$，$u_2$，…，$u_m$，它可以被考察作为一个目标集合$U$。例如，我们假定：$u_1$——$M\geqslant 7.0$地震，$u_2$——$M=6\sim 7.0$地震，$u_3$——$M=5.0\sim 6.0$地震，…；或者假定：$u_1$——在$A$区域内$M\geqslant 6.5$地震，$u_2$——在$B$区域内$M\geqslant 6.5$地震，如此等等。那么，利用于地震预测的各种地震预兆可以视作为一个因素集合$V$。根据第$j$种预兆来预测第$i$种类型地震的概率或隶属度用$r_{ij}$表示，我们就能够构成一个模糊矩阵$\underset{\sim}{R}$：

$$\underset{\sim}{R}=[r_{ij}]_{m\times n} \qquad (3\text{-}2\text{-}4)$$

$\underset{\sim}{R}$被称之为模糊多因素评价矩阵。如果我们把各种预兆的权重矢量作为一个模糊集合$\underset{\sim}{A}=[W_1, W_2, \cdots, W_n]$，那么，就可以利用如下的复合运算作出多途径的地震预测：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=[b_1, b_2, \cdots, b_m] \qquad (3\text{-}2\text{-}5)$$

并且，根据$\underset{\sim}{B}$的极大元素，即

$$b_{\max}=\max[b_1, b_2, \cdots, b_m] \qquad (3\text{-}2\text{-}6)$$

我们可以求得$n$种预兆综合评价的最优化地震预测。

## 三、关于地震预测各种看法的模糊判断

当前，对大型地震预测的一些预兆手段的效率和对地震预测的各种看法的判断所进行的讨论，主要是以早于事件预测和现实发生地震之间的比较为依据的。所以，为了判断一个地震预测的具体看法是否有效，以及为了对某些区域内未来地震预测的不同看法之间的比较，寻求一些定量化的准则是必要的，从而使我们能够在各种不同看法之间作出最优化的选择。

1984年，冯德益，李明忠等利用模糊数学方法，求得了这样一种定量化的准则：从模糊集合理论的观点来看，预测的地震和实际发生的地震两者都可以表征为正态模糊集合，其隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{y}}=e^{-\left(\frac{X-\overline{y}}{b_y}\right)}, \quad \mu_{\underset{\sim}{y}_0}=e^{-\left(\frac{X-\overline{y_0}}{b_{y_0}}\right)} \qquad (3\text{-}2\text{-}7)$$

式中：符号$y=M$，$T$，$S$和$y_0=M_0$，$T_0$，$S_0$分别记为预测和实际地震的量级、发生时

间和位置；$\overline{y}$、$b_y$、$\overline{y_0}$、$b_{y_0}$分别记为它们的平均值和标准离差。

为了判断地震预测的各种看法，引入了两个准则。一个准则是模糊择近程度，它可以适用于两个模糊集合$\underset{\sim}{y}$和$\underset{\sim}{y_0}$：

$$A^* = (\underset{\sim}{y},\ \underset{\sim}{y_0}) = e^{-\left(\frac{\overline{y}-\overline{y}_0}{b_y+b_{y_0}}\right)^2} \tag{3-2-8}$$

另一个准则是地震预测的清晰程度，它可以适合于一个模糊集合$\underset{\sim}{y}$，

$$I_y^* = 1 - \frac{0.736 b_y}{a_y} \tag{3-2-9}$$

式中：$a_y$是经验常数，取决于地震量级、预测距离的范围、预测项目和其他。

在计算准则$A^*$和$I_y^*$的同时，且对其采用权重$W_A$和$W_I$，则可以求得对于元素$y$的地震预测的判断函数：

$$Q_y = [W_A,\ W_I] \circ \begin{bmatrix} A^* \\ I_y^* \end{bmatrix},\ W_A + W_I = 1 \tag{3-2-10}$$

如果我们需要判断地震时间、空间和量级的多途径预测，则可以计算多途径判断函数：

$$Q = [W_T,\ W_S,\ W_M] \circ \begin{bmatrix} Q_T \\ Q_S \\ Q_M \end{bmatrix} \tag{3-2-11}$$

式中：$W_T$，$W_S$，$W_M$是权重分配，且满足$W_T + W_S + W_M = 1$。

**关于地震预测各种看法的模糊判断的几个实例** 表 3-2-1

| 地震 | | 中国海域 | | | 墨西哥 | 美国 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 长期 | 中期 | 短期 | oaxaca | Blue Mountain |
| 预测 | $M$ | 5.5+0.5 | 5.75+0.25 | 5.75+0.25 | 7.5+0.25 | 2.75+0.25 |
| | $T$ | 1975年七月+1年 | 1975年四月+3个月 | 二月4日+1天 | | 1973年8月5日+5日 |
| | $S$ | | | | 96.5°+0.5°<br>16.5°+0.5° | |
| 实际 | $M_0$ | | 7.3+0.3 | | 7.6+0.3 | 2.6+0.3 |
| | $T_0$ | | 1975年二月4日 | | 1978年11月29日 | 1983年8月3日 |
| | $S_0$ | | 122°，48′<br>40′，39′ | | 96.5°+0.17°<br>16.07°+0.18° | |
| M的判断 | $A_M^*$ | 0.006 | 0.0004 | 0.0004 | 0.968 | 0.929 |
| | $I_M^*$ | 0.950 | 0.975 | 0.975 | 0.976 | 0.929 |
| | $Q_M^*$ | 0.478 | 0.488 | 0.488 | 0.972 | 0.929 |
| T的判断 | $A_T^*$ | 0.896 | 0.895 | 1.000 | | 0.852 |
| | $I_T^*$ | 0.926 | 0.819 | 0.926 | | 0.632 |
| | $Q_T^*$ | 0.911 | 0.857 | 0.963 | | 0.742 |
| S的判断 | $A_S^*$ | | | | 0.578 | |
| | $I_S^*$ | | | | 0.838 | |
| | $Q_S^*$ | | | | 0.708 | |
| 多途径判断 | $Q_{M\cdot T}$ | 0.695 | 0.673 | 0.726 | | 0.836 |
| | $Q_{M\cdot S}$ | | | | 0.840 | |

取用中国海城地震，墨西哥南部Oaxaca地震和美国Blue Mountain Lake 地震作为三个实例，对地震预测各种看法的模糊判断作了相应的电子计算机计算。在所有情况下，权重分配均采用等于1，即$W_I = W_A = 0.5$，$W_I + W_A = 1$。所得结果如表3-2-1所示。从这个表可以看出：对于$M$、$T$、$S$三个元素来说，这三次地震预测的各种看法的模糊判断是相当有效的。

对大型地震预测的任何预兆手段的效率或各种指数，也可以用相似的方法进行判断。

最后，建议在给出地震发生时间、区域和量级有关预测的各种看法的同时，还必须给出它们的标准离差（误差）。

## 四、地震预测后的模糊决策

为了地震预测后的各种策略选择，引入和应用了模糊决策方法。这个方法是以一个模糊决策函数$Q(x)$为基础，$Q(x)$定义为：

$$Q(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \mu_{G_j} W_j - (1-\lambda) \sum_{k=1}^{m} \mu_{B_K} W_K P_K \qquad (3\text{-}2\text{-}12)$$

式中：$\lambda$——总的来说，各种有效因素的权重；$\mu_{G_j}$——第$j$种有效因素的隶属函数；$W_j$——第$j$种有效因素的权重；$n$——各种有效因素的个数；$\mu_{B_K}$——第$K$种消极因素的隶属函数；$W_K$——第$K$种消极因素的权重；$m$——各种消极因素的个数；$P_K$——第$K$种消极因素发生的概率。

如果$R$=地震预测的准确度，则可以假设

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_K = P = 1 - R$$

模糊集合$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示各种策略的集合，为了简化起见，我们采取如下四种策略：

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{四种策略集合}$$

$x_1$ = 策略 1：各种建筑物的抗震加固 + 撤除居民；

$x_2$ = 策略 2：只对各种建筑物抗震加固；

$x_3$ = 策略 3：只撤除居民；

$x_4$ = 策略 4：不采取任何抗震措施。

隶属函数$\mu_{G_j}$和$\mu_{B_K}$可以根据地震灾害的大量观测数据来确定。决策者可以在地震预后，按给定的具有某种可能性或概率的地震烈度$I$，根据决策函数$Q(x)$作出一种最佳化策略，即：

$$Q(x_j^*) = \max_{4} Q(x) \qquad (3\text{-}2\text{-}13)$$

表3-2-2给出了在10天内撤除居民的最佳化策略，此时我们有$P = 0.8$或$R = 0.2$。从这个表可以看出：如果一个城市的居民可能在10天被撤除，那么对于烈度为XI度的地震来说，我们必须选择策略1；对于X和IX度地震来说，我们必须选择策略2；对于VIII和VII度地震选择策略3；对于VI度地震，则仅需要选择策略4。

此外，我们可以划出一系列模糊决策图，应用于各种不同情况下的最佳化策略的选择。

已得到的初步结果证明：目前，当地震预测是非确定性的和概率的时候，模糊决策方法对减少地震灾害可以具有某些参考价值。

在10天内撤除居民的最佳化策略（$P=0.8$，$R=0.2$）　　表 3-2-2

| I / $Q(x)$ | XI | X | IX | VIII | VII | VI |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q(x_1)$ | 0.444 | 0.447 | 0.463 | 0.452 | 0.460 | 0.456 |
| $Q(x_2)$ | 0.441 | 0.452 | 0.470 | 0.472 | 0.461 | 0.461 |
| $Q(x_3)$ | 0.388 | 0.428 | 0.468 | 0.485 | 0.499 | 0.494 |
| $Q(x_4)$ | 0.271 | 0.388 | 0.449 | 0.481 | 0.493 | 0.499 |
| $Q(x^*)$ | $x^*=x_1$ | $x^*=x_2$ | | $x^*=x_3$ | | $x^*=x_4$ |

最后，模糊决策方法应用于地震预测受到了实践的检验：即在1984年5月21日距离上海市大约100公里的南部黄海发生$M=6.0$地震后，紧接着对上海城市防震办法和措施，用模糊决策方法选择最佳化策略。考虑到在上海市的这次地震烈度为Ⅵ度，以及根据地震模式，这次地震的来到是一次主要震动。因此，建议选择了策略4，即没有采取任何抗震措施。实践证明：选择最佳化策略4的决策是正确的，是符合客观实际的。

## §3-3　利用统计-模糊方法评价地震预测的有效性[39]

1985年，李明忠、冯德益等继续讨论了模糊数学在地震预测各种看法的定量化评价中的应用以及在地震预测效能定量化评价中的应用。他们建议将如下公式：

$$r^* = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n_1} P_i Q_i - \sum_{j=1}^{n_2} P_j Q_j - \sum_{k=1}^{n_3} P_K Q_K \quad\right)$$

应用于确定定量化的准则。他们总结了利用模糊数学进行评价的优越性，同时指出：借助模糊数学可预测～预报地震；关于预测地震的各种看法的判断和预测地震效能方面的工作是一个不可忽视的非常重要的问题。特别强调：地震预测和地震预报是密切相关的，但是，预测和预报之间存在着重要的差别。地震预测仅是科学技术上的正确性与不正确性，对社会没有很大影响。然而，地震预报将引起人们的极大关心，并对社会产生极其明显的影响。

### 一、简单预测及其有效性的评价

根据模糊集合的定义，可以把预测地震的三个因素（地震的时间、区域和量级）如同地震后实际确定的这三个因素一样，都考虑作为正态的模糊集合：

$$\underset{\sim}{Y} = e^{-\left(\frac{X-\bar{y}}{b_y}\right)}, \quad \underset{\sim}{Y}_0 = e^{-\left(\frac{X-\bar{y}_0}{b_{y_0}}\right)} \qquad (3\text{-}3\text{-}1)$$

式中：$Y=M$、$T$、$S$相应地表示预测地震的量级、时间和区域；$\bar{y}$、$b_y$分别表示均值和标准离差；$Y_0=M_0$，$T_0$，$S_0$相应地表示实际地震的量级、时间和区域；$\bar{y}_0$、$b_{y_0}$分别表示均值和标准离差。它们的模糊接近度（Fuzzy degree of approaching）是：

$$A^* = (\underset{\sim}{Y}, \underset{\sim}{Y}_0) = e^{-\left(\frac{\bar{y}-\bar{y}_0}{b_y+b_{y_0}}\right)^2} \qquad (3\text{-}3\text{-}2)$$

在上式中，$A^*\in[0, 1]$。如果$\bar{y}_0$是清晰度（degree of clearness），则$b_{y_0}$等于零。

冯德益等还把模糊度（degree of fuzzyness）考虑作为积分。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\approx}{A}}(x)|\, dx \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

由于计算出$I=0.736b$，那么，就可引入清晰度的概念。众所周知，当一种有实效的预测完成后，就可把预测定义成为四种类型，亦即，背景预测、长期预测、中期预测和短期预测。预测结果的模糊接近度仅取决于标准离差$b$和实际离差$\Delta$。模糊接近度与预测类型无关，相反，清晰度则与预测类型有关。地震预测～预报的有效评价应该是模糊接近度和清晰度的综合结果。所以，在可靠的预测测度下，最好的预测语言是以较高精度作出预测的要素（matter）。接近度越高，则标准离差越大。与此同时，预测的模糊性也就越增加。高的清晰度又将引起标准离差减小。为了解决这种矛盾，预测人员将根据自己的经验选择一个最佳化的标准离差去满足其需要。在此基础上，考虑到清晰度与预测类型的密切关系，选择一个系数去适应其需要是非常必要的。于是，我们定义了清晰度的三个因素：

$$\left.\begin{aligned} I_M^* &= 1 - \frac{0.736b_m}{a_m}, \\ I_s^* &= 1 - \frac{0.736b_s}{a_s}, \\ I_t^* &= 1 - \frac{0.736b_t}{a_t}, \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

式中：$I_i^*\in[0, 1]$，$i=M, s, t$。当$I_i^*>1$发生时，取$I_i^*=1$，当$I_i^*<0$发生时，取$I_i^*=0$。

应该强调的是：$a_m$，$a_s$，$a_t$是我们的三个经验参数。这些参数的数值应该由地震界的广泛讨论确定下来。

为了对不同地震量级的预测，对地震预测不同类型的分析，对地震预测的不同变态范围和倍数的分析，以及对引起震害的不同范围的预测，采用了如下结果：考虑到$I_i^*$的敏感变化范围以及与类似分析作比较，建议用少数参数作为参考，而不作为现在实际利用的唯一标准。这些参数如表3-3-1中所示。

每个主要的评价结果如下：

$$Q = (W_I, W_A)\cdot\begin{pmatrix} I^* \\ A^* \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}3\text{-}5)$$

当强调接近度时，采用$W_A>W_I$，否则，$W_A<W_I$。常常可以采取相等的权重，$W_I=W_A=0.5$，则取

$$Q = 0.5I_y^* + 0.5A_y^* \qquad y=t, s, M \qquad (3\text{-}3\text{-}6)$$

类似地，考虑到三个因素——时间、空间和强度，可利用如下公式：

$$Q = (W_t, W_s, W_M)\circ\begin{bmatrix} Q_t \\ Q_s \\ Q_M \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}3\text{-}7)$$

推荐的参数$a_m$, $a_s$, $a_t$ 表 3-3-1

| 参数 | | 背景期 | 长期 | 中期 | 短期 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_m$ | | 0.75 | 0.75 | 0.6 | 0.45 |
| $a_t$ | $M=7.0$ | 45年 | 5年 | 0.75年 | 15天 |
| | $M=6\sim6.9$ | 20年 | 2.5年 | 0.5年 | 13天 |
| | $M=5\sim5.9$ | 1.75年 | 1年 | 0.25年 | 10天 |
| | $M<5$ | 1.5年 | 0.25年 | 1.5月 | 8天 |
| $a_s$ | $M=7.0$ | 150km | 108km | 75km | 75km |
| | $M=6\sim6.9$ | 125km | 85km | 58km | 58km |
| | $M=5\sim5.9$ | 100km | 63km | 40km | 40km |
| | $M<5$ | 75km | 40km | 25km | 25km |

式中：$Q$是三个因素的综合评价值；$Q_t$、$Q_s$，$Q_M$分别表示时间、空间和强度三个因素的单一评价值；$W_t$，$W_s$，$W_M$表示相应的权重分配，$W_t+W_s+W_M=1$，每一种权重分配的具体数值也是由地震界来确定的。

在相等权重条件下，可利用如下公式：

$$Q=0.33Q_t+0.33Q_s+0.33Q_M$$

为了评价预测精度的三个主要因素，模糊数学方法的利用不仅给出各种适用方法不同评价的比较，而且还反映预测语言的优越性。例如，当预测时，时间的评价是给于接近度与清晰度以相等权重，可利用如下公式：

$$Q_t=0.5e^{-\left(\frac{\Delta T}{b_t}\right)^2}+0.5\left(1-\frac{0.736}{Q_t}b_t\right)$$

在预测后，地震的类型和量级范围就被确定下来了，从而进一步确定唯一的$Q_t$；$b_t$仅是预测语言的变化值。要获得$Q_t$的极大值，可利用如下公式：$\partial Q_t/\partial b_t=0$，在缩并后，即为

$$e^{-\left(\frac{\Delta T}{b_t}\right)^2}=\frac{0.368}{Q_t\cdot\Delta T^2}b_t^3,\ 于是b_t=f(\Delta T) \quad (3\text{-}3\text{-}8)$$

在预测研究中，实际地震发生（无论是或否）时间是未知的。所以，$\Delta T$是未知的且$b_t$不能够被确定下来；在这样的情况下，地震预测人员根据各种地震情况的大量统计，可以从预测语言的各种样本中，获得其固有的均值$\Delta T$，诱导出公式（3-3-8）。由此，通过大量数值的分析，就可以获得最适当的$b_t$。按照这种方法，将有助于地震预测人员从预测语言确定出$b_t$，并且获得一个大致的方向和数值范围，从而避免了工作的盲目性。上述作法也可应用于求$b_s$和$b_m$。

## 二、根据多次获得的结果评价预测的有效性

在利用某些预兆测度和各种预测地震方法的过程中，有可能存在成功或失败的情况。失败是由于预测的错误或预测疏忽造成的。根据预测有效性特征的简单评价，建议利用如下公式：

$$r=\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n_1}Q_i-\sum_{j=1}^{n_2}Q_j-\sum_{k=1}^{n_3}Q_k\right] \quad (3\text{-}3\text{-}9)$$

此公式表示几种预测有效性的总特征。（3-3-9）式中，当$N$表示某一期间内的地震总次数时，取$N \neq 0$；$n_1$表示在某一期间内预测成功的总次数；$n_2$表示地震实际发生，但存在预测疏忽的总次数；$n_3$表示在某一期间内预测错误的总次数。以$N_0$表示在某一期间内预测的全部次数，$N_0 = n_1 + n_3$。显然，$r \leqslant 1$。根据（3-3-7）式可求得$Q_i$。原则上，$Q_j$和$Q_k$与式（3-3-7）相适应，但应受到适当的限制。$Q_j$表示预测的疏忽，因而应从每次疏忽减去0.5点，$Q_k$表示预测的错误，虽然预测已经完成，但没有地震发生，这如同考虑疏忽一样，也应从每次错误减去0.5点。在其他条件下，至少在$\Delta m$、$\Delta t$、$\Delta s$之间，必须存在一个大的数值，因而为那次预测的$A_M^*$、$A_t^*$、$A_s^*$规定为0。在计算时，采用公式$M' = \max(M, M_0)$，并根据预测的相应类型，从表3-3-1选择$Q_M$、$Q_s$和$Q_t$并计算扣除。因此，公式（3-3-9）可简化为：

$$r = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n_1} Q_i - 0.5(n_2 + n_3') - \sum_{k''=1}^{n_3''} Q_k''\right] \qquad (3\text{-}3\text{-}9a)$$

式中：$n_2$是预测疏忽的次数；$n_3'$是地震没有发生的预测次数；$n_3''$是预测错误的次数：$n_3' + n_3'' = n_3$，其他符号与公式（3-3-9）中的相同。

现在，一个重要的问题是如何区别预测的成功和失败。当对一次地震发生预测疏忽时，以及当已经作出预测，但地震没有发生时，则可以明显地证实在这些情况下的各种错误。当对一次地震的发生已经作出预测时，则采用$A_M^* \geqslant 0.5$、$A_t^* \geqslant 0.5$、$A_s^*$作为正确性的范围。否则，就是一次错误。因而，可以采用如下公式：

$$\Delta L = 0.83(r + b_s),\quad \Delta t = 0.83 b_t,\quad \Delta m = 0.83(0.3 + b_m)$$

对于一个地震预测人员来说，在确定了预测范围以后，他必须作出模糊边界线。当预测已经作出，但如果三个因素（时间、空间和强度）之一超出模糊边界线，就可以确定这是一个错误。考虑到$\Delta L$、$\Delta m$、$\Delta t$是预测的标准离差系数，因此，模糊边界线是可变动的，这就比以前的方法具有更大的灵活性。

### 三、预报有效性的比较

地震预报是一件社会的大事。在一次大地震之前的成功预报将对社会带来巨大的效益。所以，预报的准确评价就要反映地震量级的社会价值和影响。因此，我们建议采用如下的公式：

$$r^* = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n_1} P_i Q_i - \sum_{j=1}^{n_2} P_j Q_j - \sum_{K=1}^{n_3} P_K Q_K\right] \qquad (3\text{-}3\text{-}10)$$

并考虑作为多次作出预报的标准有效性。式中，$P_l \in [0.1]$，$(l = i, j, K)$是各种评价论点的系数。在正确预报的情况下，采用$M' = \min(m, m_0)$作为确定预报的类型。在预报疏忽的情况下，采用实际地震量级和确定短期预报。在错误的情况下，采用$M' = \max[M, M_0]$和确定预报类型。对于$P_l$的具体数值，根据实际条件来作出，例如：

| 量级 | $M \geqslant 7$ | | | | $7 > M < 6$ | | | | $6 > M \geqslant 5$ | | | | $5 > M$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_l$ | B | L | M | S | B | L | M | S | B | L | M | S | B | L | M | S |
| | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.08 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 |

表中：$B$——背景期，$L$——长期，$M$——中期，$S$——短期。其他参数如公式（3-3-9）所示。

显然，$P_i$仍然不是一个固定值。在不同的预测的水平和在不同的地区，由于人口密度和经济发展的差别，不同类型的预报应该有不同的数值，而如何选用这样的数值应该由科学界的专家们来确定。

就一次预报来说，公式（3-3-10）可简化为：

正确预报：$r^* = P_1 Q_1$，

错误预报：$r^* = P_3 Q_3$，

$Q_1$，$Q_3$的计算如公式（3-3-7）所示。$P_1$，$P_3$的数值可根据上述的规定来取用。

显然，当$P_i = 1$时，（3-3-9）式是（3-3-10）式的一种特殊情况。如果在某一地区内，希望把预报的疏忽减少到最低限度，则采用$P_j = 1$；为了减少预报的错误，就采用$P_k = 1$。如果不希望同时发生对所有类型地震的预报疏忽和预报错误，那么，就采用$P_j = P_k = 1$。

## 四、评价地震预测有效性和可能性的统计-模糊方法

虽然模糊评价有它的优越性，但要判断某些预测方法的绝对可能性仍然是不可能的。陈培山等在《极值统计理论在现代和长期地震预测中的应用》一文中，提出如下公式作为地震预测的一种肯定判断：

$$f = \frac{n_{11}}{n_{11}+n_0} \cdot \frac{n_{11}}{n_{11}+n_{01}} \cdot g + \frac{n_{00}}{n_{00}+n_{10}} \cdot \frac{n_{00}}{n_{00}+n_{01}} \cdot P \qquad (3\text{-}3\text{-}11)$$

$$P = \frac{n_{11}+n_{01}}{N}, \quad g = \frac{n_{00}+n_{10}}{N} = 1 - P$$

式中：$n_{11}$是地震的报告次数；$n_{00}$是没有地震的次数；$n_{10}$是错误报告次数；$n_{01}$是疏忽报告次数；$P$是地震发生的自然概率；$g$是地震没有发生的自然概率；$N$是总次数。当$f > 0.25$时，它是指具有一定测度的预测有一定的可能性；越接近于$f$，则可能性将越大。当$f \leqslant 0.25$时，它是指由一定的测度没有给出任何预兆信息，表示预测可能性为零，而且，我们没有办法去比较每一次预测的具体精度。所以，我们把上述测度与模糊评定联合起来，并扩展为一种统计-模糊方法，以发挥其各自的优越性：不仅能够判断某种预测方法的绝对可能性，而且还能够比较具体预测的精度。

统计-模糊方法的第一步：检验具有统计评价观点的预测方法（它将根据3-3-11式来进行）。为了确定一次具体地震报告的正确和错误，用模糊边界线的概念予以判断，然后，采用$f > 0.25$于预测，并作出计算。在此之前，应该排除$f = 0.25$的情况。

第二步：当$f$已经达到基本要求时，根据公式（3-3-9）和（3-3-10）计算$r$和$r^*$；

第三步：计算权重的总和

最后利用如下公式：

$$G = (f, r) \cdot \begin{pmatrix} W_f \\ W_r \end{pmatrix} \qquad W_f + W_r = 1,$$

$$G^* = (f, r^*) \cdot \begin{pmatrix} W_f \\ W_{r^*} \end{pmatrix} \qquad W_f + W_{r^*} = 1,$$

求得某个预测-预报的最终评价值。

统计-模糊方法不仅提供了一种地震预报的比较标准，而且还确定了一种预测-预报的最好类型的肯定对应的测度。例如，一种肯定预测的四种类型，具有一系列的 $f$ 、 $r$ 和 $r^*$ 的数值，且 $f$ 值满足上述要求，在这样的情况下，就能够计算出来 $G$ 背景期、$G$ 长期、$G$ 中期、$G$ 短期和 $G^*$ 背景期、$G^*$ 长期、$G^*$ 中期，$G^*$ 短期。

由此，

$$G_j = \max(G_i)$$

$i$ —背景期、长期、中期、短期。

$$G^*_{j'} = \max\ (G^*_{i'})$$

$i$ =背景期、长期、中期、短期。

那么，$j$ 是这样的预测测度的最好类型，$j'$ 是最好的预报。一般地，$j$ 和 $j'$ 不能够彼此相符合。因为，预测测度的最好类型可能不是预报的最好类型。这意味着：统计的模糊性将给预测语言提供反馈。当 $G$ 值或 $G^*$ 值不高时，在相当复杂的预测-预报过程中，统计-模糊方法为预报人员指出粗细预测的大致方向，但它要求：在排除粗略预测后， $f = 2.5$ 不应该出现。从这种预测-预报有效性的评价出发，它将加速预测-预报自身的合理性。

在权重相等的条件下，利用各种参数如下：

$\min G = 0.125$； $\min G^* = 0.125$，

$G \in [0,125, 1]$； $G^* \in [0.125, 1]$。

在实际预测过程中，在这三个主要因素之间，有可能一个或两个因素在某一测度范围内比较有效。如果确实如此，则上述方法就能够简化为单因素评价：它仅把相应的计算改变为单因素，而所有其他的优越性仍被保留。

以模糊聚类为基础的长期预测的评价 表 3-3-2

| NO | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta T$ （天） | 4 | 1 | 12 | 1 | 1 | 14 | 3 |
| $b_T$ （天） | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| $Q_T$ （天） | 91.25 | 91.25 | 91.25 | 91.25 | 91.25 | 91.25 | 91.25 |
| $\Delta S$ （公里） | 375 | 32.8 | 117 | 342 | 162 | 267 | 402 |
| $b_S$ （公里） | 90 | 90 | 90 | 106 | 90 | 90 | 106 |
| $Q_S$ （公里） | 42 | 40 | 40 | 40 | 40 | 40 | 40 |
| $\Delta M$ | 0.2 | 0.4 | 1 | 0.45 | 0.7 | 0.2 | 013 |
| $b_M$ | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 | 0.16 |
| $Q_M$ | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 |
| $A^*_S$ | 0.00 | 0.888 | 0.219 | 0 | 0.059 | 0 | 0 |
| $I^*_S$ | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $Q^*_S$ | 0.00 | 0.444 | 0.110 | 0 | 0.030 | 0 | 0 |
| $A^*_T$ | 0.527 | 0.961 | 0.003 | 0.961 | 0.961 | 0.0004 | 0.698 |
| $I^*_T$ | 0.960 | 0.960 | 0.960 | 0.960 | 0.960 | 0.960 | 0.960 |
| $Q^*_T$ | 0.744 | 0.961 | 0.482 | 0.961 | 0.961 | 0.480 | 0.829 |
| $A^*_M$ | 0.964 | 0.865 | 0.404 | 0.832 | 0.641 | 0.964 | 0.923 |
| $I^*_M$ | 0.843 | 0.843 | 0.843 | 0.843 | 0.843 | 0.843 | 0.843 |
| $Q^*_M$ | 0.904 | 0.854 | 0.624 | 0.857 | 0.742 | 0.904 | 0.883 |
| $Q$ | 0.549 | 0.753 | 0.405 | 0.606 | 0.578 | 0.461 | 0.571 |

$N = 8$， $r = 0.302$

注：已作出了1疏忽预测和 2 错误预测。

## 五、实　　例

根据所建议的各种经验参数，我们对几种实例作了计算。进行了以模糊聚类为基础的预测评价。

我们取得一些原始数据后，按照预测范围，预测的位置是按照重心法（gravity-center method）来设计的。预测中心和实际地震中心的距离是 $\Delta S \cdot b = \frac{1}{3}\sqrt{S/\pi}$，$S$是预测范围的面积。计算结果如表（3-3-2）所示。

根据同样的原则，我们对几种比较成功预测作了简单评价，其结果参看 §3-2、三。

## 六、结论和讨论

（1）预测有效性和各种预测类型是彼此相关的。当利用某种方法获得的某种预测有效性不佳时，可以适当地考虑一种粗略的预测类型。

（2）统计-模糊方法与其他的不同预测方法相比较，除其较好的精度外，还能发现每一种方法的缺陷和改进方向。寻求预测的最好类型和提供反馈信息是统计-模糊方法的重要优点。

（3）预测-预报有效性的比较还要继续进行下去。建议的经验数据和所有计算结果具有参考性，研究还有待于深化。

# §3-4　模糊BAYES规则和预报决策[40]

1985年，黄世奇针对在地震预报决策中所利用信息必定包含模糊性，且为了利用这些模糊信息，应用了模糊Bayes规则。用模糊Bayes公式可以求得在获取了模糊信息条件下的的各种自然状态的后验概率，从而得到了一般预报决策和抽象预报决策。在抽象预报决策方面已取得了非常简单结果，即根据在获取模糊信息条件下的自然状态的后验概率，可以作出决策。

## 一、模糊 Bayes 规则

预测是根据各种预兆方法的异常现象，从某些预报行动方案中选择正确的预报行动的一种类型决策，所以，它可以利用决策理论来求解。首先，必须用各种预兆方法所提供的信息对包含在预报工作中的异常进行判断。然而，异常和正常以及大异常和小异常都是模糊概念，人们难于在它们之间作出清晰的划分。但是，根据模糊Bayes规则和一般决策理论，可以利用这些模糊信息作预报决策。

在概率论中，有Bayes公式的一般型式：

$$P(S_g|X_q) = \frac{f(X_q|S_g) \cdot P(S_g)}{f(X_g)} \qquad (3\text{-}4\text{-}1)$$

$$f(X_g) = \sum_{r} f(X_q|S_p) P(S_p) \qquad (3\text{-}4\text{-}2)$$

$P(S_g)$是先验概率；$f(X_q|S_g)$是$X_q$在$S_g$已经发生条件下的条件概率；$P(S_g|X_q)$是在$X_q$已

经发生条件下的后验概率。

当Bayes规则应用于预报决策时，$S_g$是自然状态；$X_q$是从信息源$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$所获得的补充信息；$P(S_g|X_q)$是在信息$X_q$已经发生条件下的后验概率；$P(S_g)$是先验概率（它可以由历史数据获得）；$f(X_q|S_g)$是在自然状态$S_g$已经发生（它可以从历史数据获得）条件下的条件概率。

从（3-4-1）式可知，自然状态的概率$P(S_g)$在获取补充信息$X_q$的条件下转变成为$P(S_g|X_q)$.

试考察模糊信息$M_q$。它们是$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的模糊子集，且$M=(M_1, M_2, \cdots, M_m)$是一个模糊信息源，而$F_{mp}(X_q)$是$X_q$在$M_p$中的隶属度。

假设$C$是一个模糊事件，根据模糊事件概率的定义：

$$P(C)=\sum_q F_c(X_q)\cdot P(X_q) \tag{3-4-3}$$

模糊Bayes规则可以求得如下：

$$P(S_g|M_p)=\frac{f(X_q|S_g)\cdot F_{mp}(X_q)\cdot P(S_g)}{f(M_p)} \tag{3-4-4}$$

$$f(M_p)=\sum_q f(X_q)\,F_{mp}(X_q) \tag{3-4-5}$$

如果获得了两个模糊信息$M_1$和$M_2$，那么，就可以利用方程式(3-4-4)计算出后验概率$P(S_g|M_1)$。然后，把$P(S_g|M_1)$视为先验概率，我们可以在获得模糊信息$M_1$和$M_2$后，再一次用公式（3-4-4）计算出后验概率$P(S_g|M_1,M_2)$：

$$P(S_g|M_1M_2)=\frac{\sum_q f(X_q|S_g)F_{m2}(X_q)P(S_g|M_1)}{f(M_2)} \tag{3-4-6}$$

$$f(M_2)=\sum_q f(X_q)F_{m2}(X_q) \tag{3-4-7}$$

利用同样的方法，我们可以计算出在已获得模糊信息$M_1,M_2,\cdots,M_m$条件下的后验概率$P(S_g|M_1,M_2, \cdots, M_m)$。

## 二、利用模糊信息的预报决策

1.预兆信息的模糊性

预测是根据各种预兆方法的异常和通过综合分析来确定采用那一种预报行动的一种决策。所以，可以利用一般决策理论。在异常和正常之间，在大异常、中异常、小异常之间没有清晰的差别，它们都是一些模糊概念。于是，我们可以把判断异常信息的系统当作为一个模糊可测性系统。这个模糊可测性系统输出模糊信息，从而，我们利用这些模糊信息作出决策。

各种预兆方法可以视作为一个信息源，它可以作为参考集合$E$。如果用方法$X$所提供的信息集合记为$X=(x_1,x_2,\cdots, x_u)$，用方法$Y$所提供的信息集合记为$Y=(y_1,y_2, \cdots, Y_w)$，……，那么，参考集合$E$是由$E=(x_1,x_2,\cdots, x_u;\ y_1,\ y_2\cdots,\ y_w;\ \cdots\cdots)$给定的。

为简便起见，只考虑一种方法$X=(x_1, x_2, \cdots x_u)$，$X$上模糊子集记为$M_q$，$M=(M_1,M_2,\cdots,M_m)$是模糊信息源，和$X_p$对于$M_q$的隶属度记为$F_{mq}(X_p)$（它可以由经验或某些类型的模糊分布函数求得）。继而，我们讨论利用模糊信息的决策理论。

2.利用模糊信息的一般决策方法

假设$S=(S_1,S_2,\cdots,S_n)$是自然状态空间，$D=(D_1,D_2,\cdots,D_r)$是预报行动空间，

$U_{pq}=U(D_q,S_g)$是在自然状态$S_g$下采取预报行动$D_q$的增益值和损失值，$P(S_g)$是自然状态$S_g$的先验概率。在一般决策的模型中，如果$P(S_g)$和$U_{pq}$已经给出的话，根据极大增益期望值或者极小损失期望值,就可以作出决策。如果增益期望值或损失期值记为$U(D_g)$，那么

$$U(D_q)=\sum_g U(D_q|S_g)\cdot P(S_g) \qquad (3\text{-}4\text{-}8)$$

如果行动$D'$产生极大（极小）的期望增益（损失），则预报行动$D'$是最优化行动。

当应用于决策的模糊信息为$M_m$时，从方程式（3-4-4)，可以计算在获得$M_m$条件下的后验概率：

$$P(S_g|M_m)=\frac{\sum_q F_{mn}(X_q)\cdot f(X_q|S_g)\cdot P(S_g)}{\sum_q F_{mn}f(X_q)} \qquad (3\text{-}4\text{-}9)$$

在这种情况下，与行动$D_p$对应的增益期望值和损失期望值是：

$$U(D_p|M_n)=\sum_g U(D_p|S_g)\cdot P(S_g|M_n) \qquad (3\text{-}4\text{-}10)$$

并且，与极大（极小）期望增益（损失）对应的行动$D'$是最优化的行动。

当模糊信息$M_{xa},M_{ye},M_{zc}$是从不同的信息 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Y=(y_1,y_2,\cdots y_e)$和$Z=(z_1,z_2,\cdots,z_{10})$获得时，相应地利用公式（3-4-4）或（3-4-10），计算出获得模糊信息$M_X$，$M_Y$，$M_Z$的各种后验概率。获得模糊信息$M_{Xa}$的后验概率是：

$$P(S_g|M_{Xa})=\frac{\sum_q f(X_q|S_g)\ F_{mXa}(X_q)\cdot P(S_g)}{f(M_{Xa})} \qquad (3\text{-}4\text{-}11)$$

在获得$M_{Xa}$，和$M_{Ye}$条件下的后验概率是：

$$P(S_g|M_{Xa}M_{Ye})=\frac{\sum_q f(Y_q|S_g)F_{mYe}(Y_q)\cdot P(S_g|M_{Xa})}{f(M_{Ye})} \qquad (3\text{-}4\text{-}12)$$

以同样的方式，可以计算获得$n$种类型模糊信息的后验概率，记为$P_n(S_g)$。因此，在计算行动$D_p$的期望值时，必须用$P_n(S_g)$代替自然状态的概率，且对应于极大期望增益的行动是最优化的行动。

3.纯（抽象）预测的决策方法

当我们的目标仅是根据异常的形态决定是否应该作出预测，而不考虑由预测所引起的社会后果时，这种类型的决策被称为纯预报决策。在这种情况下，决策的方法可以简化。纯预测是一个推测状态问题，在这种情况下，行动集合$D$和自然状态$S$是相同的，增益函数可能是：

$$U(D_p,S_g)=\begin{cases}1 & P=g\\ 0 & P\neq g\end{cases} \qquad (3\text{-}4\text{-}13)$$

于是，可以求得采取行动$D_p$的期望增益：

$$U(D_p|M_n)=\sum_g U(D_p,S_g)\cdot P(S_g|M_n)=P(S_g|M_n) \qquad (3\text{-}4\text{-}14)$$

如果行动$D'$使得

$$U(D'|M_n)=\max_p U(D_p|M_n)=\max_p P(S_g|M_n) \qquad (3\text{-}4\text{-}15)$$

那么，$D'$是最优化预测行动，亦即，如果自然状态的后验概率是在已经获得模糊信息的条件下取极大值，则应该采取预报行动$D_p$。

就两类预测来说，仅有两种可能的自然状态，并且，行动的空间也只有两种预报行动。采取二类地震预测，例如，自然状态是$S=(S_1,S_2)$这里$S_1$是指有地震，而$S_2$是指没

有地震；行动空间是$D=(D_1,D_2)$，这里$D_1$是指有地震，$D_2$是指没有地震。从公式（3-4-15），如果

$$P(S_1|M_n)>P(S_2|M_n)$$

那么，就应该采取行动$D_1$；如果

$$P(S_1|M_n)<P(S_2|M_n)$$

那么，就应该采取行动$D_2$。

由于$P(S_1|M_n)+P(S_2|M_n)=1$，如果$P(S_1|M_n)>0.5$那么，采取预报行动$D_1$，如果$P(S_2|M_n)<0.5$，则采取预报行动$D_2$。因此，直到已经获得了足够的模糊信息和后验概率：

$$P_n(S_1)=P(S_1|M_{xp},M_{yq},\cdots,\ M_{zn})>0.5$$

才应该采取预报行动$D_1$。这里，模糊信息$M_{xp}$来自信息$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，模糊信息$M_{yq}$来自信息$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_w)$，……等等。

这种结果解决了究竟多少种类型的预报方法（其中各种异常出现）对预测地震将要发生是必需的问题。

### 三、讨　论

（1）在已经获得一种模糊信息的条件下，用模糊Bayes规则计算自然状态的后验概率，我们可以把模糊信息应用于普通决策理论。

（2）把模糊Bayes规则应用于预报决策具有综合的意义，这是因为已经把各种预兆方法当作为一种信息源的缘故；

（3）纯预报决策的结果可以用风险决策的“极大概率方法”求得。

## §3-5　关于地震烈度的随机性和模糊性的表达式[41]

1985年，王光远指出：对于具有不同特性和条件的各种问题，表达地震烈度的随机性和模糊性的型式应该是不同的。当评价一个已经发生了的地震烈度时，由于仅仅存在模糊性，那么，地震烈度可以被表达成为由多因素综合评判所得到的一个模糊矢量。要表达预测地震烈度的两种型式，就要考察这两种型式地震烈度的随机性和模糊性，并根据各种地震危险分析的条件来选择。

### 一、地震烈度的离散论域和连续论域

由于历史的原因，地震烈度的离散论域至今仍通常利用如下分级：

$$U=\{I_1,\ I_2,\ \cdots,\ I_{12}\}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 12\} \tag{3-5-1}$$

式中：$I_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$和各种数字表式地震烈度的程度。

但是，地震烈度的论域本质上应该是连续的。由于作为地震猛烈测度的烈度必须渐变，所以，地震烈度的论域可以表示成为实轴上的一个闭区间，也就是说，我们可以利用连续论域

$$V=[0,\ 12] \tag{3-5-2}$$

替代由（3-5-1）式给出的离散论域。

实际上，在离散论域$U$中的每一烈度$I_j$的程度（$j=1, 2, \cdots, 12$）恰好是连续论域$V$上的一个模糊子集，也就是在闭区间[0，12]中的模糊区间$\underset{\sim}{I}_j$。虽然，这种观点迄今没有明确地解释，但这种看法可能为专家们所接受。例如，在地震的危险分和预测中，人们常常论及到一个地区在未来若干年内发生某种烈度程度的极大地震烈度的事件的概率。事实上，这意味着承认每一种烈度程度是连续论域$V$上的一个区间，因为对于一个连续随机变量假定为一个特定的数值，其概率为零，这是众所周知的。

如果$I$代表离散论域$U$中的某种程度的烈度，$i$表示连续论域$V=[0，12]$中的烈度的数值，那么，对应于烈度程度$I$的模糊烈度$\underset{\sim}{I}$应该是$V=[0，12]$中的一个模糊子集。$\underset{\sim}{I}$的隶属函数可以表征为如图3-5-1所示。

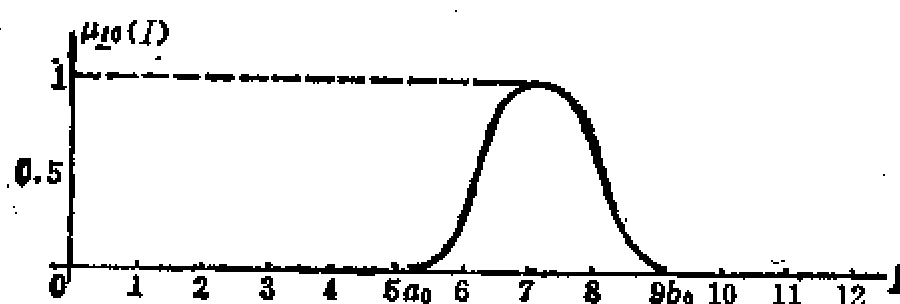



图 3-5-1　在连续论域中模糊烈度$\underset{\sim}{I}$的隶属函数

它表示$\underset{\sim}{I}$是$V=[0，12]$中的一个模糊区间，在其中点（当$i=I$时）隶属函数变成极大（等于1）。在两个邻近程度之间的边界点处，隶属函数对于两个邻近的程度都等于0.5。因此，我们假定：模糊烈度$\underset{\sim}{I}$的隶属函数有如下的近似形式：

$$\mu_{\underset{\sim}{I}}(i)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(i-I+\frac{1}{2}\right)\pi+1\right],\quad i\in[I-1,\ I+1] \tag{3-5-3}$$

它满足上面所指的两个特征。

## 二、地震烈度的评价

在评价地震烈度中，有很多因素要被考察研究，且其中许多因素具有强的模糊性。所以，为了评价，多级模糊综合评判是非常合理和有效的。

评价的各种因素可以被分成三类：

（1）具有定量形式的因素，例如，几种典型结构（普通建筑物，砖烟囱等）的震害指数；地层运动（速度，加速度等）的峰值和地震反应谱的某些参数。

（2）不具有定量形式的因素，例如，震级、震源深度、震中距、地震的持续时间等等。

（3）模糊因素，例如，人的感觉反应、地面的裂缝、断层情况、地形条件等等。

多因素评价是以单因素评价为基础的，但是，对于那些不可能有定量形式的因素构成隶属函数是不可能的。而要根据这样一些因素去评价，只可能由专家的经验直接给出或者用模糊统计数据给出。

对于那些具有定量形式的因素，可以采用如下的程序构成它们的隶属函数。对于某一个因素来说，它可以用数量$X$来描述，规定的准则是：当$X\in[a, b]$具有均值$m$时，烈度的程度为$I$。在根据这个单因素评价时，地震烈度$\underset{\sim}{I}$将是给定因素的连续论域上的一个模

糊子集，其隶属函数可以表征为如图3-5-2所示：
当$X=m$时，隶属函数变成为极大（等于1），且在两个邻近程度之间的边界点处，对于两个邻近程度，隶属函数都等于0.5。于是，可以选择如下两个函数之一：

$$（1）\quad \mu_{\underset{\sim}{I}}(X)=e^{-\left(\frac{X-m}{C}\right)^2} \qquad (3\text{-}5\text{-}4)$$

式中：$C=0.6006(b-a)$。

$$（2）\quad \mu_{\underset{\sim}{I}}(X)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\frac{X-a}{b-a}-\frac{1}{2}\right)\pi+1\right] \qquad (3\text{-}5\text{-}5)$$

$X\in[a,\ b]$，满足上面的两个特征。

对于地震烈度的二级综合评价数学模型[42]，并加以详细论述。现只简介如下：首先、把地震烈度评价因素的集合划分成四个子集。然后，在每一个因素子集的范畴内逐个地根据单因素评价，综合地评判烈度。最后，根据第一级评价所得到的结果进行二级综合评价。在二级评价中，四个因素子集如同四个因素一样处理。于是，可得到最终的评价的模糊烈度：

$$\underset{\sim}{B}=\sum_{j=1}^{12}b_j/I_j \qquad (3\text{-}5\text{-}6)$$

式中：$b_j$是烈度程度对于模糊烈度$\underset{\sim}{B}$的隶属水平。隶属水平$b_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$构成模糊烈度矢量：

$$\underset{\sim}{B}=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{12}] \qquad (3\text{-}5\text{-}7)$$

为了工程的目的，这里仅考虑五种程度的烈度$I_j$（$j=6,\ 7,\ \cdots,\ 12$）。

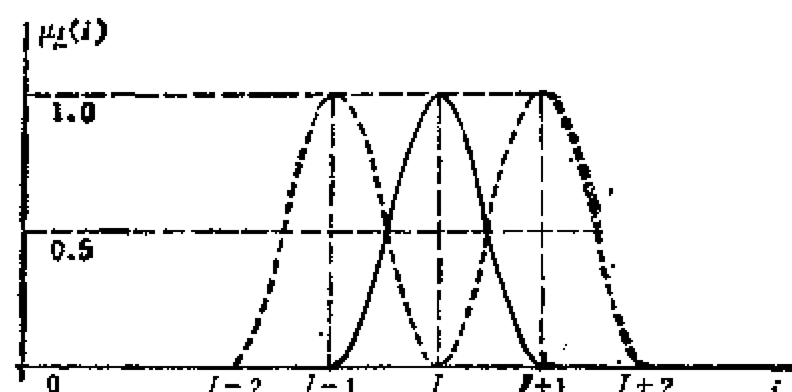


图 3-5-2 按照单因素的模糊烈度$\underset{\sim}{I}$的隶属函数

## 三、用地震危险分析预测模糊烈度

在一种抗震结构设计中，估计一个结构在整个服务年限内的地震极大烈度是一个重要的问题。对于非常重要的结构物来说，应该进行以地震危险分析为基础的结构可靠性分析。地震危险分析的目的是确定一个给定的结构物现场在服务期年限内极大烈度的概率分布函数。

所以，如果有可能完成地震危险分析，就能够分别地考虑预测烈度的随机性和模糊性。抗震结构的模糊可靠性分析的程序，假设结构在设计服务年限内的极大地震烈度的概率分布可以利用地震危险分析来获得，并且把地震烈度考虑作为连续论域$V=[0,\ 12]$上的模糊子集，其隶属函数由公式（3-5-3）给出。对于结构的模糊可靠性分析来说，可以以这种方式得到合理的结果。

## 四、不用地震危险分析的预测模糊烈度

在大多数情况下，详细地完成地震危险分析是不可能的，这是由于缺乏结构物场地的历史的和地质构造的详细资料。这时，就应该充分利用地震带图。这个图是根据地震带内地质断裂结构条件和历史地震纪录，在100年内概率地发生极大地震烈度的一类预测。但是，地震带图有相邻地带之间的明显分割边界是不合理的，因为，在边界不同面上的两个

几乎重叠的点有烈度程度差别的两个地震烈度。

在这种情况下，为了表达一个给定地区的预测烈度的随机性和模糊性，我们建议如下的方法：首先，把地震带图视为确定基本程度烈度$I_0$的基础资料，然后，可以扩展$I_0$作为连续烈度论域$V=[0, 12]$上的一个模糊子集，以求得模糊预测烈度：

$$\underset{\sim}{I_0}=\int_V \mu_{\underset{\sim}{I_0}}(i)/i \qquad (3\text{-}5\text{-}8)$$

为此目的，必须利用当地历史上的地震、地质断裂结构条件和一些微观地带因素的模糊信息来确定$\underset{\sim}{I_0}$的隶属函数。这种方法包括构成$\underset{\sim}{I_0}$的支撑集合上限$i_2$和下限$i_1$的估算：

$$\mathrm{Supp}\underset{\sim}{I_0}=[i_1,\ i_2] \qquad (3\text{-}5\text{-}9)$$

以及模糊预测烈度$\underset{\sim}{I_0}$的隶属函数形式的选择，如图（3-5-3）所示。

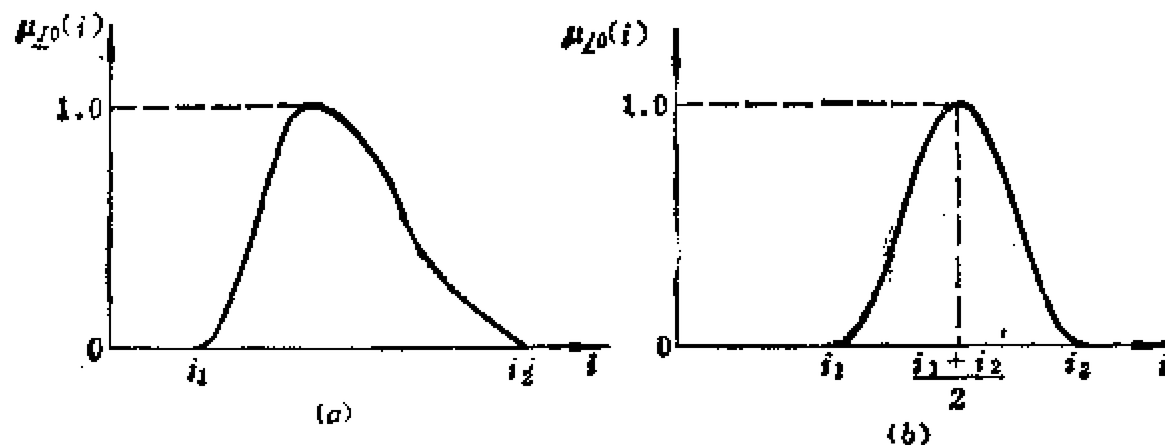



图 3-5-3 模糊预测烈度$\underset{\sim}{I_0}$的隶属函数

模糊预测烈度$\underset{\sim}{I_0}$不仅表达其模糊性，而且也表达其随机性，这是非常自然和合理的。因为，隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{I_0}}(i)$的数值表示烈度$i$对于未来地震的模糊烈度的隶属水平。

如果模糊预测烈度$\underset{\sim}{I_0}$能够表达成对于均值点$m=(i_1+i_2)/2$对称的隶属函数，如图3-5-3（$b$）所示，那么，我们可以采用如下简式：

$$\mu_{\underset{\sim}{I_0}}(i)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\frac{i-i_1}{i_2-i_1}-\frac{1}{2}\right)\pi+1\right] \qquad i\in[i_1,\ i_2] \qquad (3\text{-}5\text{-}10)$$

采用这样一种模糊预测烈度的数学模型可以进行抗震结构的模糊优化设计。

在一个系统的模糊随机地震震动的分析中，地震岩层运动应被思想化为一个模糊随机过程，并以随机扰动的能谱密度来考察厂址土壤分类的模糊性。

## 五、结　论

从地震工程的观点来看，地震烈度的模糊性和随机性的表达方法对地震岩层运动数学模型的公式化具有重要的意义。这是不同研究领域中的一个基本问题。现在提出的这些方法是以最近的研究水平为基础来建议的，应该根据地震危险分析和预测的发展来加以改善。

## §3-6 模糊地震烈度

1984年，刘锡荟，汪培庄等对近几年来强烈地震的大量调查资料作了详细分析，给出了最有工程意义的Ⅵ～Ⅺ度的模糊烈度对应的震害指数模糊集。提出了模糊集凸组合法、$\alpha$-截集和区间数运算方法以及模糊数语言概率求均值的方法，并对它们的计算结果作了比较。最后还指出了模糊烈度在地震灾害预测和城市防灾、强震历史资料整理、烈度评定等方面的应用。

### 一、模糊烈度

烈度是度量地震作用强烈程度的尺度，由于地震作用的极端复杂性，作为这个尺度的刻度规定的地震烈度表，常常是用人的感觉，器物的反应，地表现象和房屋破坏情况的描述来给出各度的刻度的。这样一个以自然语言的描述来刻划的尺度，必然包含着众多的模糊概念。为了反映和处理这种模糊性，提出了模糊烈度的概念。

我们可以把地震烈度看作是语言变量——"地震作用"$\mathscr{X}$，它的语言值的辞集$T(\mathscr{X})$可以想象为$T(\mathscr{X})\triangleq$极其强烈+非常强烈+相当强烈+…+不太强烈+……。烈度表上的度，比如Ⅺ度，Ⅹ度…Ⅵ度……等等可以看作是这些语言值的代名词，比如Ⅺ度表示"地震作用"是"极其强烈的"。我们用平均震害指数ind作为基础变量，ind在[0, 1]上取值或在0～1间离散点上取值，它的模糊集$\underset{\sim}{I}$就是$T(\mathscr{X})$中每个语言值的辞义$M$。因而，定义：

$$\mathrm{IND}\triangleq\{0,\ 0.05,\ 0.1,\ \cdots\cdots,\ 0.95,\ 1.00\} \qquad (3\text{-}6\text{-}1)$$

的模糊集$\underset{\sim}{I}$为对应于烈度表上各度的模糊烈度。这里IND的离散点加密了，这样更方便使用。

烈度表上对地震作用的强烈、相当强烈…语言描述用震害程度作了注解。例如："Ⅷ度，大多数房屋中等破坏——结构受损，需要修理"，"Ⅹ度，大多数房屋倒塌——大部倒塌，不堪修复"等等。房屋震害程度指数对房屋破坏程度作了量化，这对于地震强弱程度，地震作用后果的描述都大大进了一步。但是，由于房屋破坏程度的语言描述，诸如"轻度破坏，""中等破坏"这些词，以及各类破坏数量的语言描述，如"大多数"，"很多"这些词含义模糊，对应于各度不应该是单一的数值，而是震害指数的模糊集，亦即模糊烈度$\underset{\sim}{I}$。在对历史地震资料分析的基础上，我们将给出对应于最有工程意义的Ⅵ～Ⅺ的模糊烈度$\underset{\sim}{I}$。

### 二、强震调查资料的分析方法

为了给出$\underset{\sim}{I}$，我们对强震调查的历史资料用模糊数学进行了统计分析：一是选定若干已经评定烈度的某一地区在某次地震时房屋破坏情况的调查资料，用给定的破坏等级的震害指数来计算$\hat{\underset{\sim}{I}}$；二是对大量计算得到的$\hat{\underset{\sim}{I}}$进行综合分析，给出对应各度的$\underset{\sim}{I}$

1. $\hat{\underset{\sim}{I}}$的计算方法

设各个破坏等级如“倒塌”、“严重破坏”、“中等破坏”、“轻度破坏”等等，其量化值由震害指数的模糊集$\underset{\sim}{A}_i$，$i=1, 2, \cdots, t$来给出。每一破坏等级的房屋数量或给出为一确定的百分数$m_i$或给出为一语言值，如“许多”，“很多”…等，用[0，1]区间数的模糊集$\vec{M}_i$来表示，则显然$\underset{\sim}{\hat{I}}$的值应计算如下：

$$\underset{\sim}{\hat{I}} = \sum_{i=1}^{t} m_i \cdot \underset{\sim}{A}_i, \tag{3-6-2}$$

且

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_t = 1 \tag{3-6-3}$$

或

$$\underset{\sim}{\hat{I}} = \sum_{i=1}^{t} \vec{M}_i \cdot \underset{\sim}{A}_i \tag{3-6-4}$$

$\vec{M}_i$为正规的，其隶属度为1的元，称为它的范数$M_i$，在计算（3-6-4）式时，应使各$\vec{M}_i$满足

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_t = 1 \tag{3-6-5}$$

2.模糊数学方法

1）模糊集凸组合法

对于式（3-6-2），用$m_i$修正$\underset{\sim}{A}_i$中各元的隶属度，得$\underset{\sim}{A}_i'$。

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_i'}(\text{ind}) = m_i \mu_{\underset{\sim}{A}_i}(\text{ind}) \tag{3-6-6}$$

取这样得到的$\underset{\sim}{A}_i'$的有界和为$\underset{\sim}{\hat{I}}$。即

$$\underset{\sim}{\hat{I}} = \underset{\sim}{A}_1' \oplus \underset{\sim}{A}_2' \oplus \cdots \oplus \underset{\sim}{A}_t' \tag{3-6-7}$$

2）$\alpha$-截集和区间数运算方法

在模糊数的分析中，用模糊集的$\alpha$-截集方法，比之用模糊集的隶属函数的方法简单得多。

设有$\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，…，$\underset{\sim}{A}_t$，均是论域$X$中的模糊子集，即$\underset{\sim}{A}_i \in \mathscr{F}(X)$，$i=1, 2, \cdots, t$。$\mathscr{F}(X)$是$X$中一切模糊子集的集合。设有映射

$$f: \underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{t} \to V \tag{3-6-8}$$

则取$\underset{\sim}{Z} \in \mathscr{F}(V)$，并按扩展原理有

$$\underset{\sim}{Z} = f(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots \underset{\sim}{A}_t) = \int_{X \times X \times \cdots \times X} \mu_{\underset{\sim}{Z}}(x_1, \cdots, x_t) / f(x_1, \cdots, x_t) \tag{3-6-9}$$

$x_i$是$X$中取值的元。（3-6-9）式的另一表达式是：

$$\underset{\sim}{Z} = f(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \cdots, \underset{\sim}{A}_t) = \int_0^1 \alpha f[(\underset{\sim}{A}_1)_\alpha, (\underset{\sim}{A}_2)_\alpha, \cdots\cdots (\underset{\sim}{A}_t)_\alpha] \tag{3-6-10}$$

只有所有的$\underset{\sim}{A}_i$的支集是连续的，$\underset{\sim}{A}_i$是凸的，且定义区间数$D_i \triangleq (a_i, b_i)$，$i=1, 2, \cdots, t$。及其运算为

$$f(D_1, D_2, \cdots, D_t) \triangleq \{z = f(s_1, s_2, \cdots, s_t) | s_i \in (a_i, b_i),$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ t\}\qquad(3\text{-}6\text{-}11)$$

则(3-6-10)式就可以很方便地进行计算了。式(3-6-2)显然就是这种情况，这时，式(3-6-10)的$\underset{\sim}{z}$即为式(3-6-2)的$\hat{\underset{\sim}{I}}$，$X$应为IND。但应注意的是，在用式(3-6-10)和(3-6-11)进行计算时，应把$\underset{\sim}{A}_i$的元在离散点上的取值视为连续区间[0，1]上的取值，计算就不存在任何问题了。

3）求模糊数语言概率均值方法

设有模糊数$\underset{\sim}{A}_i$，$i=1，2，\cdots，t$，且其各自的概率为用语言描述的值，可表达为以$p_i$（$0\leqslant p_i\leqslant 1$）为基础变量的模糊集$\underset{\sim}{p}_i$。则模糊数$\underset{\sim}{A}_i$的均值为

$$\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{p}_1\underset{\sim}{A}_1+\underset{\sim}{p}_2\underset{\sim}{A}_2+\cdots+\underset{\sim}{p}_t\underset{\sim}{A}_t\qquad(3\text{-}6\text{-}12)$$

显然，应该有约束

$$p_1+p_2+\cdots+p_t=1\qquad(3\text{-}6\text{-}13)$$

假若把$\underset{\sim}{A}_i$，$\underset{\sim}{P}_i$均看成是非交互的，则当把$\underset{\sim}{P}_i$的论域表达成$Y$时，并有映射

$$f: \underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{t}\times\underbrace{Y\times Y\times\cdots\times Y}_{t}\rightarrow V\qquad(3\text{-}6\text{-}14)$$

则与式(3-6-9)相似，有

$$\underset{\sim}{Z}=f(\underset{\sim}{A}_1,\ \underset{\sim}{A}_2,\cdots,\underset{\sim}{A}_t,\ \underset{\sim}{p}_1,\ \underset{\sim}{p}_2,\ \cdots,\ p_t)$$
$$=\int_{X\times X\times\cdots\times X\times Y\times\cdots\times Y}\mu_{\underset{\sim}{Z}}(x_1,\cdots,x_t,\ p_1,\cdots,p_t)/f(x_1\cdots x_tp_1\cdots p_t)$$

(3-6-15)

并有另一种表达式为

$$\underset{\sim}{Z}=\int_0^1\alpha f[(\underset{\sim}{A}_1)_\alpha,(\underset{\sim}{A}_2)_\alpha,\cdots,(\underset{\sim}{A}_t)_\alpha,\ (\underset{\sim}{p}_1)_\alpha,\ (\underset{\sim}{p}_2)_\alpha,\ \cdots,\ (\underset{\sim}{p}_t)_\alpha]\qquad(3\text{-}6\text{-}16)$$

只要所有的$\underset{\sim}{A}_i$，$\underset{\sim}{p}_i$均是凸的，且其支集都是连续的，则结合(3-6-11)式，它的计算也是不成问题的。式(3-6-4)若不计及式(3-6-13)的约束条件，显然也可以看成是式(3-6-12)，只是以$\overrightarrow{M}_i$代$\underset{\sim}{P}_i$计算结果为$\hat{\underset{\sim}{I}}$就是了。但是还应满足(3-6-13)式的约束，怎样才能满足这一约束呢？我们取一个近似的方法。由于$\underset{\sim}{A}_i$的论域为[0,1]，则显然应该有

$$p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_ta_t\leqslant 1\qquad(3\text{-}6\text{-}17)$$

（以$a_i$表$\underset{\sim}{A}_i$的元），我们在计算$\hat{\underset{\sim}{I}}$时，取所有按式(3-6-4)，(3-6-16)，(3-6-11)计算得到的大于1的元的隶属度为0。应该指出，这只是一种近似处理，但运算是方便易行的。

## 三、计算结果及分析

我们的目的是通过震害调查资料的分析，给出对应于Ⅵ～Ⅺ度的模糊烈度$\underset{\sim}{I}$。为此，

收集了近年来多次强烈地震的震害调查资料，从中抽取82个进行分析。现将一这典型资料的例子列入表3-6-1。

**强地震震害调查典型资料** 表 3-6-1

| 编号 | 地震名称 | 震级 | 烈度 | 房屋破坏情况 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 倒塌 | 严重破坏 | 中等破坏 | 轻微损坏 | 完好 |
| 58 | 唐山 | 7.8 | Ⅸ | 75% | 23% | 2% | 0% | 0% |
| 46 | 唐山 | 7.8 | Ⅷ | 7.5% | 20% | 15% | 20% | 37.5% |
| 30 | 宁夏西吉 | 5.7 | Ⅷ⁺ | 18% | 68% | | 7% | 7% |
| 21 | 乌鲁木齐 | 6.7 | Ⅷ | 0% | 1% | 9.5% | | 89.5% |
| 15 | 阳江 | 6.4 | Ⅷ | 10.7% | 14.3% | 14.3% | 35.7% | 25% |
| 33 | 河源 | 6.1 | Ⅶ | 0.43% | 3.5% | 65.9% | | 30.17% |
| 62 | 海城 | 7.3 | Ⅹ | 大多数 | 许多 | 少数 | — | — |
| 64 | 海城 | 7.3 | Ⅸ | 许多 | 许多 | 少数 | 少数 | — |
| 5 | 和林格尔 | 6.3 | Ⅵ | — | — | 少数 | 大部 | |
| 41 | 炉霍 | 7.9 | Ⅶ | 个别 | 有些 | 普遍 | | |

注：编号46，评定地点为天津；编号64，评定地点为海城镇。

应该说明的是：

（1）抽样82次地震评定资料中烈度都是已经评定了的。Ⅵ～Ⅺ度均有，Ⅺ度只有两个。

（2）每个资料都是按建筑物的破坏情况，即各类破坏等级的房屋各占多少比例。一种给出的是确切的百分数，一种则是语言描述。

（3）建筑物没有分类[按中国地震烈度表(1980)]，但我们主要是取未设防的单层、多层砖房进行分析。有的地区建筑物抗震能力普遍偏高、偏低，则在综合分析时给予了注意。

（4）建筑物的破坏等级，一般均分成五类，即倒塌、严重破坏、破坏、轻微损坏、完好。有的分成四类，大体上相当于把轻微损坏与完好合成基本完好。对于Ⅶ～Ⅹ度，我们给出破坏程度语言值的定义如下：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{A}_1 = \text{基本完好} = 0.45/0 + 0.86/0.1 + 1/0.2 + 0.65/0.3 + 0.2/0.4 \\
&\underset{\sim}{A}_2 \text{破坏} = 0.2/0.2 + 0.7/0.3 + 1/0.4 + 0.7/0.5 + 0.2/0.6 \\
&\underset{\sim}{A}_3 = \text{严重破坏} = 0.2/0.4 + 0.7/0.5 + 1/0.6 + 0.7/0.7 \\
&\underset{\sim}{A}_4 = \text{倒塌} = 0.2/0.6 + 0.7/0.7 + 1/0.8 + 0.7/0.9 + 0.2/1
\end{aligned}
\right\}
\quad (3\text{-}6\text{-}18)
$$

但是，对于低烈度区如Ⅵ度，高烈度区如Ⅺ度，式（3-6-18）显然是不合适的。用（3-6-18）式，不管地震作用如何弱，震害指数模糊集 $\underset{\sim}{I}$ 的峰值也不会低于0.2。与此相似，地震作用再强，$\underset{\sim}{I}$ 的峰值最高也不会大于0.8。鉴于此，我们在分析Ⅵ度～Ⅺ度时，分为完好、轻

微损坏，破坏，严重破坏，倒塌，倒毁。对应的 $\underset{\sim}{A}_i$，除取 $\underset{\sim}{A}_2$，$\underset{\sim}{A}_3$ 仍如式（3-6-18）外，其它值为：

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{\sim}{A}_0=\text{完好}=1/0+0.91/0.05+0.7/0.1+0.42/0.15+0.2/0.2\\
&\underset{\sim}{A}_1=\text{轻微损坏}=0.2/0+0.7/0.1+1/0.2+0.7/0.3+0.2/0.4\\
&\underset{\sim}{A}_4=\text{倒塌}=0.2/0.6+0.7/0.7+1/0.8+0.7/0.9+0.2/1.0\\
&\underset{\sim}{A}_6=\text{倒毁}=0.1/0.8+0.42/0.85+0.7/0.9+0.91/0.95+1/1
\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}6\text{-}18')$$

（5）关于数量的语言值，资料中使用的有“个别”、“少数”、“许多”、“多数”“大多数”、“绝大多数”、“基本上”……等词。其含义如下：“个别”指5%以下，“少数”指5～15%左右，“许多”指20～60%左右，“大多数”指50%以上。有的取“个别指10%以下，少数指30%左右，多数指超过50%”。

我们综合这些说明，给出了 $\vec{M}_i$。典型的举例：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{个别}=0.9/0+1/0.05+0.5/0.1+0.2/0.15\\
&\text{许多}=0.2/0.25+0.5/0.3+1/0.35+0.5/0.4+0.2/0.45\\
&\text{大多数}=0.2/0.6+0.5/0.65+1/0.7+0.5/0.75+0.2/0.8
\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}6\text{-}19)$$

应该特别指出的是：在计算 $\hat{\underset{\sim}{I}}$ 时，应使这些量词满足式（3-6-5）的约束。大多数资料基本上满足式（3-6-5），计算时将（3-6-19）式适当调整。有的资料则相去甚远，例如，“一份邢台1966年3月8日 $M=6.8$ 级地震的调查资料，关于Ⅸ度区的描述是：“多数房屋严重破坏或倒塌，普遍有轻度和中等破坏”。这显然是不合理的，象这样的资料不得不予以剔除。

我们用模糊数学方法中的方法1计算了几个例子，又用方法2、3计算了几个例子，同时为了比较选择了几个同一资料，用不同方法计算的结果。各种计算的烈度变化基本上是呈正态的，呈偏右正态的，呈偏左正态的，只是由于计算方法不一样，其“胖”，“瘦”程度和范围有所不同（如图3-6-1）。

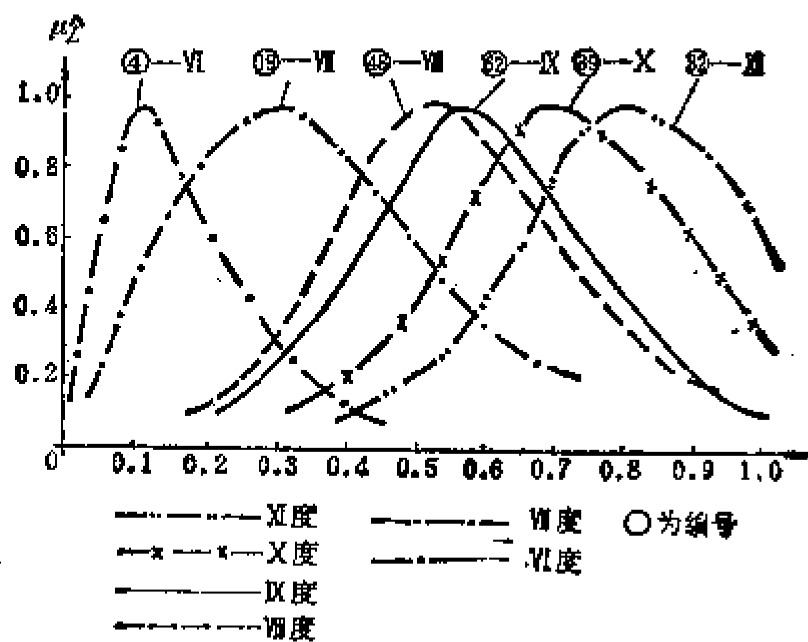



图 3-6-1 各种计算烈度的形态

对于这些结果可分析如下：

（1）用方法1计算的结果，有越来越“胖”的趋势，这是由于用式（3-6-6）和（3-6-7）计算 $\hat{\underset{\sim}{I}}$ 时，$\hat{\underset{\sim}{I}}$ 的支集必然要跨越 $\underset{\sim}{A}_1$ $\underset{\sim}{A}_2$，… $\underset{\sim}{A}_t$ 的全部支集所跨越的范围。这对于各类破坏程度都有的Ⅷ和Ⅸ度，尤为严重。

用方法2进行计算，设支集的区间为（$a_i,b_i$）$i=1,2,\cdots,t$，则 $\hat{\underset{\sim}{I}}$ 的支集的区间（$a$，$b$）为

设 $$(b-a)=\sum_{i=1}^{t}(b_i-a_i)\cdot m_i \quad (3\text{-}6\text{-}20)$$

$(b_s-a_s)=\max(b_i-a_i)$则必有

$$(b-a)\leqslant(b_s-a_s) \quad (3\text{-}6\text{-}21)$$

这只要看（3-6-3）式，就是十分清楚的了。

用方法3计算的结果，稍"胖"于方法2计算的结果，这是因为这时的量词是语言词，显然较之给出确定百分比的那些要模糊一些。这完全反映了事实情况，也是合理的。由于采用了$\alpha$-截集方法，它也不至于过"胖"，这与方法2的情况是一样的。但是，由于没有严格满足(3-6-13)式的约束，而是作了近似处理，因而，也不会严格满足（3-6-21）式，而只能说不会比（$b_s$-$a_s$）"胖"得多，最多不过比（$b_s$-$a_s$）要大些而已。

这里提出的方法2，方法3有普遍意义，它对于模糊信息加工，模糊数处理非常有用。

（2）只要$\underset{\sim}{A}_i$，$\vec{M}_i$，$i=1,2,\cdots,t$均是凸的，方法2、方法3计算的$\hat{\underset{\sim}{I}}$也都是凸的，而用方法1的计算结果则不能保证这一类。这里不予详细证明，只是指出一个凸模糊集$\underset{\sim}{A}\in\mathscr{F}(X)$具有性质

$$\underset{\sim}{A}\text{是凸的}\Longleftrightarrow\begin{cases}\forall x_1x_2\in X,\ \forall\lambda\in[0,1]\\ \mu_{\underset{\sim}{A}}[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_2)\end{cases} \quad (3\text{-}6\text{-}22)$$

和计算结果的直观的结论而已。

显然，$\hat{\underset{\sim}{I}}$是凸的就有利于数据处理。正由于（1）、（2）两方面的因素，我们在以下分析中，只用了方法2和方法3的计算结果。全部计算结果用离散的震害指数模糊集表示。

## 四、模糊地震烈度的建议

1. $\hat{\underset{\sim}{I}}$的峰值分布

$\hat{\underset{\sim}{I}}$的峰值范围和均值表　　表3-6-2

| 烈度 | $\hat{\underset{\sim}{I}}$的峰值 | |
|---|---|---|
| | 范围 | 均值 |
| Ⅵ | 0.025～0.25 | 0.1 |
| Ⅶ | 0.2～0.35 | 0.26 |
| Ⅷ | 0.25～0.6 | 0.42 |
| Ⅸ | 0.45～0.75 | 0.61 |
| Ⅹ | 0.65～0.75 | 0.71 |
| Ⅺ | 0.9 | 0.9 |

可以看出：Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ度都有高于《中国地震烈度表（1980）》关于烈度表建议方案的平均震害指数的值。这一点，从该表所依据的统计资料就可以看得出来。当然，只要把$\underset{\sim}{A}_i$一改变，计算的$\hat{\underset{\sim}{I}}$都随之而改变。但是，关于和破坏程度等级对应的震害指数，已

经有个习惯用法，约定俗成，似不宜大改。这样，还是以给出合理的$\underset{\sim}{I}$为主，否则今后评定的烈度与过去评定的烈度，相去甚远，则这些资料难以综合分析。

2. $\underset{\sim}{\hat{I}}$的形态

除Ⅷ度大多为正态的外，有许多结果均是偏态的，高烈度偏于高的震害指数一边，低烈度偏于低的震害指数一边。其原因是数据结构，也就是说房屋破坏各个等级所占比例不同形成的结果。为了方便计算，我们只取了四类破坏等级，而在给出$\underset{\sim}{A}_i$时，对于基本完好和倒塌给出了偏态，就是考虑了这两个等级各自包含了完好、倒毁这个等级的原因。看来这样处理是正确的。

3. 可能分布的宽度

类似于统计学中数据的均方差表征离散程度一样，隶属函数也给以一个值$b$，它是以正态函数

$$y = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \qquad b>0 \qquad (3\text{-}6\text{-}23)$$

来拟合隶属函数时的一个参数，制约着它的"胖"、"瘦"程度。对于方法2的计算结果，它最大不过是$\underset{\sim}{A}_i$中的最大值；对于方法3的计算结果，则应从计算得到的数据来统计，全部计算结果的$b$，大约可以说在0.125～0.24范围之内。

从这些分析看，我们可以这样来提出$\underset{\sim}{I}$的建议：对于Ⅵ～Ⅺ度，均取正态的，$b$取同一个值。这就使各度的$\underset{\sim}{\hat{I}}$形式简洁，易于使用。实际数据有许多偏态的，取成正态的合适吗？我们这样处理：对于偏态的，把峰值向偏态一边稍加移动，如Ⅷ度均值为0.26，我们在给$\underset{\sim}{I}$时移至0.25；Ⅹ度均值为0.71，移到了0.75。这样，对于用距离或贴近度等按择近原则来评定烈度时，影响就会减小。

于是，我们建议的模糊烈度$\underset{\sim}{I}$如表3-6-3所示。

**建议的模糊烈度表** 表3-6-3

| 烈度 | in α | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0.05 | 0.1 | 0.15 | 0.2 | 0.25 | 0.3 | 0.35 | 0.4 | 0.45 | 0.5 | 0.55 | 0.6 | 0.65 | 0.7 | 0.75 | 0.8 | 0.85 | 0.9 | 0.95 | 1.0 |
| | $\mu_{\underset{\sim}{I}}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Ⅵ | 0.55 | 0.86 | 1 | 0.86 | 0.55 | 0.26 | 0.09 | | | | | | | | | | | | | | |
| Ⅶ | | 0.09 | 0.26 | 0.55 | 0.86 | 1 | 0.86 | 0.55 | 0.26 | 0.09 | | | | | | | | | | | |
| Ⅷ | | | | | 0.09 | 0.26 | 0.55 | 0.86 | 1 | 0.86 | 0.55 | 0.26 | 0.09 | | | | | | | | |
| Ⅸ | | | | | | | | | 0.09 | 0.26 | 0.55 | 0.86 | 1 | 0.86 | 0.55 | 0.26 | 0.09 | | | | |
| Ⅹ | | | | | | | | | | | | 0.09 | 0.26 | 0.55 | 0.86 | 1 | 0.86 | 0.55 | 0.26 | 0.09 | |
| Ⅺ | | | | | | | | | | | | | | | 0.09 | 0.26 | 0.55 | 0.86 | 1 | 0.86 | 0.55 |

乍看起来，没有再计算$\underset{\sim}{\hat{I}}$的统计平均就给出了$\underset{\sim}{I}$，这是否合适？应该讲$\underset{\sim}{I}$是全部样本$\underset{\sim}{\hat{I}}$的统计平均，应该按照（3-6-2）式那样再计算它们的均值。由于给出了（3-6-21）式，分析了用（3-6-2）式计算的"胖"、"瘦"程度，已经得出了用$\alpha$-截集和区间数运算结果，介于参与运算的全部模糊集的最"胖"与最"瘦"之间的结论。于是，只要对$\underset{\sim}{\hat{I}}$的峰值

分布有了了解，对$\hat{\underset{\sim}{I}}$的形态和"胖"，"瘦"程度有了了解，就可以直接给出合理的$\underset{\sim}{I}$来。这就是前面所说的综合分析的意思。

### 五、结　论

（1）模糊烈度是烈度概念的深化。地震工程领域中有许多问题包含着大量的模糊性。用模糊数学来处理这些问题有可能开创一个新的局面。烈度是个最基本的也是最重要的概念，用模糊数学处理烈度概念，提出模糊地震烈度的建议，也许是开创这个新局面的起点之一。在这个起点上，我国许多学者已经做了不少有意义的工作。

（2）模糊烈度在烈度评定上，可以运用提出的方法2、3之一，对于应评地点计算$\hat{\underset{\sim}{I}}$，再求它与表3-6-3给出的各度$\underset{\sim}{I}$的距离或贴近度，择近划归某烈度。

这对于历史地震资料的分析，更是提供了一个合理而又可行的办法。历史地震资料的描述简略、含糊，且过去建筑又与近代不同，其模糊性是显而易见的。只要按历史资料关于建筑物的描述，结合过去和近年的震害经验，给出$\underset{\sim}{A}_i$，就可以计算$\hat{\underset{\sim}{I}}$了。

（3）震害预测是人们为减轻地震灾害进行的一项重要工作。它的目的是：在地震危险性分析的基础上，预测一个地区在某时期内发生地震的震害情况，以预先作出对策，减轻灾害。而地震危险分析又常常以地面运动的某些参数来给出。如果我们能够建立这些参数与烈度的关系，那么，我们就有可能建立如

$$\text{IF}\ \underset{\sim}{A}_1\ \text{AND}\ \underset{\sim}{B}_1\ \text{AND}\cdots\cdots\text{THEN}\ \underset{\sim}{Z}_1,$$

$$\text{ELSE IF}\ \underset{\sim}{A}_2\ \text{AND}\ \underset{\sim}{B}_2\cdots\cdots\text{THEN}\ \underset{\sim}{Z}_2\ \text{ELSE}\cdots\cdots \quad (3\text{-}6\text{-}24)$$

这样的模型。$\underset{\sim}{A}_1,\underset{\sim}{B}_1$……等是地面运动参数的信息，$\underset{\sim}{Z}_1$…是对建筑物破坏的估计。由于震害预测中包含着极多的模糊性，这样一条途径更合理。

（4）提出的计算$\underset{\sim}{I}$的方法，对于用模糊数来表征的一类信息进行统计分析有普遍的意义。特别是当其概率（或数量词）为语言值时，求期望值模糊集有很好的实用性。

## §3-7　地震烈度模糊评定的广义方法[44]

1985年，冯德益、李明忠等利用模糊集合理论，提出了一种定量化评定地震烈度的广义方法（a generalized method）。着重研究了以各种建筑物震害数据条件为基础的、从Ⅵ度到Ⅸ度烈度的模糊评定。根据从我国关于地震烈度的26份报告中所收集的大约2300个建筑物震害数据，对于各种不同建筑物的震害条件，各种不同情况下的不同地震烈度，构造了各种分布曲线及其近似解析函数。应用模糊模式识别方法和模糊接近度方法研究了单点模糊评定（single point evaluation）和群模糊评定（group evaluation）。

### 一、各种建筑物损坏样本的经验分布及其解析近似法

我们应用了从我国关于地震烈度的26份报告中收集的大约2300个建筑物损坏数据。根

各种经验分布曲线的近似解析函数中的各种系数　　表 3-7-1

| $i$ | $j$ | $k$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ⅵ | Ⅰ | $A$ | 0 | -288.3 | 29.03 | 0.08 |
| Ⅵ | Ⅰ | $C$ | 4.08 | -6.0 | 2.2 | 0.07 |
| Ⅵ | Ⅰ | $D$ | 1.3 | -1.08 | 0.29 | 0.18 |
| Ⅵ | Ⅱ | $B$ | 32.99 | -13.99 | -0.24 | 0.55 |
| Ⅵ | Ⅲ | $E$ | -0.63 | 0.63 | 0.4 | 0.00 |
| Ⅶ | Ⅰ | $A$ | -14.48 | 19.16 | -7.41 | 0.9 |
| Ⅶ | Ⅰ | $B$ | -0.59 | 0.99 | -0.61 | 0.21 |
| Ⅶ | Ⅰ | $C$ | 0.12 | 0.19 | -0.18 | 0.1 |
| Ⅶ | Ⅱ | $B$ | -2.83 | 5.12 | -2.98 | 0.55 |
| Ⅶ | Ⅱ | $D$ | 7.35 | -8.79 | 2.38 | 0.1 |
| Ⅶ | Ⅱ | $E$ | 0.77 | -1.79 | 1.02 | 0.00 |
| Ⅶ | Ⅲ | $B$ | 0.00 | 10.09 | -6.9 | 0.9 |
| Ⅶ | Ⅲ | $C$ | -1.29 | 0.69 | -0.14 | 0.3 |
| Ⅶ | Ⅲ | $D$ | 4.57 | -5.58 | 1.4 | 0.2 |
| Ⅶ | Ⅲ | $E$ | -1.3 | 1.88 | -0.16 | 0.08 |
| Ⅷ | Ⅰ | $A$ | -0.8 | 0.38 | -0.012 | 0.04 |
| Ⅷ | Ⅰ | $B$ | -1.12 | 0.45 | 0.97 | 0.1 |
| Ⅷ | Ⅰ | $C$ | 5.5 | -2.56 | 0.58 | 0.26 |
| Ⅷ | Ⅱ | $A$ | 3.62 | -5.42 | 1.77 | 0.2 |
| Ⅷ | Ⅱ | $B$ | -1.67 | 1.91 | -0.18 | 0.08 |
| Ⅷ | Ⅱ | $C$ | -1.75 | 1.60 | -0.13 | 0.28 |
| Ⅷ | Ⅱ | $D$ | $-1.3\times10^{-5}$ | -3.33 | -0.67 | 0.8 |
| Ⅷ | Ⅲ | $A$ | 0 | 12 | 5 | 0.5 |
| Ⅷ | Ⅲ | $B$ | -5.41 | 4.43 | -2.01 | 0.5 |
| Ⅷ | Ⅲ | $C$ | -2.02 | 4.55 | -3.35 | 0.8 |
| Ⅷ | Ⅲ | $D$ | -2.65 | 0.48 | 0.65 | 0.1 |
| Ⅷ | Ⅲ | $E$ | -32.38 | 17.05 | -6.23 | 0 |
| Ⅸ | Ⅰ | $A$ | -1.07 | 1.92 | -0.56 | 0 |
| Ⅸ | Ⅰ | $C$ | 0 | 7.73 | -3.97 | 0.5 |
| Ⅸ | Ⅱ | $A$ | 0 | 0.44 | 0.0067 | 0 |
| Ⅸ | Ⅱ | $B$ | 1.41 | -2.06 | 0.68 | 0.16 |
| Ⅸ | Ⅱ | $C$ | 0 | 15 | -7 | 0.8 |
| Ⅸ | Ⅲ | $A$ | 0 | 7.83 | -3.88 | 0.46 |
| Ⅸ | Ⅲ | $B$ | -1.63 | 1.86 | -0.91 | 0.37 |
| Ⅸ | Ⅲ | $C$ | -1.52 | -1.12 | 0.92 | 0.18 |
| Ⅸ | Ⅲ | $D$ | -6.67 | 4.67 | -0.55 | 0.18 |
| Ⅸ | Ⅲ | $E$ | -16.33 | 12.8 | -4.04 | 0.55 |
| Ⅹ | Ⅱ | $A$ | 1.43 | -1.22 | 0.35 | 0 |
| Ⅹ | Ⅱ | $B$ | -0.61 | -1.09 | 0.51 | 0.25 |
| Ⅹ | Ⅱ | $C$ | 0 | -1.00 | -2.3 | 0.5 |
| Ⅹ | Ⅲ | $A$ | 0.43 | -0.64 | 0.063 | 0.2 |
| Ⅹ | Ⅲ | $B$ | -0.83 | -0.92 | 1.08 | 0.05 |
| Ⅹ | Ⅲ | $C$ | 14.14 | -14.31 | 3.16 | 0.2 |

续表

| $i$ | $j$ | $k$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ⅹ | Ⅲ | $D$ | 3.05 | −2.29 | −0.88 | 0.45 |
| Ⅺ | Ⅱ | $E$ | 0 | 0 | 0 | 0.25 |
| Ⅺ | Ⅲ | $A$ | 0.28 | −0.29 | 0.4 | 0 |
| Ⅺ | Ⅲ | $B$ | −2.33 | −7.62 | 3.6 | 0 |
| Ⅺ | Ⅲ | $C$ | 0 | 12.06 | −5.39 | 0.5 |

据这些数据，针对各种不同类型建筑物的不同损坏条件、各种不同的烈度，已构成了各种建筑物损坏样本的经验分布曲线。用电子计算机获得了它们的近似解析函数。所求得的经验曲线和解析曲线如图（3-7-1）～（3-7-6）所示。图中纵坐标为相关频率$\mu_{ijk}=N_{ijk}/N_{0ijk}$，$N_{ijk}$是各种样本数，其下标：$i$为烈度，$j$为各种建筑物类型，$k$为各种类型损坏条件分布于各种建筑物$X$的百分率，它用横坐标标记；$N_{0ijk}$是它们的总数，从模糊集合理论的观点来看，比率$\mu_{ijk}$可以视作为隶属度，它表示具有$k$类型损坏条件的$j$类型建筑物对于$i$度烈度的隶属程度。所利用的各种符号是：$i$＝Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ，Ⅸ，Ⅹ，Ⅺ；$j$＝Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ；$k=A$（严重破坏），$B$（破坏），$C$（损坏），$D$（轻微损坏），$E$（没有损坏）。

除了一个点和两个点分布的33种情况外，经验分布曲线的近似解析函数如下：

图3-7-1：
$$\mu=ax^3+bx^2+cx+d \tag{3-7-1}$$

对于48种情况，各种相应的系数$a$、$b$、$c$、$d$如表3-7-1所示。

图3-7-2：
$$\mu=\lambda e^{-\lambda x} \tag{3-7-2}$$

对于4种情况，即：$i$＝Ⅵ，$j$＝Ⅱ，$k=c$，$\lambda=0.5$；$i$＝Ⅵ，$j$＝Ⅲ，$k=c$，$\lambda=0.9$；$i$＝Ⅶ，$j$＝Ⅱ，$k=A$，$\lambda=1.2$；$i=X$，$j$＝Ⅲ，$k=E$，$\lambda=1.0$。

图3-7-3
$$\mu=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{a\sigma^2}} \tag{3-7-3}$$

对于2种情况：即$i$＝Ⅵ，$j$＝Ⅰ，$k=B$，$\sigma=0.35$，$a=0.15$；$i$＝Ⅶ，$j$＝Ⅰ，$k=D$，$\sigma=0.15$，$a=0.25$。

图3-7-4：
$$\mu=(390x^2-104x+10)^{-1}+0.02 \tag{3-7-4}$$

对于$i$＝Ⅶ，$j$＝Ⅱ，$k=c$。

图3-7-5：
$$\mu=x^{18} \tag{3-7-5}$$

对于$i=X$，$j=I$，$k=A$。

图3-7-6：
$$\mu=-0.062\ln x+0.0007x^{-2}+0.05x \tag{3-7-6}$$

对于$i$＝Ⅸ，$j$＝Ⅰ，$k=B$。

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma x}e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{a\sigma^2}} \tag{3-7-7}$$

对于$i$＝Ⅵ，$j$＝Ⅱ，$k=D$

显然，图3-7-1～3-7-6中的各种曲线和相应的近似表达式可以应用于地震烈度和地震震害预测的定量化评价。

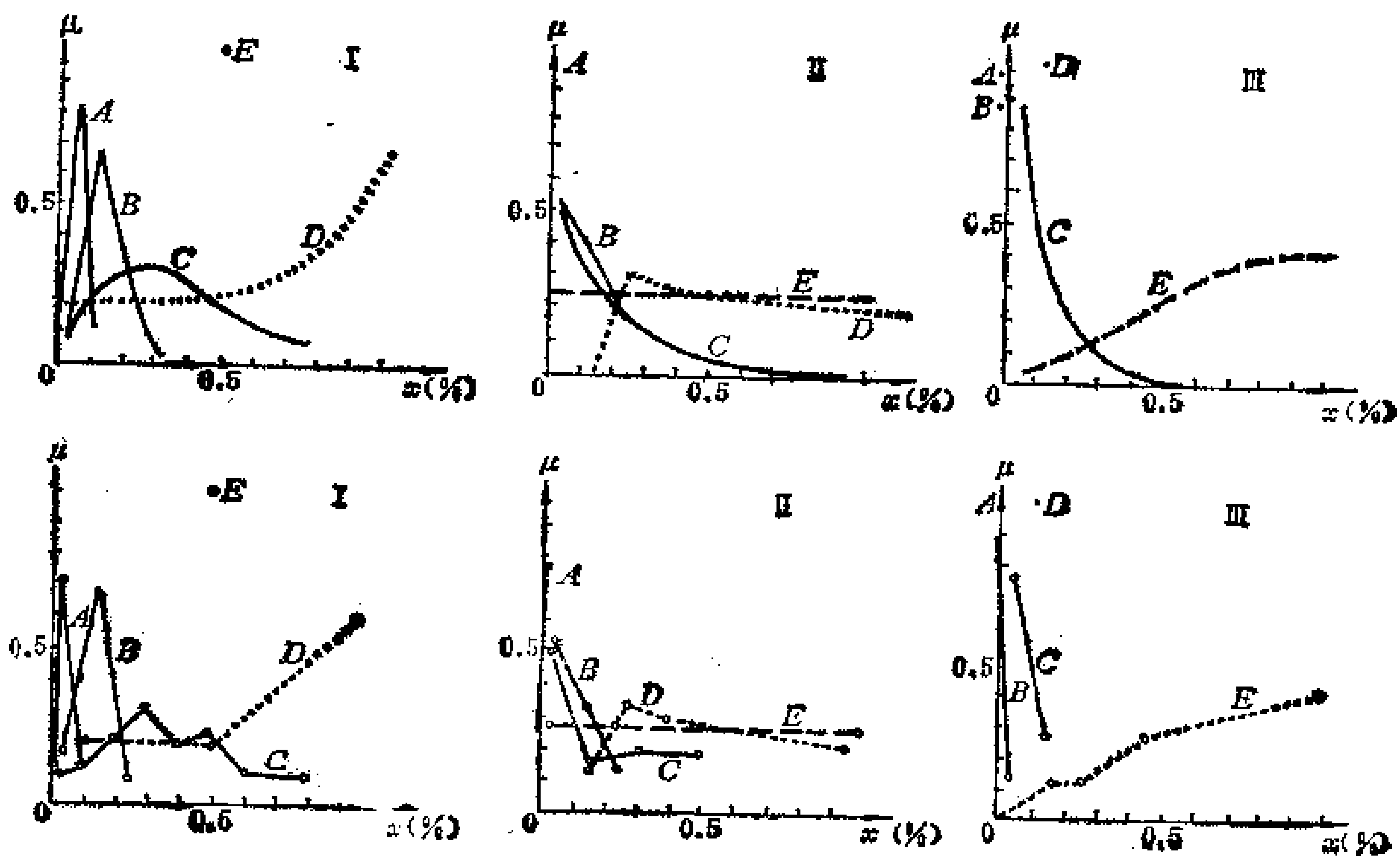



图 3-7-1 烈度Ⅵ度的经验和近似分布曲线

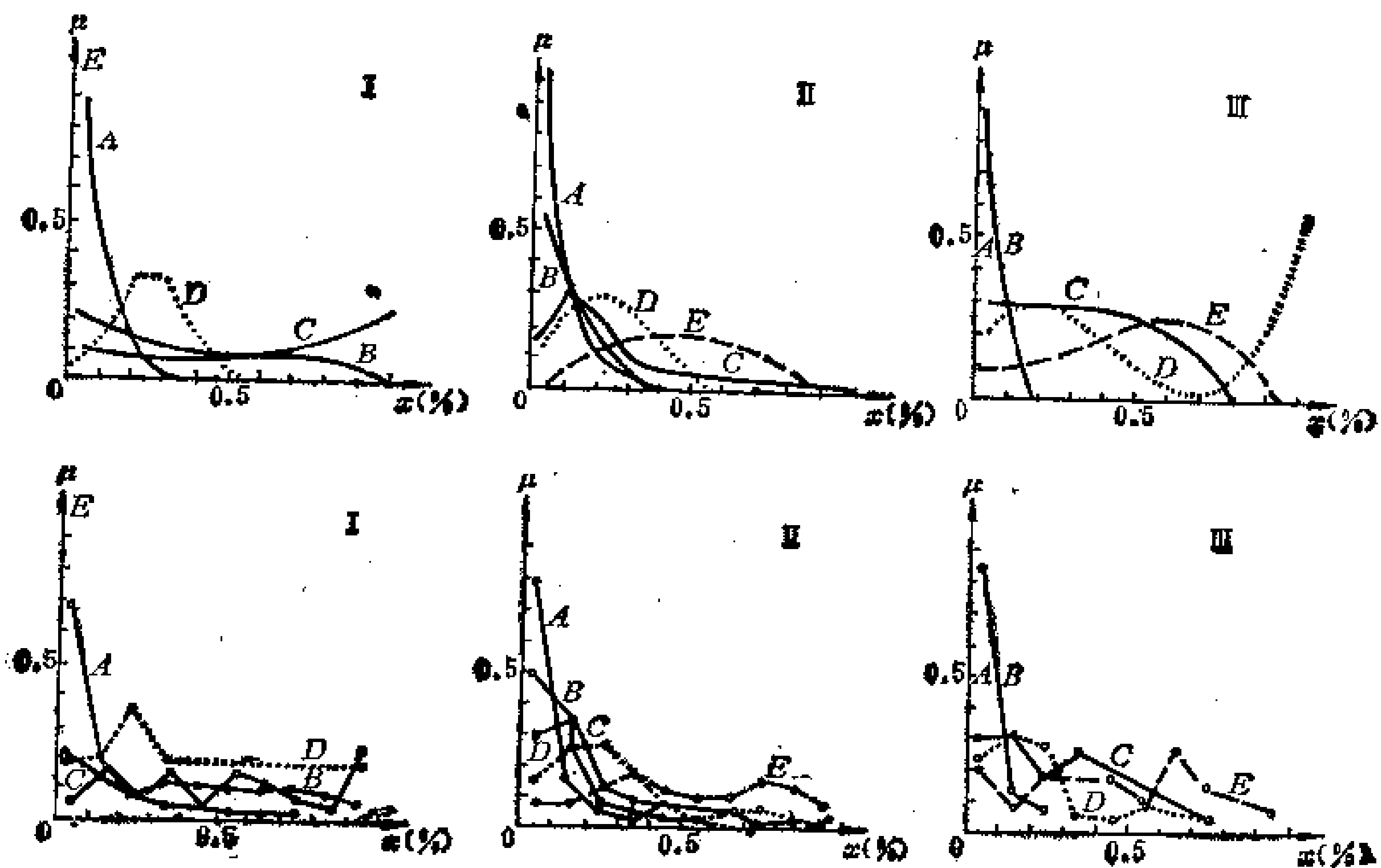



图 3-7-2 烈度Ⅶ度的经验和近似分布曲线

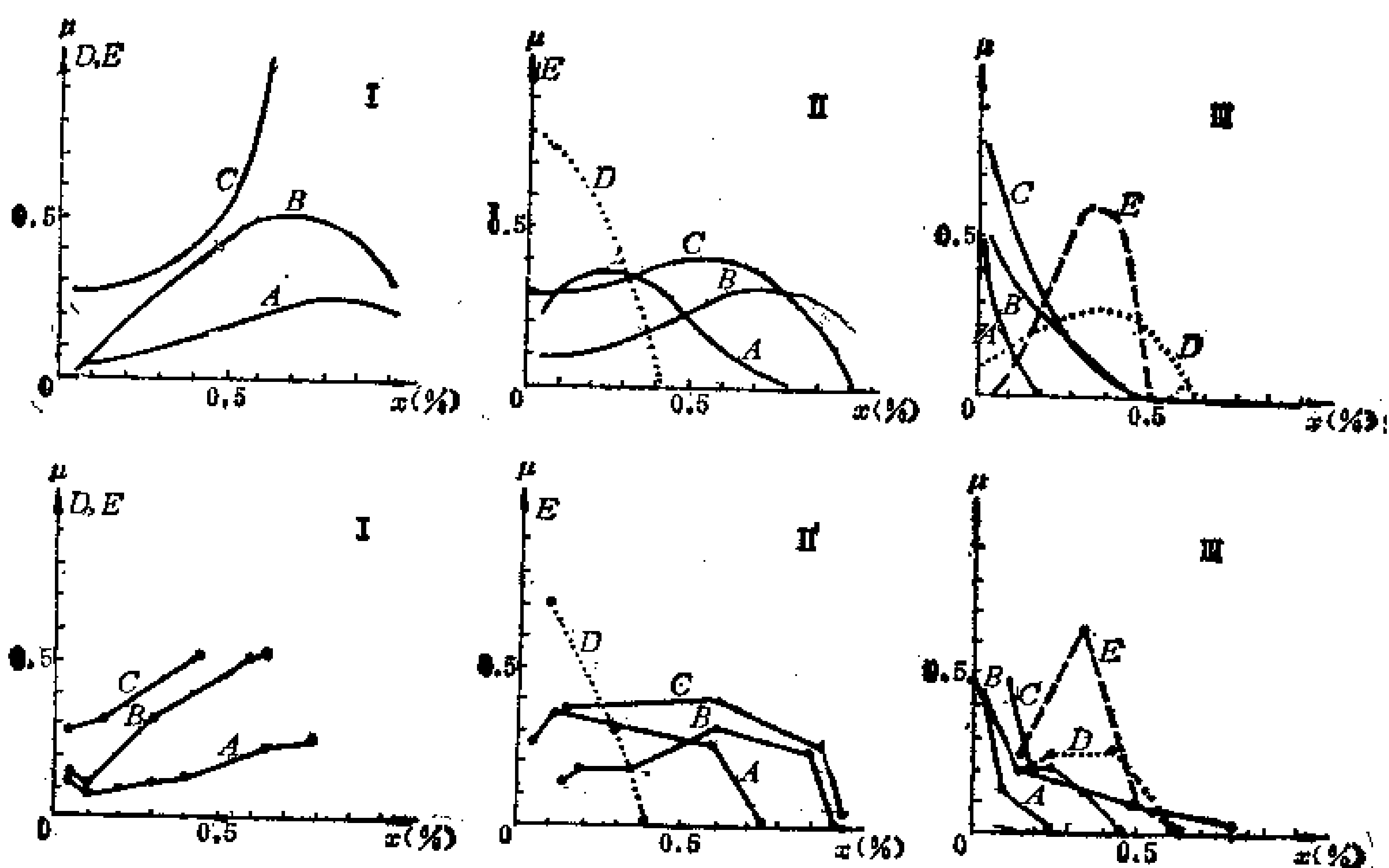



图 3-7-3 烈度Ⅷ度的经验和近似分布曲线

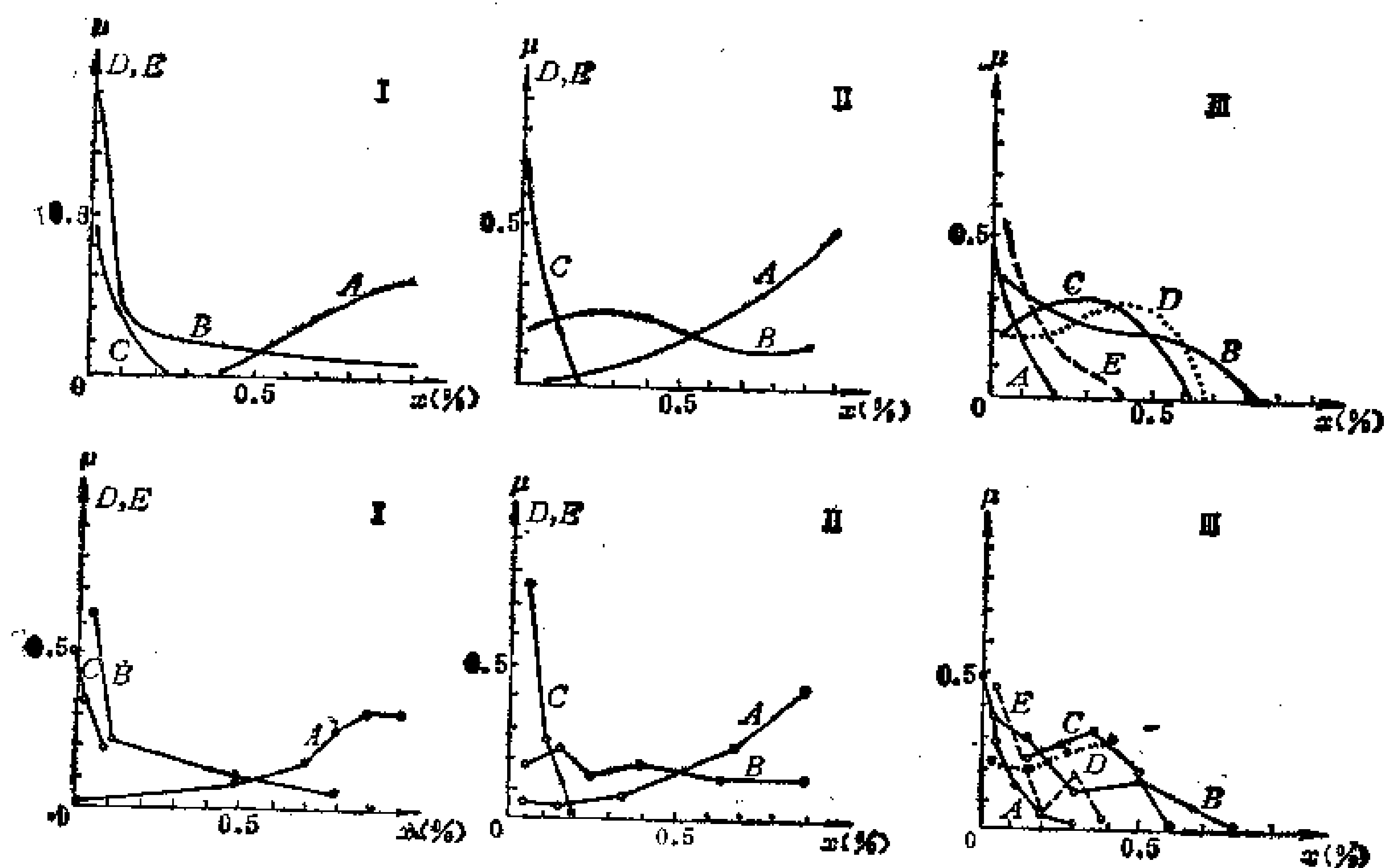



图 3-7-4 烈度Ⅸ度的经验和近似分布曲线

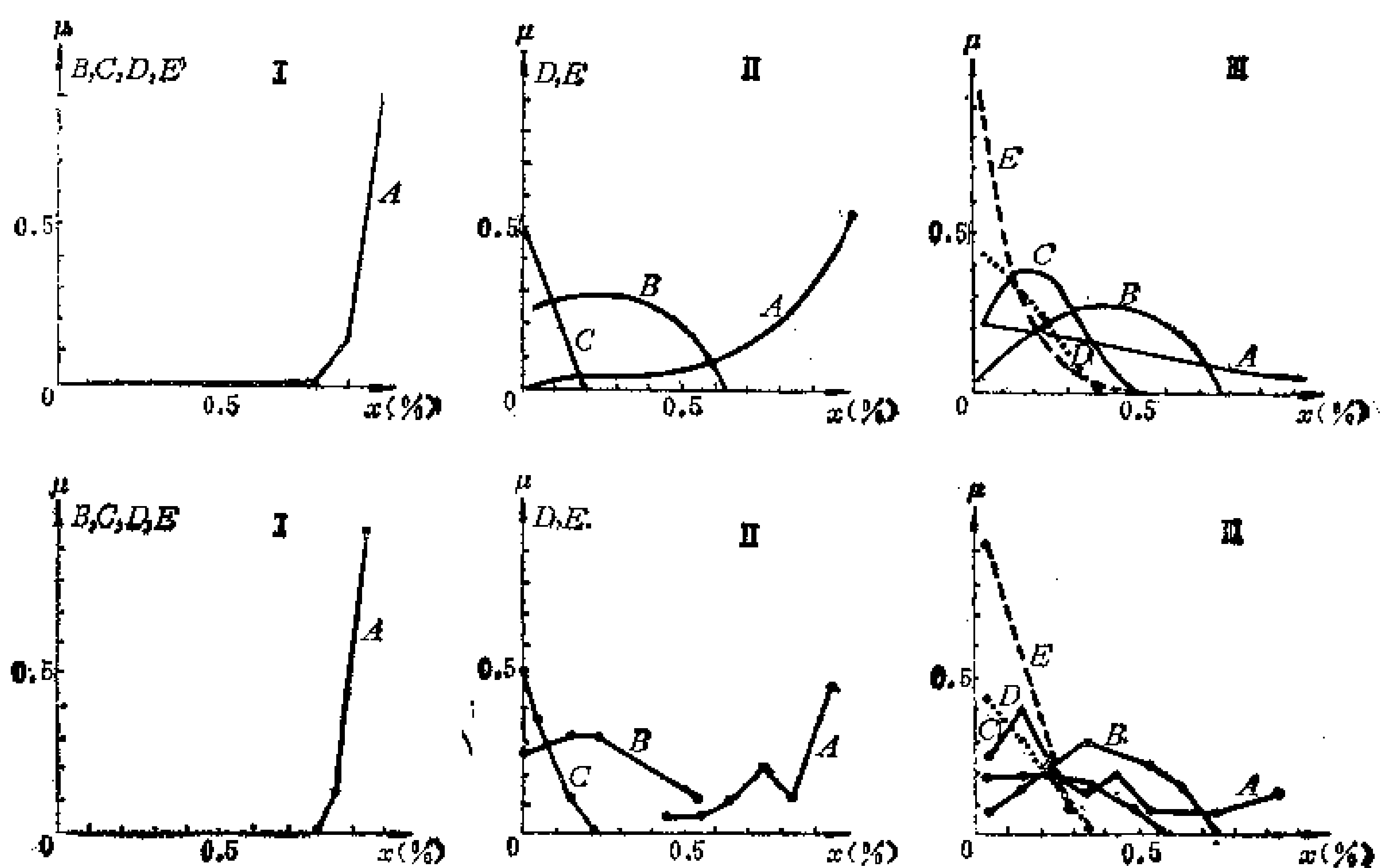



图 3-7-5 烈度X度的经验和近似分布曲线

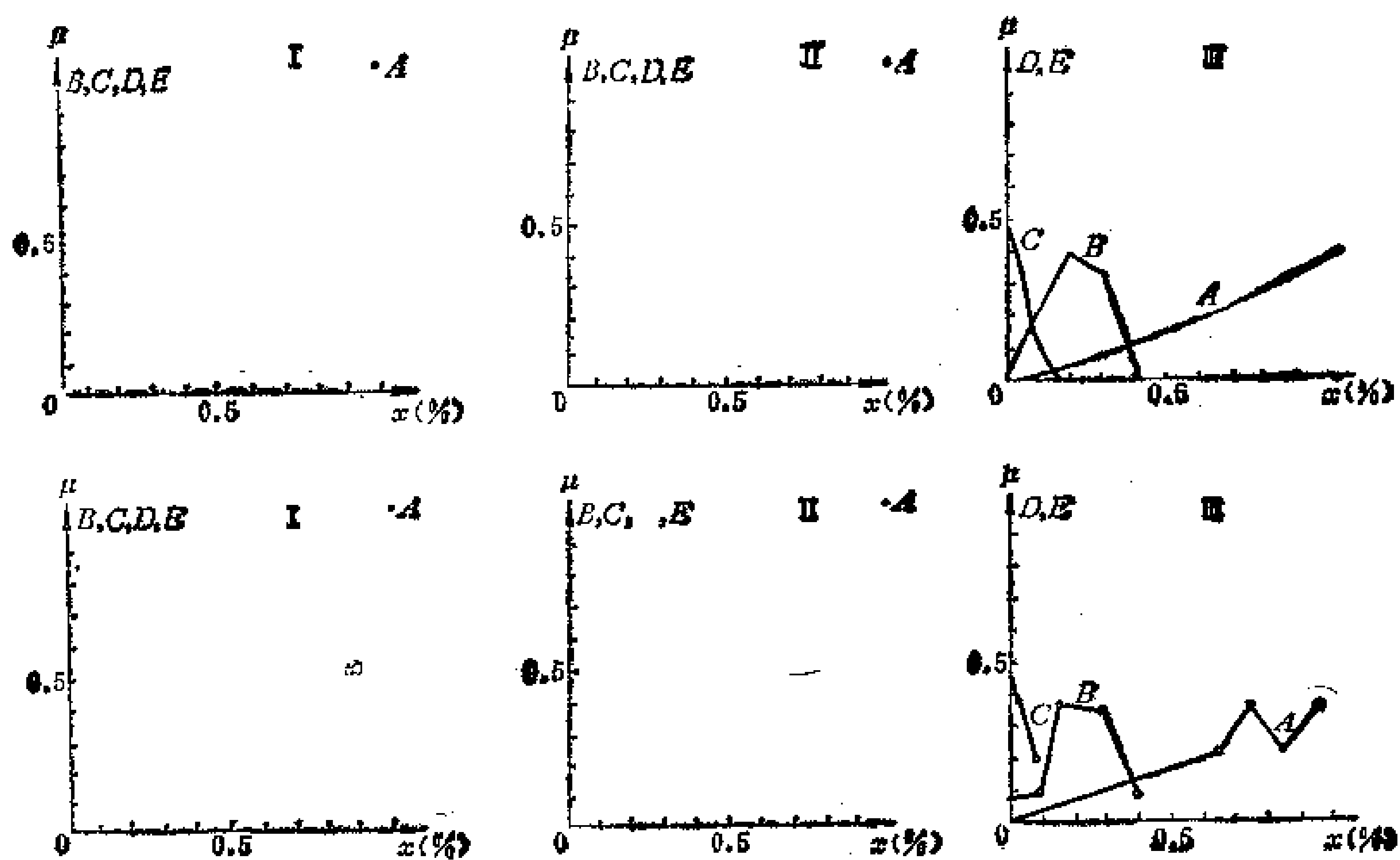



图 3-7-6 烈度XI度的经验和近似分布曲线

## 二、方　法

根据在一个给定的视为一点的小区域内所观测的宏观数据$X = X_{jk}$和利用图3-7-1～3-7 6中的各种经验分布曲线或相应的分布函数近似表达式，我们可以求得如下各种隶属度矩阵：

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{VI,I,A}\cdots\mu_{VI,I,E} & \mu_{VI,II,A}\cdots\mu_{VI,II,E} & \mu_{VI,III,A}\cdots \\ \mu_{VII,I,A}\cdots\mu_{VII,I,E} & \mu_{VII,II,A}\cdots\mu_{VII,II,E} & \mu_{VII,III,A}\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \mu_{XI,I,A}\cdots\mu_{XI,I,E} & \mu_{XI,II,A}\cdots\mu_{XI,II,E} & \mu_{XI,III,A}\cdots \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}7\text{-}8)$$

应用模糊模式识别的直接方法，在给定点的地震烈度必定判断为$i_0$度，按下式求得：

$$\mu^*_{i_0} = \max[\mu^*_i],\ i = \text{VI},\ \text{VII},\ \text{VIII},\ \text{IX},\ \text{X},\ \text{XI} \qquad (3\text{-}7\text{-}9)$$

那么，对于矩阵$M$的每一条线，我们取得

$$\mu^*_i = \min_{j,\ k}[\mu_{i,\ j,\ k}],\ j = \text{I},\ \text{II},\ \text{III};\ k = A,\ B,\ C,\ D,\ E \qquad (3\text{-}7\text{-}10)$$

群模糊评定

假设我们已经取得了来自分布于一个给定区域的$m$点的建筑物损坏数据$X_{j,\ k}$，那么，就可以构成这群数据的经验分布曲线和近似分布曲线。这些曲线形成已审估样本（区域）$\underset{\sim}{B}_P$的模糊集合$P$，这里$1 \leqslant P \leqslant 15$。图3-7-1～图3-7-6中的各种曲线被视为各种不同烈度的一系列标准样本，且它们形成$i \times P = n$模糊集合$\underset{\sim}{A}_{iP}$，$\text{VI} \leqslant i \leqslant \text{XI}$。所有分布曲线必须是凸的。继汪培庄，刘锡荟（1983年）之后，模糊集合$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$的接近度可以定义为：

$$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B}) \triangleq (\underset{\sim}{A} \bullet \underset{\sim}{B}) \wedge (\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B})^c \qquad (3\text{-}7\text{-}11)$$

式中：

$$\underset{\sim}{A} \bullet \underset{\sim}{B} = \bigvee_{x \in X} [\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)] \qquad (3\text{-}7\text{-}12)$$

$$\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B} = \bigwedge_{x \in X} [\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)] \qquad (3\text{-}7\text{-}13)$$

和

$$a^c = 1 - a$$

符号∨和∧分别记为max和min；$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$和$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$是利用解析近似法求得的模糊集合$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$的隶属函数。内积$A \bullet B$实际上是曲线$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$和$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$的交点$(x^*、\mu^*)$的纵坐标$\mu^*$，而它的横坐标可用下式表示：

$$x^* = \mu^{-1}_{\underset{\sim}{A}}[\mu_{\underset{\sim}{B}}(x^*)] \in [\max\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \max\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)] \qquad (3\text{-}7\text{-}14)$$

由于在所研究情况下：

$$\text{Supp}\,\underset{\sim}{A} = \{x \mid x \in X,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0\} \qquad (3\text{-}7\text{-}15)$$

$$\text{Supp}\,\underset{\sim}{B} = \{x \mid x \in X,\quad \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) > 0\} \qquad (3\text{-}7\text{-}16)$$

因此，我们有：

$$(\text{Supp}\,\underset{\sim}{A} \cup \text{Supp}\,\underset{\sim}{B}) \neq X$$

所以，$\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B} = 0$

$$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B}) = \underset{\sim}{A} \bullet \underset{\sim}{B} = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x^*) = \mu_{\underset{\sim}{A}}[\mu^{-1}_{\underset{\sim}{A}}[\mu_{\underset{\sim}{B}}(x^*)]] \qquad (3\text{-}7\text{-}17)$$

计算minima。

$$S_i = \bigwedge_{1 \leqslant P \leqslant 15} (\underset{\sim}{A}_{iP}, \ \underset{\sim}{B}_P), \ i = \text{VI}, \ \text{VII}, \ \text{VIII}, \ \text{IX}, \ \text{X}, \ \text{XI} \quad (3\text{-}7\text{-}18)$$

我们可以求得它们的maximum。

$$S_{i_0} = \bigvee_{\text{VI} \leqslant i \leqslant \text{XI}} S_i \quad (3\text{-}7\text{-}19)$$

根据最择近选择原则，给定区域内的地震烈度必然评定为对应于$S_{i_0}$的$i_0$度。

## 三、实　例

为了评定在天津某些区域内$M=7.8$唐山地震的各种烈度，我们利用了如表3-7-2所示的数据：

唐山地震后天津某些地区所观测的建筑物损坏数据　　表 3-7-2

| 区　域 | 建筑物类型 | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 宁　河 | Ⅲ | 0.778 | 0.1 | 0.088 | 0.034 | — |
| | Ⅱ | 0.876 | 0.07 | 0.055 | — | — |
| | Ⅰ | 0.76 | 0.1 | 0.03 | — | — |
| 汉沽-唐沽 | Ⅲ | 0 | 0.37 | 0.31 | 0.24 | 0.08 |
| | | 0.03 | 0.20 | 0.60 | 0.11 | 0.06 |
| | | 0.144 | 0.072 | 0.211 | 0.193 | 0.35 |
| | | 0.02 | 0.10 | 0.75 | 0.13 | 0 |
| | Ⅱ | 0.60 | 0.22 | 0.10 | 0.08 | 0 |
| | | 0.50 | 0.33 | 0.09 | 0.06 | 0 |
| | | 0.57 | 0.26 | 0.17 | 0 | 0.03 |
| | | 0.55 | 0.29 | 0.16 | 0 | 0 |
| | | 0.027 | 0.124 | 0.141 | 0.326 | 0 |
| | Ⅰ | 0.96 | 0.05 | 0 | 0 | 0 |
| | | 0.99 | 0.1 | 0 | 0 | 0 |
| | | 0.083 | 0.214 | 0.176 | 0.243 | 0 |

在宁河区域的烈度是应用单点模糊评定法判断的，但是在汉沽-唐沽区域的烈度是应用群模糊评定法验证的。在这两区域内的烈度必须判断为Ⅸ，这与宏观调查分析的烈度很好相符。

## §3-8　结构模糊优化设计[50]❶

1985年，王光远、王文泉针对在结构设计中，设计的优劣标准、某些荷载、材料强度及其许用范围等事物既具有随机性又具有模糊性，分析了现行设计方法只是初步考虑了荷载和材料强度的随机性，但对目标函数、荷载、结构反应和物理量允许区间的模糊性大量存在尚未引起人们注意。从而提出了考虑物理量允许区间的模糊性（即模糊约束）的结构模糊优化设计方法，包括结构模糊优化设计的数学模型、模糊优化设计水平截集解法、最

❶ 本节及§3-9所介绍的内容已由王光远收入《结构软设计理论初探》一书中，内容有所修正。——编者

优设防水平等等。只有考虑了这些事物的随机性和模糊性，才能使设计更为合理、经济和适于使用。这为模糊数学在土建工程中的应用开辟了新的领域。

## 一、结构设计中的模糊性

常规的结构优化设计的数学模型可表为：求设计向量$\bar{x}$，使目标函数

$$\left.\begin{aligned}&W(\bar{x})\to\min\\ \text{并满足约束条件}\quad & g_m^l\leqslant g_m(\bar{x})\leqslant g_m^u(m=1,\ 2,\ \cdots,\ M)\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}8\text{-}1)$$

式中 $g_m(m=1,\ 2,\ \cdots,\ M)$代表结构反应的一些物理量，例如应力$\sigma$，位移$u$，频率$\omega$，几何尺寸$x$等。按现有的设计概念，各物理量的允许区间

$$G_m=[g_m^l,\ g_m^u]\qquad(3\text{-}8\text{-}2)$$

是实数论域上的一个普通子集，即实数轴上的一个闭区间，其中$g_m^l$和$g_m^u$分别为允许区间的上下限。

上述约束条件是不合理的。例如对某种钢材若规定允许应力须满足：

$$-1200\leqslant\sigma^a\leqslant1800\quad(\text{kg/cm}^2)$$

它意味着$\sigma=1800$是允许的，而$\sigma=1801$就是不允许的（从概念和模糊数学而论），但实质上二者并无差别。这就是把一个模糊集合人为地规定成一个具有明确边界的普通集合所带来的矛盾。在结构自动化设计中这个矛盾就更为突出。

同理，和许用应力一样，工程设计中的允许位移$u^a$、尺寸限制、频率禁区等等都应该看作实数论域上的模糊子集。此外，目标函数也可能包含一些具有不确定性（随机性和模糊性）的因素。这种考虑事物模糊性的结构优化设计方法可称为“结构模糊优化设计”。

## 二、结构模糊优化设计的数学模型

在最一般情况下，荷载也可能具有模糊性（例如地震荷载），这时结构反应也将具有模糊性。因而结构模糊优化设计的数学模型可写成：

$$\left.\begin{aligned}&\text{求}\bar{x},\quad \underset{\sim}{\min}\underset{\sim}{W}(\bar{x})\\ \text{并满足}\quad & \underset{\sim}{g_m}(\bar{x})\underset{\sim}{\subset}\underset{\sim}{G_m}(m=1,\ 2,\ \cdots,\ M)\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}8\text{-}3)$$

式中带下波浪号“～”的符号都表示在该量或该运算中包含有模糊事物。例如$\underset{\sim}{\min}$即代表在模糊意义下使目标函数趋小。在此数学模型中也可以包括部分非模糊约束，目标函数$W(\bar{x})$中也可能包含或不包含模糊事物，模型中还可以取多目标函数。总之，只要规划中包含有模糊集合，它就是模糊规划问题。

在这里我们暂不考虑具有模糊目标函数的问题，只讨论非模糊约束函数具有模糊允许范围的问题，这种约束条件可称为“模糊约束”。若约束函数也是模糊的，则称为“广义模糊约束”。这里只讨论如下最简单的模糊优化设计：

$$\left.\begin{aligned}&\text{求}\bar{x},\quad \underset{\sim}{\min}W(\bar{x})\\ \text{并满足}\quad & \underset{\sim}{g_m^l}\underset{\sim}{\leqslant} g_m(\bar{x})\underset{\sim}{\leqslant}\underset{\sim}{g_m^u}\quad(m=1,2,\cdots,\ M)\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{-}8\text{-}4)$$

上式中的模糊约束亦可简单地写成：

$$g_m(\bar{x}) \in \underset{\sim}{G}_m \tag{3-8-5}$$

约束函数$g(\bar{x})$的允许范围$\underset{\sim}{G}$应构成实数论域上的一个模糊子集：

$$\underset{\sim}{G} = \int_R \mu_{\underset{\sim}{G}}(g)/s$$

式中$\mu_{\underset{\sim}{G}}(g)$为$g$对其模糊允许区间的隶属度，为有所区别采用$\mu$作为此隶属度的符号。$\underset{\sim}{G}$应该在实数轴上有一个模糊的边界，也就是应该考虑从“完全允许”到“完全不允许”之间的过渡性。因此，它的隶属函数应该具有图 3-8-1 所示的性质。图3-8-1中$g^u$和$g^l$为设防水平最高时允许范围的上、下限，它们甚至可以比规范规定还要严格一些（根据工程性质而选定）。$d^u$和$d^l$是过渡区长度，也就是上下限的容许偏差，可简称为“容差”。

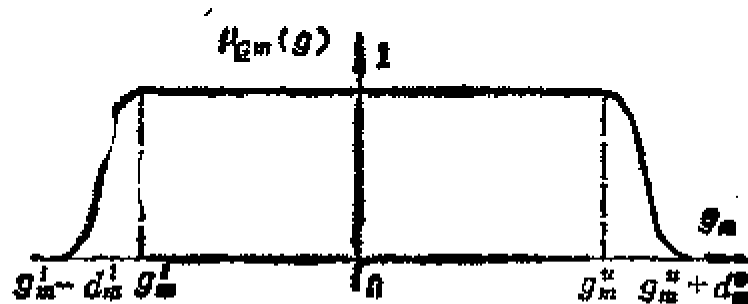



图 3-8-1 $\underset{\sim}{G}$的隶属函数

隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{G}}(g)$的曲线部分主要是表示允许范围边界的逐渐过渡性，取何种函数关系不大。建议可采用以下一些隶属函数：

（1）斜线型

$$\mu_{\underset{\sim}{G}}(g) = \begin{cases} 1, & 当 g^l \leqslant g \leqslant g^u \\ 1 - \dfrac{g-g^u}{d^u} & 当 g^u \leqslant g \leqslant g^l + d^u \\ 1 + \dfrac{g-g^l}{d^l} & 当 g^l - d^l < g < g^l \\ 0 & 其它情况 \end{cases} \tag{3-8-6}$$

（2）曲线型

$$\mu_{\underset{\sim}{G}}(g) = \begin{cases} 1, & 当 g^l \leqslant g \leqslant g^u \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\left[\dfrac{\pi}{d^u}\left(g - g^u - \dfrac{1}{2}d^u\right)\right], & 当 g^u < g < g^u + d^u \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\left[\dfrac{\pi}{d^l}\left(-g + g^l - \dfrac{1}{2}d^l\right)\right], & 当 g^l - d^l < g < g^l \\ 0, & 其它情况 \end{cases}$$

$$\tag{3-8-7}$$

当然也可以根据物理量$g$的性质选用具有类似变化的其它函数。

隶属度$\mu_{\underset{\sim}{G}}(g)$可以称为$g$对该模糊约束的“满足度”。当$\mu_{\underset{\sim}{G}}(g)=1$时该约束得到严格的满足，当$\mu_{\underset{\sim}{G}}(g)=0$时该约束未得到满足，当满足度介于0和1之间时，该约束得到具有某一水平的满足。若用$\beta_m$表示$g$对模糊约束$\underset{\sim}{G}_m$的满足度，则可记为：

$$\beta_m = \mu_{\underset{\sim}{G}m}(g_m) \tag{3-8-8}$$

因此式（3-8-4）和（3-8-5）所示模糊约束表示在$\beta_m>0$的意义下$g_m$属于模糊子集$\underset{\sim}{G}_m$。

这样，全部约束就在设计空间围成了一个具有模糊边界的可用域，可称为“模糊可用

域”，并表为：

$$\underset{\sim}{\Omega}=\bigcap_{m=1}^{M}\underset{\sim}{G}_m \quad (3\text{-}8\text{-}9)$$

此式表示设计空间的模糊可用域是所有模糊约束空间$\underset{\sim}{G}_m$（$m=1, 2, \cdots, M$）的交，也就是说，$\underset{\sim}{\Omega}$中的每一个可用点也都是所有$\underset{\sim}{G}_m$的可用点，它们在满足度大于零的意义下满足所有模糊约束。

根据集合运算的基本规则，由式（3-8-9）可知，任一设计点对模糊可用域$\underset{\sim}{\Omega}$的隶属度为：

$$\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(\bar{x})=\min_{m=1}^{M}\mu_{\underset{\sim}{G}m}(g_m(\bar{x})) \quad (3\text{-}8\text{-}10)$$

它就是$\bar{x}$所有约束的满足度中的最小者。在规定上下限$g^u$、$g^l$和容差$d^u$、$d^l$时，应该考虑只要$\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(\bar{x})>0$，$\bar{x}$即为可用设计方案，但随着$\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(\bar{x})$的大小不同，这些$\bar{x}$具有不同的设防水平。

这种最简单的结构模糊优化设计的数学模型（3-8-4）可展开写成：

$$\text{求}\bar{x},\quad \underset{\sim}{\min}\, W(\bar{x})$$

并满足以下约束

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{应力约束} & \underset{\sim}{\sigma}_i^l\underset{\sim}{\leqslant}\sigma_i(\bar{x})\underset{\sim}{\leqslant}\underset{\sim}{\sigma}_i^u \quad (i=1, 2, \cdots, l)\\
\text{位移约束} & u_j^l\underset{\sim}{\leqslant}u_j(\bar{x})\underset{\sim}{\leqslant}\underset{\sim}{u}_j^u \quad (j=1, 2, \cdots, m)\\
\text{频率约束} & \omega_k(\bar{x})\underset{\sim}{\leqslant}\underset{\sim}{\omega}_k^l\text{或}\omega_k(\bar{x})\underset{\sim}{\geqslant}\underset{\sim}{\omega}_k^u \quad (k=1, 2, \cdots, n)\\
\text{尺寸约束} & \underset{\sim}{x}_i^l\underset{\sim}{\leqslant}x_i\underset{\sim}{\leqslant}\underset{\sim}{x}_i^u \quad (i=1, 2, \cdots, l)
\end{array}\right\} \quad (3\text{-}8\text{-}11)$$

它的最优解将构成模糊可用域$\underset{\sim}{\Omega}$的一个模糊最优子域$\underset{\sim}{x}^*$，其中各设计点在模糊的含义上目标函数最小。

## 三、模糊优化设计的水平截集解法

约束函数$g(\bar{x})$的允许范围$\underset{\sim}{G}$是实数论域上的模糊子集，它的含义为

$$\underset{\sim}{G}=\{g\,|\,g\in R,\ \mu: R\to[0,1]\} \quad (3\text{-}8\text{-}12)$$

式中表明隶属函数$\mu$是实数论域$R$到闭区间[0，1]上的映射。

在允许范围模糊子集$\underset{\sim}{G}$中，隶属度$\mu_{\underset{\sim}{G}}(g)\geqslant\alpha$，（$\alpha\in[0, 1]$）的区间构成实数论域上的一个普通子集。

$$G_\alpha=\{g\,|\,g\in R,\ \mu_{\underset{\sim}{G}}(g)\geqslant\alpha\} \quad (3\text{-}8\text{-}13)$$

称为“$\alpha$-水平截集”。它就是图3-8-2所示具有明确边界的闭区间

$$G_\alpha=[g_\alpha^l,\ g_\alpha^u] \quad (3\text{-}8\text{-}14)$$

显然，二个不同水平的截集具有如下关系：

$$\alpha_1\leqslant\alpha_2\Longrightarrow G_{\alpha_1}\supseteq G_{\alpha_2} \quad (3\text{-}8\text{-}15)$$

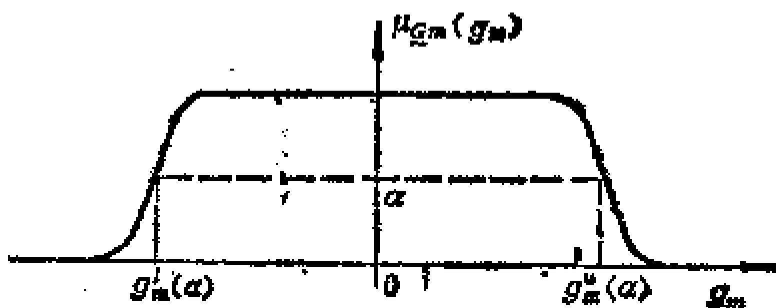



图 3-8-2　$\alpha$-水平截集$G_\alpha$

$\alpha$值愈小，$G_\alpha$包括的范围就愈大。当$\alpha=0^+$时，$G_0$就是$\underset{\sim}{G}$的支集，包括全部允许范围；当$\alpha=1$时，$G_1$就是最严的允许范围[$g^l$，$g^u$]。所以从工程观点来看，$\alpha$具有“设防水平”

的含义。

如果对所有约束均以约束函数允许范围$\underset{\sim}{G}$的$\alpha$-截集$G_\alpha$代替$\underset{\sim}{G}$，则式（3-8-2）所示的模糊优化设计就转化为具有$\alpha$-设防水平的非模糊优化设计：

$$\left.\begin{array}{l} \text{求}\bar{x}\text{，使}W(\bar{x})\to\min \\ \text{并满足具有}\alpha\text{-设防水平的约束：} \\ g_m(\bar{x})\in G_{m_\alpha}\quad(m=1,\ 2,\ \cdots,\ M) \end{array}\right\}\qquad(3\text{-}8\text{-}16)$$

或展开来写成：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{求}\bar{x}\text{，使}W(\bar{x})\to\min & \\ \text{并满足} & \\ \text{应力约束} & \sigma^l_{i_\alpha}\leqslant\sigma_i(\bar{x})\leqslant\sigma^u_{i_\alpha}\quad(i=1,\ \cdots,\ l) \\ \text{位移约束} & u^l_{j_\alpha}\leqslant u_j(\bar{x})\leqslant u^u_{j_\alpha}\quad(j=1,\ \cdots,\ m) \\ \text{频率约束} & \omega_k\leqslant\omega^l_{k_\alpha}\text{或}\omega_k\geqslant\omega^u_{k_\alpha}\quad(k=1,\cdots,n) \\ \text{几何约束} & x^l_{i_\alpha}\leqslant x_i\leqslant x^u_{i_\alpha}\quad(i=1,\ \cdots,\ l) \end{array}\right\}\qquad(3\text{-}8\text{-}17)$$

可以用一般结构优化设计的各种方法求出具有$\alpha$-设防水平的最优解$\bar{x}^*_\alpha$和$W^*_\alpha$。

式（3-8-16）中的约束表明：约束函数$g_m(\bar{x})$之值必须落于非模糊区间$G_{m_\alpha}=[g^l_{m_\alpha},\ g^u_{m_\alpha}]$。这个条件等价于：约束函数$g(\bar{x})$对其模糊允许区间$\underset{\sim}{G}_m$的隶属度，即对约束的满足度

$$\beta_m=\mu_{\underset{\sim}{G}m}(g_m)\geqslant\alpha$$

因此，非模糊数学规划（3-8-16）或（3-8-17）等价于：

$$\left.\begin{array}{l} \text{求}\bar{x}\text{，使}W(\bar{x})\to\min \\ \text{并满足}\quad\beta_m=\mu_{\underset{\sim}{G}m}(g_m)\geqslant\alpha\quad(m=1,\ 2,\ \cdots,\ M) \end{array}\right\}\qquad(3\text{-}8\text{-}18)$$

也就是说，$\bar{x}$对所有约束的满足度均须大于或等于$\alpha$。因此，上式亦可写成：

$$\left.\begin{array}{l} \text{求}\bar{x}\text{，使}W(\bar{x})\to\min \\ \text{并满足}\qquad\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(\bar{x})\geqslant\alpha \end{array}\right\}\qquad(3\text{-}8\text{-}19)$$

这表明设计方案$\bar{x}$对模糊可用域的隶属度须大于或等于$\alpha$。

式（3-8-16）～（3-8-19）四个非模糊数学规划是完全等价的，所求得的最优解$\bar{x}^*(\alpha)$可称为“具有$\alpha$水平的优化设计”。

为了取得更多的比较全面的信息，还应次次取设防水平$\alpha$为$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_s$。这样可得$s$个具有不同设防水平的最优设计方案$\bar{x}^*_\alpha$及$W^*_\alpha$。它们组成原模糊优化设计的解。也就是说，模糊优化设计的结果是设计空间的一个“模糊优化点序列”，针对不同的设防水平$\alpha$有不同的最优点。

既然我们得到的多个优化点，这样就提供了进一步优选的可能，因而这种解法有利于多层次的优选及多目标优化问题的求解。为此，可将计算结果汇总，给出例如图3-8-3所示的曲线，以利进一步的优选。

**例 3-8-1** 图3-8-4所示为承受谐振荷载的宽翼缘工字钢梁，其截面积$A$，惯性矩$I$和抗弯模数$S$之间符合如下统计关系，

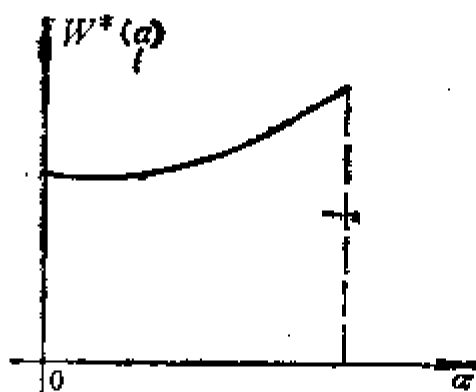


图 3-8-3 优选曲线

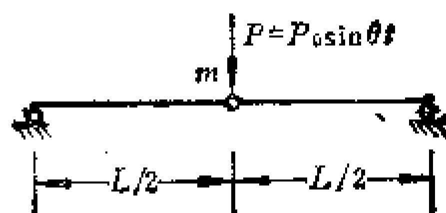


图 3-8-4 谐振荷载工字梁

$$A=0.8I^{0.5},\quad S=0.78I^{0.75}$$

只考虑稳态振动，求梁的最轻设计。设集中质量$m$包括机器质量和部分梁的质量，不考虑梁断面改变对$m$的影响。材料的弹性模量$E=2\times10^6\text{kg/cm}^2$，阻尼比$\xi=0.015$，荷载圆频率$\theta=30\text{rad/s}$，$P_0=200\text{kg}$，$mg=1000\text{kg}$，梁长$l=400\text{cm}$，应力$\sigma$，中点挠度$u$，自振圆频率$\omega$，截面积$A$的允许范围都是实数论域$R$的模糊子集，其隶属度如图3-8-5所示，其非水平段公式为：$\mu_{\underset{\sim}{\Sigma}}=1-(\sigma-1800)/400$，$(0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{\Sigma}}\leqslant1)$；$\mu_{\underset{\sim}{u}}=1-(u-2)/0.5$，$(0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{u}}\leqslant1)$；$\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}=1-(\omega-24)/3$，$\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}=(\omega-33)/3$，$(0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}\leqslant1)$；$\mu_{\underset{\sim}{A}}=(A-12)/4$，$(0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}\leqslant1)$。

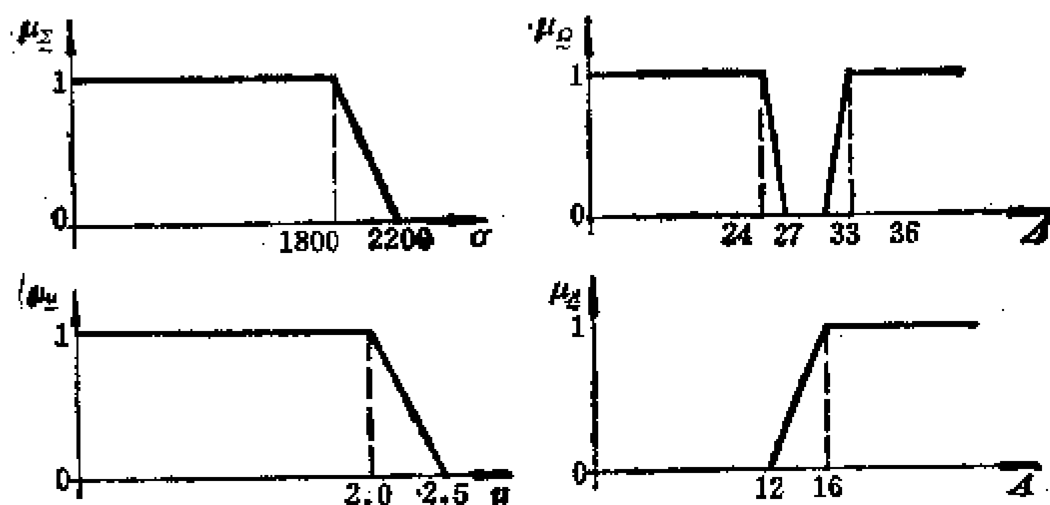


图 3-8-5 $\underset{\sim}{\Sigma}$、$\underset{\sim}{u}$、$\underset{\sim}{\Omega}$、$\underset{\sim}{A}$的隶属函数

**解**：梁中点向下位移的刚度$K=48EI/l^3=2.3438A^2$，$\omega=\sqrt{K/m}=1.5155A$，$u_{max}=mg/K+\eta P_0/K=85.3333(5+\eta)A^{-2}$，$\sigma_{max}=l(mg+\eta P_0)/4S=18347(5+\eta)\times A^{-1.5}$。

式中：放大系数 $\eta=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$ $\beta=\theta/\omega$

这样，具有$\alpha$-设防水平的最轻设计为

$$\min A_\alpha$$

满足

$$\sigma_{max}=18347(5+\eta)A_\alpha^{-1.5}\leqslant2000-400\alpha$$

$$u_{max}=85.3333(5+\eta)A_\alpha^{-2}\leqslant2.5-0.5\alpha$$

$$\omega=1.5155A_\alpha\leqslant27-3\alpha,\text{ 或}\omega=1.5155A_\alpha\geqslant33+3\alpha$$

$$A_\alpha\geqslant12+4\alpha$$

给出不同的设防水平 $\alpha$，解此只有一个设计变量$A_\alpha$的非线性规划，可得一系列最轻解$A_\alpha^*$如图3-8-6所示。

由于共振的影响，针对每一个 $\alpha$ 可能有一个较小的$A_\alpha^*$（柔性方案），和一个较大的$A_\alpha^*$(刚性方案)。当前者存在时（此例$\alpha=0\sim0.44$），自应以它作为最轻解。本题综合考虑既要有较高的设防水平,又要节省材料,就可选用$\alpha=0.44$时的柔性方案 $A_{0.44}^*=14.5\text{cm}^2$。若用一般的非模糊规划，就可能失去这个真正最优方案。例如，此例$\alpha=1$时，就会得出刚性方案 $A_1^*=23.75$，远大于$A_{0.44}^*$。此题在 $\alpha=[0,\ 0.44]$范围内时，位移约束临界，$\alpha=[0.44,\ 1]$范围内时频率约束临界。在后一情况下，若只考虑应力和位移约束，则 $\alpha=1$时的最轻解为$A_1^*=22.05\text{cm}^2$。

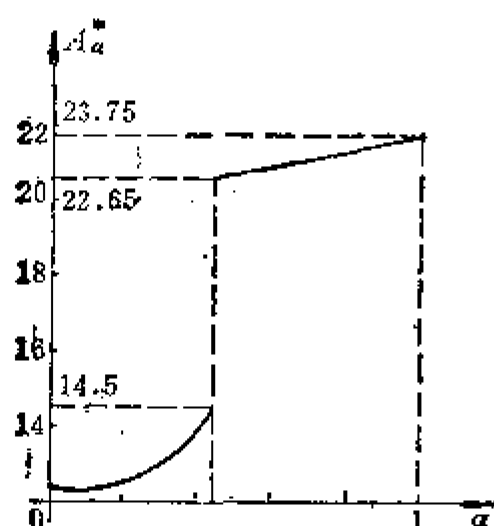



图 3-8-6 不同设防水平 $\alpha$ 的最轻解$A_\alpha^*$

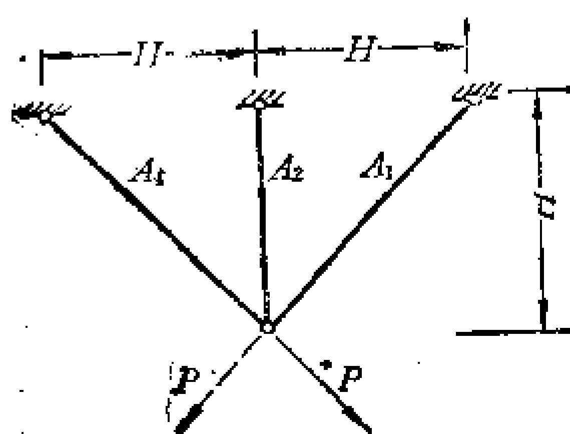



图 3-8-7 三杆桁架

**例 3-8-2** 图3-14-7所示三杆桁架是一个常用的考题。设$P=20$，$H=1$，$\rho=1$，我们给出各种物理量允许范围的模糊边界为：$\sigma^u=20$，$d_\sigma^u=4$；$A^l=0.1$，$d_A^l=0.02$；$\sigma^l=-15$，$d_\sigma^l=3$。节点竖向位移：$u^u=10/E$，$d_u^u=2/E$。隶属函数取斜线型边界，求模糊最轻解。

**解**：类似例3-8-1的办法，不难得出具有$\alpha$-设防水平的最轻设计为

$$求(A_1A_2)，使W=2\sqrt{2}A_1+A_2\to\min$$

并满足应力约束

$$\sqrt{2}A_1+A_2/2A_1A_2+\sqrt{2}A_1^2\leqslant(6-\alpha)/5 \qquad (a)$$

$$\sqrt{2}A_1/2A_1A_2+\sqrt{2}A_1^2\leqslant(6-\alpha)/5 \qquad (b)$$

$$A_2/2A_1A_2+\sqrt{2}A_1^2\leqslant3(6-\alpha)/5 \qquad (c)$$

位移约束
$$1/A_1+\sqrt{2}A_2\leqslant(6-\alpha)/10 \qquad (d)$$

尺寸约束
$$A_i\geqslant0.08+0.0\alpha,\quad i=1,\ 2, \qquad (e)$$

由于本题中 $\alpha$ 在[0，1]中取值时均为约束（$a$）和（$d$）达到临界，因而联解此二式可得封闭解

$$A_{1\alpha}^*=\frac{2}{3}\ \frac{5}{6-\alpha},\quad A_{2\alpha}^*=\frac{2}{3}\sqrt{2}\ \frac{5}{6-\alpha},\quad W_\alpha^*=2\sqrt{2}\ \frac{5}{6-\alpha}$$

在此特殊情况下，模糊规划的计算工作量和相应的非模糊规划基本相同。

**例 3-8-3** 图3-8-8所示对称二层剪切型框架，柱为宽翼缘工字钢，其截面积$A_i$，惯性矩$I_i$和抗弯模数$S_i$之间满足统计关系：$A_i=0.8I_i^{1/2}$，$S_i=0.78I_i^{3/4}$，柱高$H_1=H_2=350$cm，弹性模量$E=2\times10^6$kg/cm²。刚性梁的重量为$m_1g=4000$kg，$m_2g=8000$kg，（取g=981cm/sec²），不考虑柱的质量。二个振型的阻尼比为$\zeta_1=\zeta_2=0.015$，柱的最大压应力$\sigma_1$，$\sigma_2$，楼层对地面的相对位移$u_1$、$u_2$，层间相对位移$u_3=u_1-u_2$，自振圆频率$\omega_1$，$\omega_2$，柱截面积$A_1$，$A_2$的模糊允许区间如图3-8-9所示。

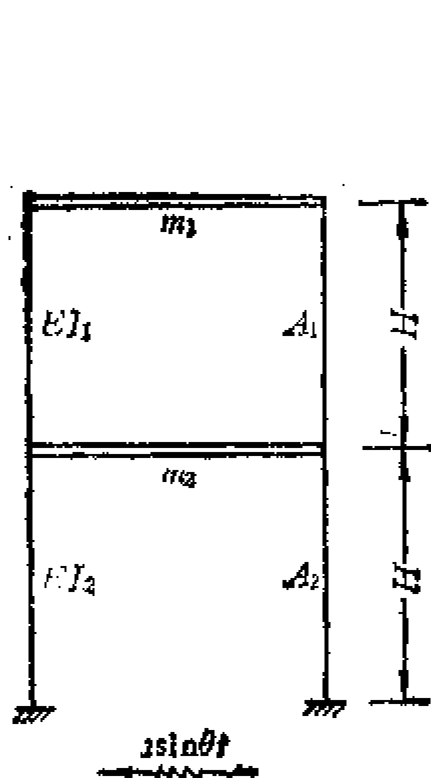



图 3-8-8 对称二层剪切型框架

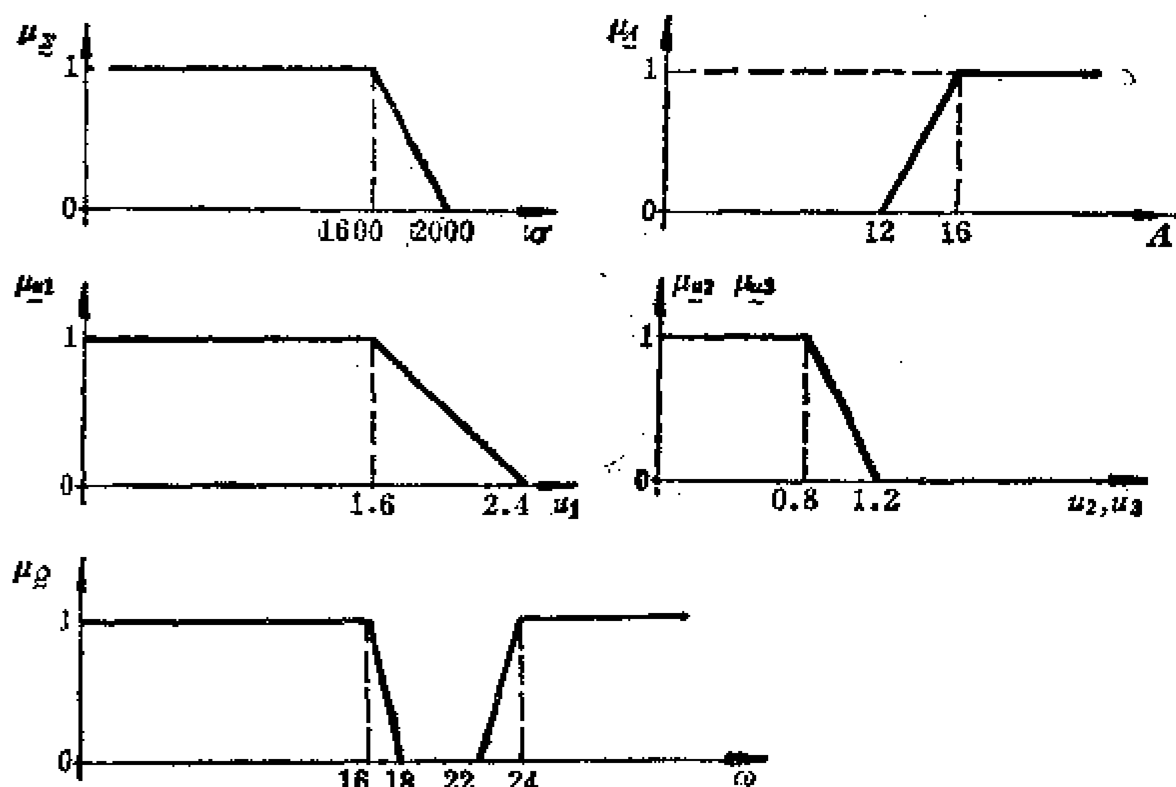



图 3-8-9 各种物理量的隶属函数

地面作简谐运动：$a=1$cm，$\theta=20$rad/sec。

作框架的模糊最轻设计。

**解**：结构分析给出：结构的自振圆频率

$$\omega_i^2=\frac{24EI_i}{m_1H^3}\eta_i,\quad (i=1,\ 2)$$

其中：
$$\left.\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{m_1}{m_2}+\frac{I_2m_1}{I_1m_2}\right)\mp\sqrt{\left(1+\frac{m_1}{m_2}+\frac{I_2m_1}{I_1m_2}\right)^2-4\frac{I_2m_1}{I_1m_2}}\right]$$

位移和应力幅值：

$$\max|u_1|=\sqrt{(D_1B_1+D_2B_2)^2+(D_1C_1+D_2C_2)^2}$$

$$\max|u_2|=\sqrt{[(1-\eta_1)D_1B_1+(1-\eta_2)D_2B_2]^2+[(1-\eta_1)D_1C_1+(1-\eta_2)D_2C_2]^2}$$

$$\max|u_1-u_2|=\sqrt{(\eta_1D_1B_1+\eta_2D_2B_2)^2+(\eta_1D_1C_1+\eta_2D_2C_2)^2}$$

$$\max|\sigma_1|=\frac{m_1g}{2A_1}+\frac{6EI_1}{H^2}\cdot\frac{\max|u_1-u_2|}{S_1}$$

$$\max|\sigma_2|=\frac{m_1+m_2}{2A_2}g+\frac{6EI_2}{H^2}\cdot\frac{\max|u_2|}{S_2}$$

其中：
$$D_i=\frac{m_1+(1-\eta_i)m_2}{m_1+(1-\eta_i^2)m_2}\cdot\frac{a\theta^2}{(1-\beta_i^2)^2+(2\zeta_i\beta_i)^2}\qquad (i=1,\ 2)$$

$$\beta_i=\theta/\omega_i,\quad B_i=1-\beta_i^2,\quad C_i=-2\zeta_i\beta_i.$$

这样，具有设防水平$a$的最轻设计为：

求$(A_1A_2)$，使$W = A_1 + A_2 \to \min$。

满足约束 $\omega \leqslant 18-2\alpha$或$22+2\alpha \leqslant \omega$；$|\sigma| \leqslant 2000-400\alpha$；$|u_1| \leqslant 2.4-0.8\alpha$；$|u_2| \leqslant 1.2-0.4\alpha$；$|u_1-u_2| \leqslant 1.2'-0.4\alpha$；$A_1$，$A_2 \geqslant 12+2\alpha$。求解一系列具有不同设防水平$\alpha$的非线性规划就得到如图3-8-10，和表3-8-1所示的一系列最轻解$\overline{A}^*(\alpha_i)$和相应的$W^*(\alpha_i)$。

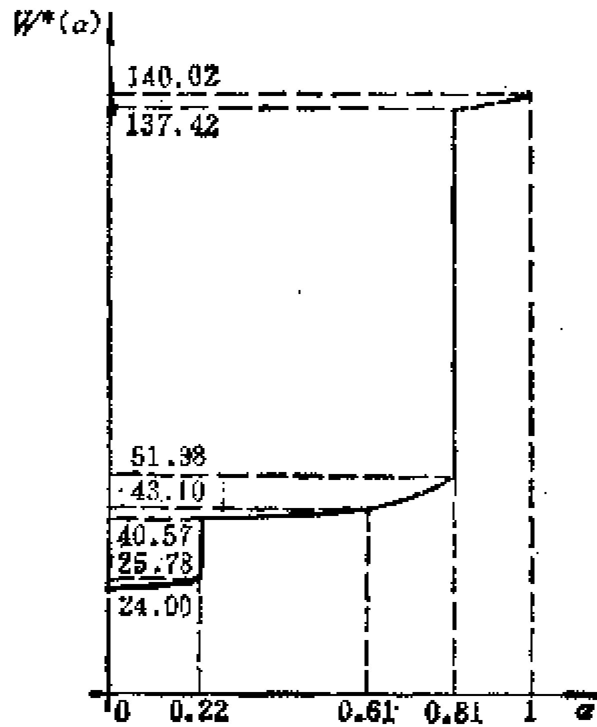



图 3-8-10 不同设防水平$\alpha$的最轻解

不同设防水平$\alpha$的最轻解 表 3-8-1

| $\alpha$ | $A_1^*$ | $A_2^*$ | $W^*$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 12.00 | 12.00 | 24.00 |
| 0.1 | 12.40 | 12.40 | 24.80 |
| 0.2 | 12.80 | 12.80 | 25.60 |
| 0.22 | 12.89 | 12.89 | 25.78 |
| 0.23 | 27.65 | 12.92 | 40.57 |
| 0.3 | 27.81 | 13.20 | 41.01 |
| 0.4 | 28.05 | 13.60 | 41.65 |
| 0.5 | 28.27 | 14.00 | 42.27 |
| 0.6 | 28.50 | 14.40 | 42.90 |
| 0.61 | 28.51 | 14.59 | 43.10 |
| 0.7 | 28.39 | 19.11 | 47.50 |
| 0.8 | 28.29 | 22.80 | 51.07 |
| 0.81 | 28.26 | 23.12 | 51.38 |
| 0.82 | 54.15 | 83.27 | 137.42 |
| 0.9 | 54.53 | 84.00 | 138.53 |
| 1.0 | 55.04 | 84.98 | 140.02 |

这里论述的模糊优化设计方法实际上就是针对不同的设防水平取不同的非模糊可用域。由于不同的设计点对模糊可用域$\underset{\sim}{\Omega}$隶属度不同，所以可把隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(\overline{x})$想象为$l+1$维空间中的超曲面。在例3-8-3中，设计空间$\overline{x}=(A_1,A_2)$是平面$R^2$上的一个子域，$\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(\overline{x})$可看成三维空间上的曲面。具有设防水平$\alpha$的可用域$\Omega_\alpha$是设计空间的一部分，满足$\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(\overline{x}) \geqslant \alpha$即曲面$\mu=\mu_{\underset{\sim}{\Omega}}(\overline{x})$在割平面$\mu=\alpha$以上的部分在设计空间的投影。

在例3-8-3中，当$\alpha \in [0, 0.22]$时，每个非模糊可用域都包括三个部分：柔性方案区、中性方案区和刚性方案区。当然，柔性方案使目标函数达到最小：$W^*(\alpha) \in [24.00, 25.78]$。临界约束为$A_1$和$A_2$的两个尺寸约束。当$\alpha \in [0.23, 0.81]$时，非模糊可用域$\Omega_\alpha$收缩为两部分，柔性方案区域成为不可用域的一部分，中性方案使目标函数达到最小：$W^*(\alpha) \in [40.57, 51.38]$。这些中性方案都是上刚下柔的。其中当$\alpha \in [0.23, 0.60]$时$A_2$和$\omega_2$约束临界；当$\alpha \in [0.61, 0.81]$时$u_2$和$\omega_2$约束临界。而当$\alpha \in [0.82, 1.00]$时，可用域只剩下刚性方案一部分，$W^*(\alpha) \in [137.42, 140.02]$，三个位移约束临界。

由图3-8-10可见，当最轻设计方案从柔性方案区跳入中性方案区再跳入刚性方案区时，目标函数随之加倍再加倍。综合考虑经济效益，不仅要达到尽可能高的设防水平，而且要节省材料，最佳方案应是$\alpha=0.22$的柔性方案或$\alpha=0.81$的中性方案。

## 四、最优设防水平

既然结构模糊优化设计所得结果是设计空间的一个模糊优化域，针对不同的设防水平 $\alpha$ 可以得到不同的最优点 $\overline{x}_\alpha^*$，那末自然就存在一个如何确定最优设防水平 $\alpha^*$ 的问题。

一般说来，可以象例3-8-1和例3-8-3所述那样，综合考虑既要有较高的设防水平 $\alpha$，又要照顾其它目标（如节省材料）来决定 $\alpha^*$。也可以综合考虑结构的初始造价 $C(\overline{x}_\alpha^*)$ 和结构使用期间所需补充费用的期望值 $E(\overline{x}_\alpha^*)$ 来决定 $\alpha^*$。$E(\overline{x}, \alpha)$ 包括结构的维持费，遇到灾害时造成的损失和修复费用等。$C$ 和 $E$ 都是具有设防水平 $\alpha$ 的优化设计方案 $\overline{x}_\alpha^*$ 的函数，也就是 $\alpha$ 的函数，$C(\alpha)$ 随 $\alpha$ 的增大而增大，$E(\alpha)$ 随 $\alpha$ 的增大而减小。求 $\alpha^*$ 的问题具有如下的数学模型

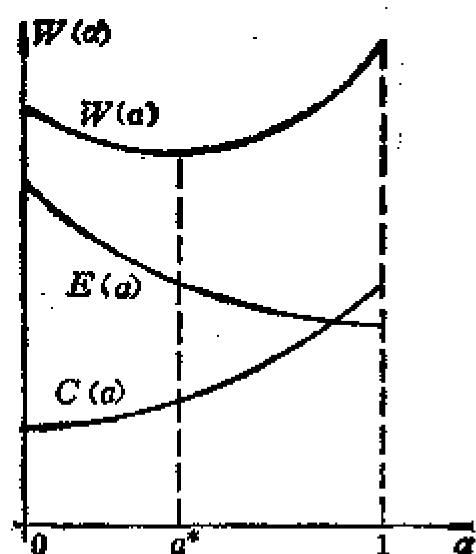


图 3-8-11 最优设防水平解

$$\text{求 } \alpha \in [0,1]$$

$$\min W(\alpha) = C(\alpha) + E(\alpha) \qquad (3\text{-}8\text{-}20)$$

这个问题可用图3-8-11所示方法来解决。

## 五、结　语

综上所述，可以看出结构模糊优化设计比一般的非模糊优化设计有如下优点：

（1）考虑了各个约束函数允许范围边界的过渡性，使设计更为合理；（2）得出了具有各种设防水平的优化设计方案，提供了进一步优选的可能性，有利于多层次或多目标结构优化设计的解决；（3）使某些矛盾规划成为有解规划，避免了漏掉真正优化方案的弊病。

# §3-9　抗震结构的模糊优化设计[51]

1985年，王光远、王文泉进一步提出了抗震结构模糊优化设计方法。定义了模糊预测烈度、模糊反应谱、结构的模糊反应，给出了具有广义模糊约束（包括模糊约束函数及其取值的模糊允许范围）的模糊规划解法。水平截集解法是其特例。模糊规划解法的基础是给出了模糊约束函数对其允许模糊取值范围的满足度的概念，并利用它把问题转化为一系列非模糊规划，从而得到一个最优点序列，这就是此模糊规划的解。

王光远、王文泉建议在抗震结构优化设计中，分为两个层次进行优选。第一步利用上述方法求得最小造价点集，各设计点对应着不同的设防水平；第二步在目标函数中综合考虑初始造价和结构使用期内震害损失期望、求得最优设防水平与其对应的一个最优设计方案。

## 一、模糊预测烈度

在抗震结构设计中，要确定基本烈度、场地烈度和设计烈度。目前基本烈度是按地震区划图给定的，但图上一线之隔就相差一度，显然是不合理的。场地烈度过去是由专家笼统地考虑场地的小区域，因素后对基本烈度进行修正而得出的。设计烈度则是考虑设计对

象的重要程度而对场地烈度再次修正后得出。在以上各个环节中存在大量模糊信息。忽略事物的模糊性而直接给出合理的确定性烈度是十分困难的。而设计烈度相差一度，相应的地震荷载就相差一倍。在这个重大问题上原有方法是有缺陷的。此外为考虑结构重要性而直接修改地震烈度也不是很合理的。

地震区划图是专家们根据历史地震资料和大地构造的具体情况对全国各地100年内可能发生的最大地震烈度的一种预报。这个成果是应该利用的。但是由于地震在时间、空间和强度方面的随机性和烈度本身的模糊性，各烈度区之间的边界应该是模糊的，即从一个烈度区到相邻另一个烈度区不是突变（明确边界），而是逐渐过渡（模糊边界）。然而这样的地震区划图是难以绘制的。为解决这个困难，下面将提出一些初步的建议。

对于评定已发生地震的烈度，在§3-5中将被评定的烈度定义为离散烈度论域

$$V=\{\text{Ⅵ},\ \text{Ⅶ},\ \text{Ⅷ},\ \text{Ⅸ},\ \text{Ⅹ}\} \qquad (3\text{-}9\text{-}1)$$

上的模糊子集

$$\underset{\sim}{B}=b_1/\text{Ⅵ}+b_2/\text{Ⅶ}+b_3/\text{Ⅷ}+b_4/\text{Ⅸ}+b_5/\text{Ⅹ} \qquad (3\text{-}9\text{-}2)$$

也就是说，可用模糊烈度向量

$$\underset{\sim}{B}=[b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5] \qquad (3\text{-}9\text{-}3)$$

来描述地震烈度。

在对已发生地震的烈度评定中只有模糊性而无随机性，但在地震烈度预测和预报中却既有模糊性又有随机性。这是一个值得认真研究的重大课题。目前我们建议作如下处理。

首先承认地震发生的随机性问题在绘制地震区划图时已得到适当的解决，因而可以把它作为基本资料，结合工程所在地区的历史地震资料和大地构造所提供的模糊信息给出该地区的糊模基本烈度$\underset{\sim}{I}_0$，它是连续烈度论域[0, 12]上的模糊子集。为简便计，建议首先估定$\underset{\sim}{I}_0$的上下限$b_0$和$a_0$，然后即可按下式给出隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{I}_0}(I)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\frac{I-a_0}{b_0-a_0}-\frac{1}{2}\right)\pi+1\right] \quad I\in[a_0,\ b_0] \qquad (3\text{-}9\text{-}4)$$

式中区间$[a_0, b_0]$即模糊基本烈度$\underset{\sim}{I}_0$的支集。式(3-9-4)所示隶属函数的图形见图3-9-1。

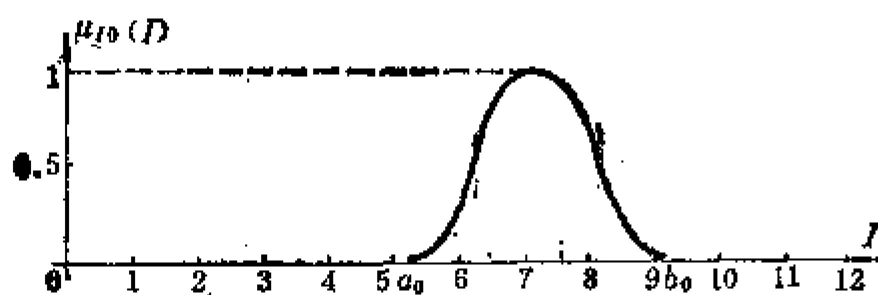


图 3-9-1 $\underset{\sim}{I}_0$的隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{I}_0}(I)$图形

这里模糊烈度的隶属函数相当于模糊烈度向量。由于预测和预报比评定更为复杂，预测和预报出恰当的模糊烈度向量是困难的，而利用式（3-9-4）所给定的隶属函数就简便得多了，因为这里只需要估定模糊基本烈度$\underset{\sim}{I}_0$的上下限$b_0$和$a_0$即可。

得出模糊基本烈度后，还要考虑建筑场地下列小区域因素的影响：

（1）局部发震断层及局部地形条件；

（2）场地土质条件；

（3）震中距。

所有这些因素都具有强烈的模糊性。其中发展断层和地形条件直接影响地震的烈度，可以根据场地具体情况修正基本烈度的上下限$b_0$和$a_0$来考虑。修正后的模糊基本烈度可称为“模糊预测烈度”。小区域因素中的场地土质条件和震中距主要影响地震时地面运动超越周期，可按我国规范在地震反应谱中予以考虑。

## 二、模糊地震反应谱

与模糊预测烈度和模糊场地条件（相当于输入）相对应，自然应得出模糊地震反应谱和结构的模糊反应（输出）。

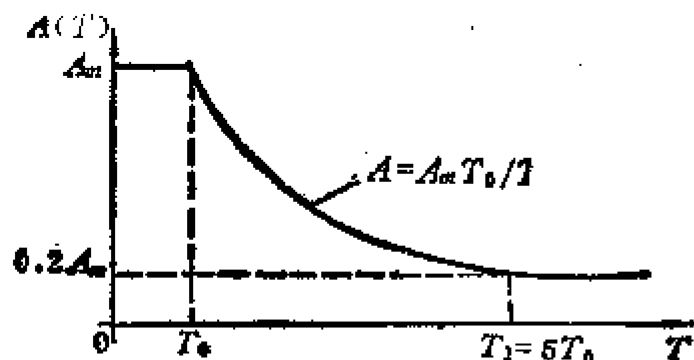


图 3-9-2　地震加速度反应谱$A(T)$

我国现行抗震结构设计规范所规定的地震加速度反应谱$A(T)$如图3-9-2所示：（以重力加速度$g$为单位，规范记为$\alpha(T)$，称为地震影响系数），其中参数$A_m$与烈度有关，而$T_0$与场地类别有关。参数$A_m$和$T_0$的数值如表3-9-1所示：

参数 $A_m$ 和 $T_0$ 的数值　　　表 3-9-1

| 地震烈度 | Ⅶ | Ⅷ | Ⅸ |
|---|---|---|---|
| $A_m$ | 0.23 | 0.45 | 0.90 |

| 场地类别 | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ |
|---|---|---|---|
| $T_0$ | 0.2 | 0.3 | 0.7 |

当把离散烈度论域转变为连续烈度论域时，参数$A_m$与地震烈度$I$间的关系为

$$A_m(I)=0.9\times 2^{(I-9)} \tag{3-9-5}$$

$$I(A_m)=\frac{\ln A_m-\ln 0.9}{\ln 2}+9=1.4427\ln A_m+9.152 \tag{3-9-6}$$

在模糊烈度情况下，根据扩张原则，把式（3-9-4）中的$I$换为式(3-9-6)中的$I(A_m)$，即得出模糊参数$A_m$的隶属函数：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_m}(A_m)=\mu_{\underset{\sim}{I}_0}(I(A_m)),\quad 即$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_m}(A_m)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\frac{1.4427\ln A_m+9.152-a_0}{b_0-a_0}-\frac{1}{2}\right)\pi+1\right] \tag{3-9-7}$$

$$A_m\in[A_{m_1},\ A_{m_2}]$$

如图3-9-3所示，其中：$A_{m_1}=0.9\times 2^{(a_0-9)}$；$A_{m_2}=0.9\times 2^{(b_0-9)}$；$A_{m_3}=0.9\times 2^{\left(\frac{a_0+b_0}{2}-9\right)}$。



图 3-9-3　参数$\underset{\sim}{A}_m$的隶属函数

参数$T_0$决定于场地类别。由于场地已经选定，所以场地类别并无随机性，但有很大的模糊性，所以$\underset{\sim}{T_0}$是一个模糊参数。

评定场地类别可以考虑的因素很多，例如土壤类别、覆盖层厚、土层结构、地下水情况、平均剪切波速、地基土容许承载力等。因而应该采用多因素综合评判的方法评定场地类别。设评定因素论域（共$m$个评定因素）为

$$U=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_i,\ \cdots,\ u_m\} \tag{3-9-8}$$

模糊因素向量：

$$\underset{\sim}{C}=[C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_i,\ \cdots,\ C_m] \tag{3-9-9}$$

场地等级论域（共$n$个等级）为

$$V=\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_j,\ \cdots,\ i_n\} \tag{3-9-10}$$

该场地评定所得模糊场地等级向量为

$$\underset{\sim}{D}=[d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_j,\ \cdots d_n] \tag{3-9-11}$$

式中：$\underset{\sim}{C_i}$为因素$u_i$对模糊因素子集$\underset{\sim}{C}$的隶属度，是代表因素$u_i$重要性的权系数；$d_j$为等级$i_j$对模糊等级$\underset{\sim}{D}$的隶属度；$\underset{\sim}{C}$和$\underset{\sim}{D}$分别为因素论域$U$和等级论域$V$上的模糊子集。最后评定结果：

$$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{C}\circ\underset{\sim}{R} \tag{3-9-12}$$

式中：$\underset{\sim}{R}$为$\underset{\sim}{C}$和$\underset{\sim}{D}$之间的模糊关系矩阵，由单因素评定结果组成。当采用“加权平均型”综合评判时，权系数向量$\underset{\sim}{C}$须满足归一化：$\sum_{i=1}^{m}C_i=1$，$C_i\in[0,\ 1]$，而式（3-9-12）右端就是普通矩阵乘法。

求出场地模糊等级$\underset{\sim}{D}$后，即可按下式决定：

$$T_0=\sum_{j=1}^{n}d_j^2 T_{0,j}\Big/\sum_{j=1}^{n}d_j^2 \tag{3-9-13}$$

式中：$T_{0,j}$为当场地等级为$v_j$时$T_0$应取值（见表3-9-1，$n=3$）。

具有模糊参数$\underset{\sim}{A_m}$和$\underset{\sim}{T_0}$的反应谱称为模糊反应谱。由于采用式（3-9-13）考虑了各种因素的综合影响，在设计中就可以取用综合评定所得非模糊量$T_0$代替模糊参数$\underset{\sim}{T_0}$，这就使得问题大为简化。

## 三、结构的模糊反应

根据现行规范，在非模糊地震荷载（确定性反应谱）输入下，结构设计方案的动力反应的最大绝对值$r_k^i(\overline{x},\ A_m)$与$A_m$具有线性关系

$$r_k^i(\overline{x},\ A_m)=D_k(\overline{x})A_m \tag{3-9-14}$$

结构动力反应$r_k^i$代表应力$\sigma$和位移$u$等物理量。式中$D_k(\overline{x})$是$A_m=1$时结构的最大反应。由于$\overline{x}$和$T_0$为已知，$D_k(\overline{x})$可以按规范规定的方法算得。

在$\underset{\sim}{A_m}$为模糊数而$T_0$已用综合评判转化为非模糊数的情况下，根据扩展原理，将式（3-9-14）中的$A_m$代入模糊参数$\underset{\sim}{A_m}$的隶属函数（3-9-7），即得模糊动力反应$\underset{\sim}{r_k^i}$（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ K$）的隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{r}_k^s}(r)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\frac{1.4427\ln(r/D_k(\overline{x}))+9.152-a_0}{b_0-a_0}-\frac{1}{2}\right)\pi+1\right]$$

$$r\in[D_k(\overline{x})A_{m_1},\ D_k(\overline{x})A_{m_2}]\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ K) \qquad (3\text{-}9\text{-}15)$$

模糊动力反应$\underset{\sim}{r}_k^s$的隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{r}_k^s}(r)$与模糊参数$\underset{\sim}{A}_m$的隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}_m}(A_m)$的图形相似，因为，二者的基础变量之间存在线性关系。

## 四、抗震结构的合理设计方法

目前我国结构设计的经济指导思想过于偏重降低结构的造价，而忽视长远经济效益，这种设计思想往往带来重大的经济损失。

合理的结构优化设计应使目标函数

$$W(\overline{x})=C(\overline{x})+E(\overline{x})\to\min \qquad (3\text{-}9\text{-}16)$$

式中：$C$为结构造价；$E$为维持费用及使用中遭受损坏带来经济损失的期望值。设防水平愈高，$C$值愈大，而$E$值愈小，反之亦然。因而利用式（3-9-16）可以求得一个最优设防水平。

损失期望$E(\overline{x})$反映了结构的重要程度。因为结构愈重要，其破坏所带来的政治和经济损失愈大。这样处理比修改烈度或修改地震荷载来考虑结构的重要性更为自然和合理。其结果是结构愈重要，最优设防水平愈高。

损失期望$E(\overline{x})$既具有强烈的随机性，又有很大的模糊性。妥善解决这个问题包含震害预测，次生灾害的估计等复杂问题。根据目前条件，我们提出如下的两层次优化设计法。第一步在目标函数中只考虑结构造价$C(\overline{x})$，进行结构模糊最小造价设计，求出一个最小造价设计点序列，其中每一个点对应着一个设防水平。第二步在目标函数中综合考虑$C(\overline{x})$和$E(\overline{x})$，求得最优设防水平及相应的一个最优设计点。

## 五、结构的最小造价模糊设计

其数学模型为：求设计向量$\overline{x}$，使结构造价模糊趋小：$\underset{\sim}{\min}C(\overline{x})$

并满足广义模糊约束：

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\sim}{r}_k(\overline{x})\subseteq\underset{\sim}{R}_k,\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ K)\\ x_i\in X_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ I)\end{array}\right\} \qquad (3\text{-}9\text{-}17)$$

式中：$K$个结构模糊反应$\underset{\sim}{r}_k$（包括动力和静力两部分）代表应力$\underset{\sim}{\sigma}$和位移$\underset{\sim}{u}$等；$I$个尺寸$x_i$；$\underset{\sim}{R}_K$和$\underset{\sim}{X}_i$分别为$\underset{\sim}{r}_K$和$x_i$的模糊允许区间。用$g_i$代表上述物理量，$\underset{\sim}{G}_j$代表它们的模糊允许区间，$M_j(g)$代表$\underset{\sim}{G}_j$的隶属函数（注意这里用$M$代替$\mu$以示区别）。模糊反应$\underset{\sim}{r}_K$的隶属函数$\mu_K(r)$图形，与其模糊许用区间$\underset{\sim}{R}_K$的隶属函数$M_K(r)$图形相对位置（图3-9-4），刻划了$\underset{\sim}{r}_K$对相应模糊约束$\underset{\sim}{\Omega}_K$(即式3-9-17中$\underset{\sim}{r}_K\subset\underset{\sim}{R}_K$）的满足程度。因而可定义模糊反应$\underset{\sim}{r}_K$对其模糊约束$\underset{\sim}{\Omega}_K$的满足度为：

$$\beta_K(\bar{x})=\int_{-\infty}^{\infty}M_K(r)\mu_K(r)\,dr\Big/\int_{-\infty}^{\infty}\mu_K(r)dr \qquad (3\text{-}9\text{-}18)$$

其中分母为$\mu_K(r)$图形所罩的面积，而分子为被$M_K(r)$为权削减了的面积。当$\mu_K$完全被$M_K(r)=1$的区间覆盖时，$\beta_K(\bar{x})=1$（图3-9-4$a$）；当$\mu_K$完全位于$M_K$之外时，$\beta_K(\bar{x})=0$（图3-9-4$c$）；当$\mu_K$与$M_K$相互干涉时，$\beta_K[\bar{x}]\in[0,1]$，（图3-9-4$b$）。这样，式(3-9-17)中的模糊约束$\underset{\sim}{r}\underset{\sim}{\subset}\underset{\sim}{R}$就是具有各种不同满足度$\beta$（$1\geqslant\beta>0$）的意义下$\underset{\sim}{r}$属于$\underset{\sim}{R}$。

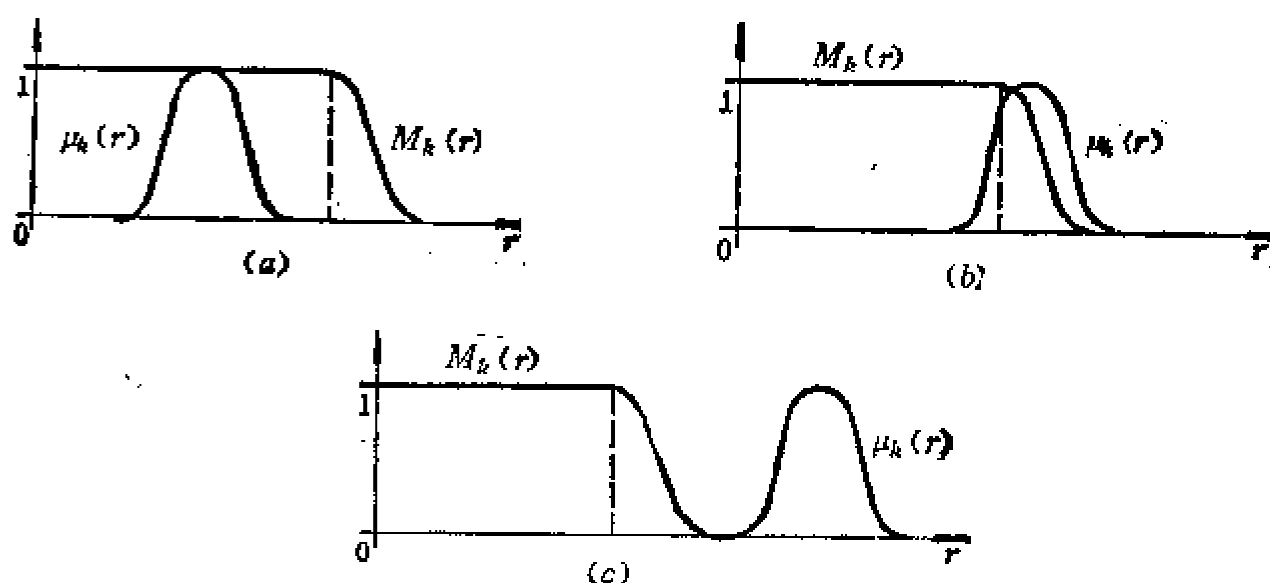


图 3-9-4 $\mu_K(r)$与$M_K(r)$图形相对位置

式(3-9-17)中的$J$个约束（$J=K+I$）在设计空间形成$J$个具有模糊边界的区域$\underset{\sim}{\Omega}_j$，它们的交

$$\underset{\sim}{\Omega}=\bigcap_{j=1}^{J}\underset{\sim}{\Omega}_j \qquad (3\text{-}9\text{-}19)$$

就是设计空间的模糊可用域。满足度$\beta_j(\bar{x})$就是设计点$\bar{x}$对$\underset{\sim}{\Omega}_j$的隶属度。这样，根据模糊子集运算规则，设计点$\bar{x}$对模糊可用域$\underset{\sim}{\Omega}$的隶属度：

就是
$$\beta(\bar{x})=\min_{i=1}^{J}\beta_i(\bar{x}) \qquad (3\text{-}9\text{-}20)$$

当$\bar{x}$在设计空间移动时，$\beta(\bar{x})$可以想象为$I+1$维空间中的超曲面。因此，利用类似于$\alpha$-水平截集解法的概念。可以把模糊规划问题转化为非模糊规划系列：

$$\left.\begin{array}{l}\text{求}\bar{x}\text{，使}C(\bar{x})\rightarrow\min\\ \text{并满足}\quad \beta_j(\bar{x})\geqslant\alpha\quad(j=1,2,\cdots,J,)\ \alpha\in[0,1]\end{array}\right\} \qquad (3\text{-}9\text{-}21)$$

$\alpha$称为设防水平，改变$\alpha$之值即得出一系列非模糊结构优化问题，从而得出一系列最小造价设计方案。

结构反应$\underset{\sim}{r}_K$的满足度$\beta_K$可按式（3-9-18）通过代换

$$r_K^*=D_K(\bar{x})A_m=0.9\times2^{(l-9)}D_K(\bar{x}) \qquad (3\text{-}9\text{-}22)$$

和分段积分求出。

当反应$r_K(\bar{x})$为非模糊量时，$\mu_K(r)$转化为当$r=r_K$时，$\mu_K=1$，其它情况下$\mu_K=0$。严格说来，这时式（3-9-18）中的积分失去意义，但作为极限，可定义：

$$\beta_K(\bar{x})=M_K(r_K(\bar{x})) \qquad (3\text{-}9\text{-}23)$$

这时满足度的概念和§3-8定义的满足度完全相同。

尺寸$x_i$（$i=1,2,\cdots,I$）均为非模糊量，其满足度也具有上式所示的性质。因此，当结构反应均为非模糊量时，式（3-9-21）转化为：

$$\left.\begin{array}{l}\text{求}\bar{x}\text{，使目标函数}C(\bar{x})\to\min\\ \text{并满足}\quad \beta_j=M_j(g_j)\geqslant\alpha\ (\ j=1,2,\cdots,J\ ,)\ \alpha\in[0,1]\end{array}\right\}\tag{3-9-24}$$

这就是§3-8中式（3-8-18）所表示的$\alpha$截集解法的数学模型。因此这里所提方法是$\alpha$截集解法的扩大，后者是前者的特例。其物理含义都是针对不同的设防水平，赋予不同的非模糊可用域$\Omega_\alpha$，在$\Omega_\alpha$中搜索最优点，得出一系列具有不同$\alpha$的最优点$\bar{x}^*(\alpha)$，构成原模糊规划的解。

**例 3-9-1** 仍以§3-8中例3-8-3所用二层剪切型刚架为例。按我国现行规范的地震反应计算方法对它进行模糊抗震设计。本题只作最小造价模糊设计，结构系数取 $C=0.35$。

模糊预测烈度的支集取为$[a_0,b_0]=[$Ⅶ，Ⅷ$]$。模糊场地等级向量为$\underset{\sim}{D}=[0.26,0.85,0.15]$。

柱的最大压应力$\underset{\sim}{\sigma}_1$，$\underset{\sim}{\sigma}_2$，楼层对地面的相对位移$\underset{\sim}{u}_1$，$\underset{\sim}{u}_2$，层间位移$\underset{\sim}{u}_3=|\underset{\sim}{u}_1-\underset{\sim}{u}_2|$，以及柱截面积$A_1$，$A_2$的模糊允许区间如图（3-9-5）所示，求最小造价（柱子）设计。

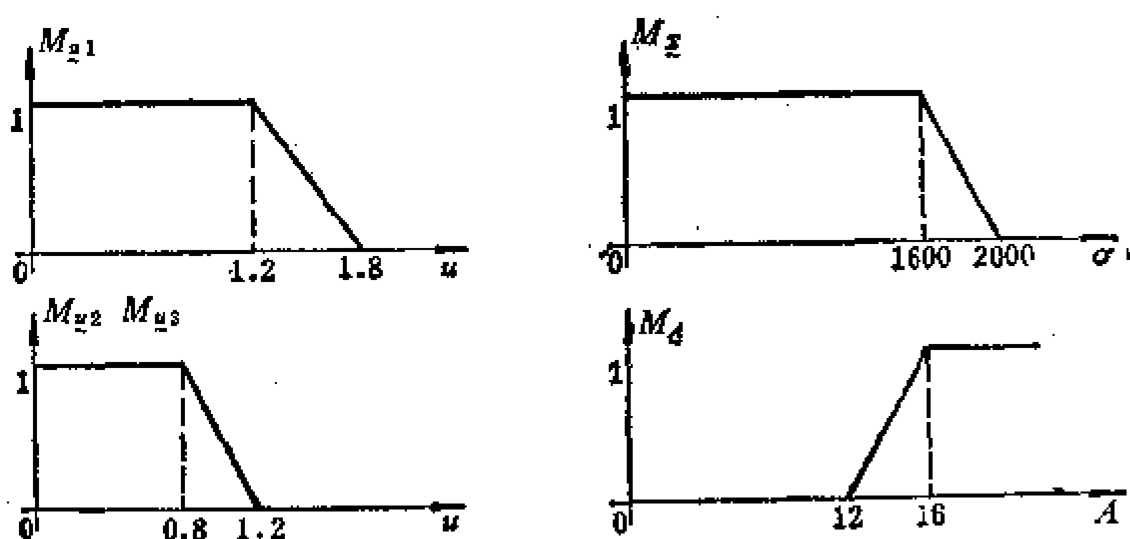



图 3-9-5 $\underset{\sim}{\Sigma}$，$\underset{\sim}{u}$，$\underset{\sim}{A}$的隶属函数

**解**：根据综合评定所给模糊场地等级向量$\underset{\sim}{D}$，利用式（3-9-13）可得设计所用的$T_0$为

$$T_0=\frac{(0.26)^2\times0.2+(0.85)^2\times0.3+(0.15)^2\times0.7}{(0.26)^2+(0.85)^2+(0.15)^2}=0.30$$

根据所给预测烈度上下限$b_0=8$，$a_0=7$，代入（3-9-15）式可得各结构反应隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{r}_K}(r)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2.8854\ln\left(\frac{r}{D_K(\bar{x})}\right)+3.804\right)\pi+1\right]\tag{a}$$

$$r\in[0,225D_K(\bar{x}),\ 0.45D_K(\bar{x})]$$

式中：$D_K(\bar{x})$为$A_m=1$和$T_0=0.30$秒时结构的最大反应$r_K$。上式的图形见图3-9-6。由于$A_m=1$，$T_0=0.30$，当设计方案$\bar{x}$给出后，各$D(\bar{x})$均为已知常数。

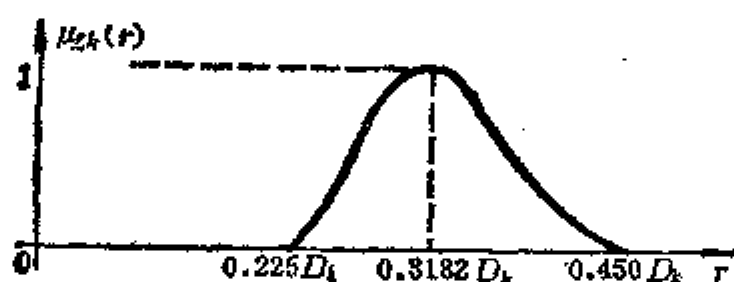



图 3-9-6 $r_K$的隶属函数

令$r_1=u_1$，$r_2=u_2$，$r_3=u_3$，$r_4=\sigma_1$，$r_5=\sigma_2$，非模糊规划（3-9-21）即转化为：

$$\left.\begin{aligned}&求\bar{x}=(A_1,A_2)\quad 使A_1+A_2\to\min\\&并满足\quad \beta_K(\bar{x})\geqslant\alpha\ (k=1,2,\cdots,5)\\&\qquad A_i\geqslant 12+4\alpha\quad(i=1,2)\quad \alpha\in[0,1]\end{aligned}\right\}\qquad (b)$$

对试算的设计方案$\bar{x}$求出$A_m=1$时各反应的最大值$D_K(k=1,2,\cdots,5)$，利用式（3-9-18）计算各满足度$\beta_K$，即可用一般方法解此非模糊规划。

给出不同的$\alpha$，得最小造价设计点集如表（3-9-2）和图3-9-7所示，当$\alpha=0.6$时，$T_1=2\pi/\omega_1=0.3$对应反应谱的尖点，因此，图中曲线在$\alpha=0.6$处有一尖点，且右段平缓，左段陡。$\alpha$从0变至1，$C^*(\alpha)$加倍。

不同$\alpha$的最小造价设计点集　表 3-9-2

| $\alpha$ | $A_1^*(\alpha)$ | $A_2^*(\alpha)$ | $C^*(\alpha)$ |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 19.8 | 31.9 | 51.7 |
| 0.1 | 24.2 | 37.8 | 62.0 |
| 0.2 | 27.4 | 42.8 | 70.2 |
| 0.3 | 30.9 | 48.3 | 79.2 |
| 0.4 | 35.3 | 54.3 | 89.6 |
| 0.5 | 39.6 | 61.1 | 100.7 |
| 0.6 | 43.3 | 66.9 | 110.2 |
| 0.7 | 45.1 | 69.1 | 114.2 |
| 0.8 | 46.9 | 72.1 | 119.0 |
| 0.9 | 48.7 | 74.9 | 123.6 |
| 1.0 | 50.2 | 77.8 | 128.0 |

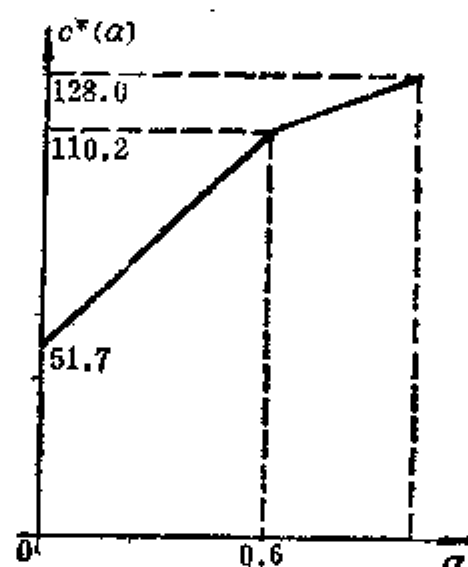


图 3-9-7　不同$\alpha$的最小造价设计点集

## 六、最优设防水平及结构最优设计

在抗震结构模糊优化设计的第二步中，除考虑初始造价外，还要考虑结构的维持费用和未来若干年遭受震害时损失的期望值，即式（3-9-16）中的第二项$E(\bar{x})$。其中包括整个结构和内部设备的破坏所造成的损失，以及结构因破坏而停止使用所引起的损失和修复费用。它还可以与结构的政治重要性联系起来（折合成经济形式）。由于建筑物的破坏程度直接与其结构变形和强度的大小有关，因而是设计向量的函数，最终是设防水平的函数，一般说来$\alpha$愈大$E$愈小，反之亦然。这与结构原始造价$C$和$\alpha$间的关系正好相反。

这样，寻求最优设防水平$\alpha^*$的数学模型为

$$求\alpha\in[0,1]，使W(\alpha)=C(\alpha)+E(\alpha)\to\min \qquad (3\text{-}9\text{-}25)$$

这是一个单变量函数求极值问题，可以很容易地通过一维搜索求解。

但最大的困难在于如何建立函数$E(\alpha)$，它与结构破坏预测和结构使用目的及其破坏带来的次生灾害有关，是个值得认真研究的问题。但在这个问题没有很好解决之前，可以根据结构的重要性粗糙地给出函数$E(\alpha)$，不管如何粗糙，与不考虑后果相比，总是一个很大的进步。

**例 3-9-2**　仍以例3-9-1所给二层剪切型刚架为例。例3-9-1求出的最小造价（或与造价成正比的某种参数）可近似地表示为：

$$C(\alpha)=\begin{cases}97.5\alpha+51.7 & (\alpha\leqslant 0.6)\\ 44.5\alpha+83.5 & (\alpha\geqslant 0.6)\end{cases}$$

损失期望$E(\alpha)$可按结构重要性拟定。例如若结构不太重要，取

$$E_1(\alpha)=100\exp(-2\alpha-0.3)$$

若结构较重要，取

$$E_2(\alpha)=200\exp(-3\alpha)$$

将$C(\alpha)$分别与$E_1(\alpha)$和$E_2(\alpha)$代入式（3-9-25），容易求得（参阅图3-9-8）：对比例结构不重要时的最优设防水平为$\alpha_1^*=0.21$，结构重要时$\alpha_2^*=0.87$。其他数据见表3-9 3。

**最优设防水平数据** 表3-9-3

| $\alpha_1^*$ | $A_1^*(\alpha_1^*)$ | $A_2^*(\alpha_1^*)$ | $C_1^*(\alpha_1^*)$ | $E_1(\alpha_1^*)$ | $W_1(\alpha_1^*)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.21 | 28.3 | 43.8 | 72.2 | 48.7 | 120.9 |

| $\alpha_2^*$ | $A_1^*(\alpha_2^*)$ | $A_2^*(\alpha_2^*)$ | $C^*(\alpha_2^*)$ | $E_2(\alpha_2^*)$ | $W_2(\alpha_2^*)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.87 | 48.2 | 74.0 | 122.2 | 14.7 | 136.9 |

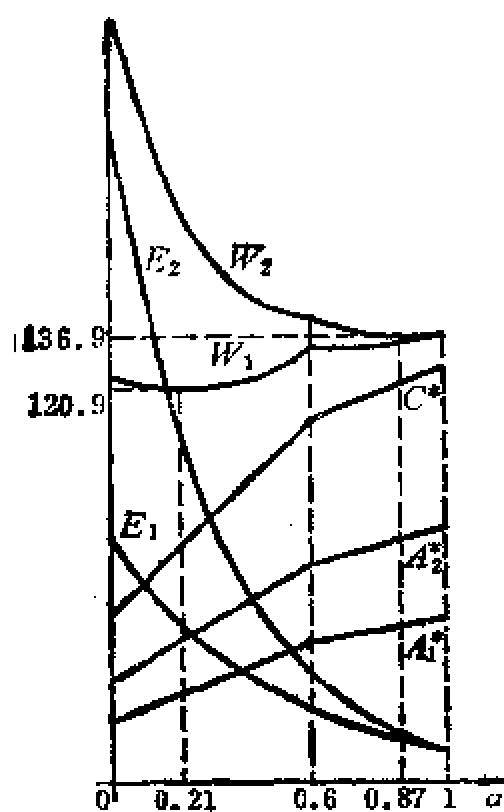



图 3-9-8 最优设防水平解

## 七、结 语

（1）这里提出的基于模糊满足度的模糊规划解法，是现有$\alpha$-水平截集解法的扩大，可以解决模糊约束函数及其取值的模糊允许范围的数学规划问题。$\alpha$-水平截集解法只是本法的特例。

（2）这里提出的利用综合考虑结构初始造价$C$和损失期望$E$以寻求最优水平的$\alpha^*$的方法。可以充分考虑结构的重要性。分别求出次要结构得较小的$\alpha^*$，重要结构得出较大的$\alpha^*$，这显然是合理的。

（3）利用结构模糊优化设计方法比常规设计方法虽在计算上要复杂得多，但此法不仅更合理，而且会带来相当的经济效益。随着电子计算机功能的扩大，计算工作量大的困难可以克服。

# 第四章

# 模糊数学在水电、交通、化纤、材料、机械等工程技术科学中的应用

水利、电力、环境工程、交通、化纤、材料、机械等工程技术科学，大都是复杂的工程技术大系统，其中有些大系统常具有内部结构复杂，功能综合，涉及因素众多，影响范围广泛，后果影响重大、深远、且难以预测和估价，建设周期长，投资大等特点，这就使这些工程建设的决策研究既非常必要和重要，又极其复杂和困难。这些工程建设的决策研究是一个自然、社会、经济、工程相结合的复杂大系统的评价分析和多方面决策人员参加的多目标的决策优化问题。其总要求是达到经济效益、社会效益和环境效益的综合的满意的目标。

在这些工程技术科学中应用了模糊多目标决策方法、模糊综合评价方法、模糊聚类分析方法、模糊积分方法、灰色系统理论与方法。特别是水利、电力、环境工程中应用系统工程分法、模糊数学理论与方法、计算机技术相结合的现代化的科学方法，取得了很有理论和应用价值的科学成果，获得了显著的经济效益、社会效益和环境效益。

灰色系统理论与方法、计算机技术在工业系统中的应用，得出了具有切合实际的，科学的可靠的结果。

可以预料：在各种工程技术科学中应用系统工程、模糊数学理论、灰色系统理论、计算机技术相结合的现代科学方法，将是重要的发展趋势。

## §4-1 水电站建设方案优化的多目标模糊决策[54]

1985年，汪培庄、张大志应用模糊集合理论的程度分析方法和多目标模糊决策方法，建立了多目标决策的程度分析模型，并把该模型应用于某水电站建造方案的抉择，取得了满意的经济效果和社会效果。

### 一、问题的提出

要在某条河流上建造一座水电站，经系统分析和商讨，初步提出了四个方案，分别记为$A_1$、$A_2$、$A_3$和$A_4$。由于水电站建设是一个复杂的社会、技术经济系统工程，是一个多因素、多目标的决策优化问题，我们的任务是要从这四个方案中选取一个最优方案，以获得满意的经济效果和社会效果。

### 二、程度分析方法和程度分析模型

在现实世界中，大量存在着这样一类估计——要对某事物从某种角度估计或评价出它

对某项目标或要求所满足的程度，人们经常使用“满意程度”、“可靠程度”、“协调程度”、“可行程度”、“稳定程度”、“需求程度”、“置信程度”、“实用程度”等等模糊概念和术语。人们需要对它们进行度量，而又很难找到客观而有效的处理方法。模糊集合理论的集值统计为此提供了一种数学方法，叫做程度分析方法。

程度分析方法的思路大致是：在决策过程中，如果被估计的程度必须依赖心理测量，则请有经验的、有代表性的专家或人员，按照心理测量的基本要求进行试验。试验方法主要有线段法、置信法、表格法、多级表格法等。这些方法的关键是模糊集值统计。程度分析的任务是要在几种相互矛盾的目标或因素之间进行综合评判和决策。为了简便起见，我们以两个因素（可行性和必要性）为例来说明程度分析的基本思想。

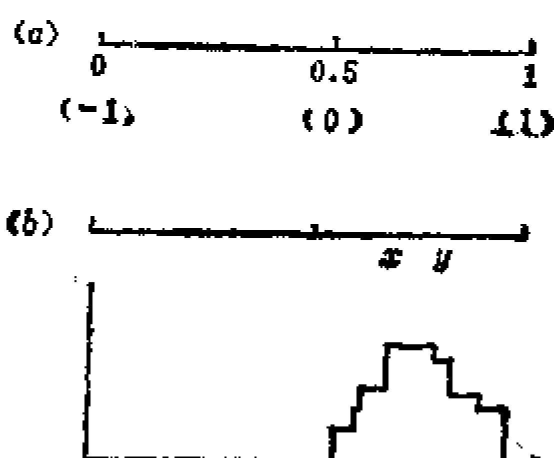


图 4-1-1　线段法统计

设有某项工程，已经提出几种方案。要从必要性与可行性这两方面进行综合考察，作出抉择。程度分析方法如下：

1.对各种方案就其必要性程度与可行性程度进行统计。采用线段法，如图4-1-1所示，让两线段垂直安放，组成正方形。即[0.1]×[0.1]论域。每一人次的试验在横轴上得区间$[x_1, y_1]$，在纵轴上得区间$[x_2, y_2]$。在方格中得矩形$[x_1, x_2; y_1, y_2]$。$n$次试验得到：$[x_1^{(K)}, x_2^{(K)}; y_1^{(K)}, y_2^{(K)}]$，$(K=1,\cdots,n)$。

按落影公式：

$$\bar{x}(u)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{x_i}(u) \qquad (4\text{-}1\text{-}1)$$

求得

$$\bar{x}(u,v)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x[x_1^{(K)}, x_2^{(K)}; y_1^{(K)}, y_2^{(K)}]^{(u,v)} \qquad (4\text{-}1\text{-}2)$$

这里，$(u,v)$是方格中的任意一点，特征函数：

$$X[x_1^{(K)}, x_2^{(K)}; y_1^{(K)}, y_2^{(K)}]^{(u,v)}=\begin{cases}1 & \begin{cases}x_1^{(K)}\leqslant u\leqslant y_1^{(K)}\\ x_1^{(K)}\leqslant v\leqslant y_2^{(K)}\end{cases}\\ 0 & \text{否则}\end{cases} \qquad (4\text{-}1\text{-}3)$$

2.根据必要性与可行性二者的权重分配计算

$$t=\int_0^1\int_0^1[W_1(u,v)\circ u+W_2(u,v)\circ v]\circ\bar{x}(u,v)du,dv\Big/\int_0^1\int_0^1\bar{x}(u,v)du,dv \qquad (4\text{-}1\text{-}4)$$

$t$称为必要与可行的综合程度。比较不同方案的$t$值。取$t$值最大者为最优方案。

这里采取的是变权。即必要性和可行性的权系数$W_1(u,v)$，$W_2(u,v)$要依赖于$(u,v)$。$[W_1(u,v)\geqslant 0,\ W_2(u,v)\geqslant 0,\ W_1(u,v)+W_2(u,v)=1]$。采取变权的理由在于：对于某一个方案，当某个必须考虑的因素处于最低的水平时，即使别的因素水平再高，我们也不会对它加以考虑。这时，处于高水平的因素的权重是很低的。也就是说，权重的分配应该随着各因素水平组态的不同而有所不同。比如，某方案的可行性程度非常低时，不管它多么必要，我们也不会选择它，在采用常权数分配进行综合决策时，

在这点上就相对地比较容易犯错误。

变权函数的确定可以通过心理试验得到与图4-1-2中所绘的相类似的“矢量场”。矢量的斜率表示$W_2$与$W_1$之比。由此再建立$W_1$与$W_2$的表达式。例如，图4-1-2所对应的表达式可取为：

$$\left.\begin{aligned} W_1(u,v) &= \frac{v}{u+v} \\ W_2(u,v) &= \frac{u}{u+v} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}1\text{-}5)$$

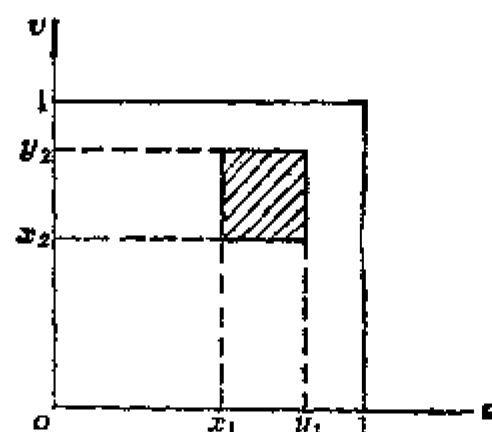


图 4-1-2 “矢量场”

以下我们给出变权的一个经验公式，它可以将已知的常权修改为变权：

假定常权之比为$W_2 : W_1 = \lambda$，则变权公式为：

$$\left.\begin{aligned} W_1(\alpha,\beta) &= \frac{\beta}{\lambda\alpha+\beta} \\ W_2(\alpha,\beta) &= \frac{\lambda\alpha}{\lambda\alpha+\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}1\text{-}6)$$

这个变权公式基本上反映了这么一条经验性的规律：当一个因素处于低水平时，它的权值就要加重。这对于必要性和可行性的综合考虑基本上是适用的。若采用它，则公式(4-1-4)就变成了：

$$t = \int_0^1\int_0^1 \frac{(1+\lambda)uv}{\lambda u+v}\bar{x}(u,v)du,dv \Big/ \int_0^1\int_0^1 \bar{x}(u,v)du,dv \qquad (4\text{-}1\text{-}7)$$

模型(4-1-7)的(BASIC)计算程序给出如下：

```
10  INPUT "NUMBER OF PARTICIPANTS", N
20  DIM L(2,N), R(2,N)
30  FOR I=1  TO 2
40  FOR J=1  TO N
50  PRINI "COORDINATE" ;I; ; INPUT "LEFT",
    L(I, J); INPUT "RIGHT" ;R(I, J)
60  NEXT  J
70  NEXT  I
80  PRINT "INPUT CONSTANT WEIGHTS"
90  FOR I=1  TO 2
100 PRINT "WEIGHT" ;I;INPUT W(I).
110 NEXT  I
120 E=W(2)/W(1)
130 FOR I=1 TO N
140 FOR U=L(1,I) TO R(1,I) STEP. 01
150 FOR V=L(2,I) TO R(2,I) STEP. 01
160 T=(1+E)*U*V/(E+U+V)-T-0.0001
170 NEXT V
```

```
180 NEXT U
190 S=(R(1,I)-L(1,I))*(R(2,I)-L(2,I))+S
200 NEXT I
210 T=T/S
220 PRINT "SYNTHETIC DEGREE=";T
```

关于任意$r$个因素的变权$w_1(a_1, \cdots, a_r), \cdots\cdots, w_r(a_1, \cdots, a_r)$可以确定如下：

首先确定两两因素的变权比$\mu_{ij}(a_i, a_j)$，$i, j=1, 2, \cdots, r$（$\mu_{ij}$表示因素$i$与$j$的权重比）。

其次我们使得$w_i(a_1, \cdots, a_r)$，$(i=1, \cdots, r)$，满足以下关系：

$$\frac{w_i(a_1, \cdots, a_r)}{w_j(a_1, \cdots, a_r)} \equiv \mu_{ij}(a_i - a_j) \qquad (4\text{-}1\text{-}8)$$

结合关系：

$$\bigvee_{i=1}^{r} w_i(a_1, \cdots, a_r) \equiv 1 \qquad (4\text{-}1\text{-}9)$$

我们得到线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l} W_1 - \mu_{11} W_1 = 0 \\ W_2 - \mu_{12} W_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_r - \mu_{1r} W_r = 0 \\ W_1 + W_2 + \cdots + W_r = 0 \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}1\text{-}10)$$

在自然的假定

$$\left.\begin{array}{l} ①\mu_{ij} > 0,\ \mu_{ij} = 1 \\ ②\mu_{ij} = 1/\mu_{ij} \\ ③\mu_{ij} = \mu_{ij} \cdot \mu_{kj} \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}1\text{-}11)$$

$$(i, j, k = 1, \cdots, r)$$

之下，可以证明线性方程组（4-1-10）的系数矩阵与增广矩阵有相同的秩，且都是$r$。于是它有唯一解。通过计算，我们得到：

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = \mu_{1r} \circ 1/1 + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_{ir} \\ W_2 = \mu_{2r} \circ 1/1 + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_{ir} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{r-1} = \mu_{(r-1)r} \circ 1/1 + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_{ir} \\ W_r = 1/1 + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_{ir} \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}1\text{-}12)$$

这组解是依赖于$(a_1, \cdots, a_r)$的。它就是参考了诸因素的变权分配。

【注 1】 两两因素的变权比可以确定如下：

先给出两两因素的常权比。用$\lambda_{ij}$记因素$i$与因素$j$的常权比。利用公式（4-1-6）把它修改为变权：

$$W_i(a_i, a_j) = \frac{\lambda_{ij} a_j}{\lambda_{ij} a_j + a_i}$$

$$W_j(\alpha_i,\alpha_j)=\frac{\alpha_i}{\lambda_{ij}\alpha_j+\alpha_i} \quad (4\text{-}1\text{-}13)$$

从而得到变权比

$$\mu_{ij}(\alpha_i,\alpha_j)=\lambda_{ij}\frac{\alpha_j}{\alpha_i} \quad (4\text{-}1\text{-}14)$$

很易证明，若$\lambda_{ij}$（$i$，$j=1$，…，$r$）满足（4-1-11）。则$\mu_{ij}$亦满足（4-1-11）。于是可得到形如（4-1-12）的解。

另外，两两因素的变权比也可以通过专家进行评定。

【注 2】 如果我们可以直接得到诸$r$因素的一组常权分配，则（4-1-11）当然是满足的。以下介绍的一种确定多因素常权分配的方法，实质上也是来源于程度分析的思想。

给出$r$个因素$G_1$，…，$G_r$，我们请一些专家回答“哪一个因素最重要？这样一个问题。要专家给出一个确切的回答是困难的。不过，他可以较容易地给出几个他认为较重要的因素（因而这是一种集值统计）。每一人次的回答结果是形如$\{G_{j1}, \cdots, G_{js}\}$，$\{G_1, \cdots, G_r\}$的一个集合。$n$人次试验得到样本：$P_j=\{G_{j1}, \cdots, G_{jk_j}\}$，$j=1$，…，$n$。

统计每个因素的覆盖频率

$$m(G_i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{P_j}(G_i) \quad (4\text{-}1\text{-}15)$$

其中$X$是特征函数。通过规一化，得到：

$$W_i\triangleq W(G_i)\triangleq m(G_i), \qquad \sum_{i=1}^{n}m(G_i),\ (i=1\cdots,\ r) \quad (4\text{-}1\text{-}16)$$

可取$W_i$（$i=1$，…，$r$）作为因素$G_1$，…，$G_r$的一组常权分配。

在得到了多个因素的变权之后，可以将公式（4-1-7）作如下自然的推广：

$$t=\frac{\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{r\text{个}}(\sum W_i(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_r)d_i\overline{X}(\alpha_1,\cdots,\ \alpha_r)d\alpha_1\cdots d\alpha_r}{\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{r\text{个}}X(\alpha_1\cdots\alpha_r)d\alpha_1\cdots d\alpha_r} \quad (4\text{-}1\text{-}17)$$

其中$X$（$\alpha_1$，…，$\alpha_r$）的意义与二维情况相类似。

公式（4-1-17）就是多目标决策的程度分析模型。

## 三、水电站建造方案的优化决择

1.必要性与可行性程度的综合

对于一个方案，我们抽象地从两个方面，即必要性程度与可行性程度方面来衡量。使这两个因素达到最高水平的方案为最优方案。具体作法是：

发给每位专家一张形如表（4-1-1）的表格，请他们用线段法对每一个方案的必要性与可行性程度进行评定。我们得到了26张有效数据，整理后如表4-1-2所示。

利用前面给出的计算程序，我们得到各方案的必要可行综合程度分别为（取常权比$\lambda=1$）：

$$t(A_1)=0.49,\quad t(A_2)=0.53$$
$$t(A_3)=0.55,\quad t(A_4)=0.42$$

于是，我们取方案$A_3$为最优方案。

**专家线段法评定调查表**　　　　　　　　　　　　表 4-1-1

| | 必要性 | | | 可行性 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 方案$A_1$ | 0<br>（很不必要） | （中常） | 1<br>（很必要） | 0<br>（很不可行） | （中常） | 1<br>（很可行） |
| 方案$A_2$ | 0 | | 1 | 0 | | 1 |
| 方案$A_3$ | 0 | | 1 | 0 | | 1 |
| 方案$A_4$ | 0 | | 1 | 0 | | 1 |

**专家评定调查数据整理**　　　　　　　　　　　　表 4-1-2

| 方案 $A_1$ | | 方案 $A_2$ | | 方案 $A_3$ | | 方案 $A_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 必要性 | 可行性 | 必要性 | 可行性 | 必要性 | 可行性 | 必要性 | 可行性 |
| [.3, .5] | [.8, .9] | [.4, .5] | [.7, .8] | [.6, .7] | [.7, .8] | [.8, .9] | [.2, .3] |
| [.3, .4] | [.8, .9] | [.5, .8] | [.7, .8] | [.5, .9] | [.5, .9] | [.6, .8] | [.4, .6] |
| [.4, .6] | [.7, .8] | [.4, .7] | [.5, .8] | [.6, .8] | [.2, .4] | [.7, .8] | [.0, .3] |
| [.6, .8] | [.6, .8] | [.5, .7] | [.3, .8] | [.4, .8] | [.5, .7] | [.7, .9] | [.0, .2] |
| [.5, .8] | [.6, .8] | [.5, .7] | [.2, .3] | [.3, .6] | [.2, .5] | [.7, .8] | [.3, .6] |
| [.3, .5] | [.8, .9] | [.5, .7] | [.6, .8] | [.6, .9] | [.0, .4] | [.7, .9] | [.8, .9] |
| [.6, .7] | [.4, .6] | [.6, .8] | [.3, .4] | [.6, .7] | [.3, .7] | [.4, .8] | [.7, .8] |
| [.2, .4] | [.3, .8] | [.8, .9] | [.7, .1] | [.6, .7] | [.6, .7] | [.3, .5] | [.0, .1] |
| [.2, .3] | [.6, .9] | [.3, .6] | [.3, .6] | [.5, .7] | [.4, .6] | [.2, .9] | [.2, .4] |
| [.4, .5] | [.5, .8] | [.4, .6] | [.2, .4] | [.6, .7] | [.4, .6] | [.7, .9] | [.1, .2] |
| [.3, .4] | [.8, .1] | [.4, .6] | [.7, .8] | [.6, .7] | [.4, .6] | [.5, .6] | [.0, .2] |
| [.4, .5] | [.8, .9] | [.4, .7] | [.6, .7] | [.8, .9] | [.4, .6] | [.7, .8] | [.1, .2] |
| [.5, .8] | [.6, .9] | [.5, .6] | [.6, .7] | [.4, .7] | [.2, .8] | [.8, .9] | [.1, .2] |
| [.7, .8] | [.6, .8] | [.4, .6] | [.6, .7] | [.6, .9] | [.7, .8] | [.8, .9] | [.1, .3] |
| [.3, .4] | [.6, .8] | [.4, .8] | [.6, .7] | [.3, .5] | [.6, .8] | [.8, .9] | [.0, .1] |
| [.3, .4] | [.9, .1] | [.7, .8] | [.8, .9] | [.4, .7] | [.8, .1] | [.7, .1] | [.2, .6] |
| [.4, .7] | [.8, .9] | [.2, .4] | [.6, .9] | [.7, .8] | [.2, .6] | [.8, .1] | [.1, .9] |
| [.1, .4] | [.4, .7] | [.3, .6] | [.2, .6] | [.6, .8] | [.5, .7] | [.8, .9] | [.5, .7] |
| [.1, .4] | [.6, .8] | [.6, .7] | [.0, .3] | [.6, .9] | [.4, .5] | [.5, .9] | [.2, .5] |
| [.0, .3] | [.6, .9] | [.6, .8] | [.6, .7] | [.7, .9] | [.4, .5] | [.5, .7] | [.1, .3] |
| [.5, .6] | [.7, .1] | [.4, .5] | [.6, .9] | [.2, .6] | [.6, .7] | [.7, .8] | [.0, .3] |
| [.3, .4] | [.7, .9] | [.5, .6] | [.5, .8] | [.6, .8] | [.5, .6] | [.8, .9] | [.2, .3] |
| [.3, .5] | [.8, .9] | [.5, .6] | [.5, .7] | [.8, .9] | [.5, .6] | [.9, .1] | [.0, .2] |
| [.2, .6] | [.4, .7] | [.5, .9] | [.7, .8] | [.7, .8] | [.5, .6] | [.5, .8] | [.1, .3] |
| [.3, .4] | [.6, .8] | [.3, .5] | [.7, .9] | [.5, .6] | [.2, .4] | [.6, .8] | [.0, .3] |
| [.3, .4] | [.4, .8] | [.0, .4] | [.5, .7] | [.6, .8] | [.8, .9] | [.8, .9] | [.1, .3] |

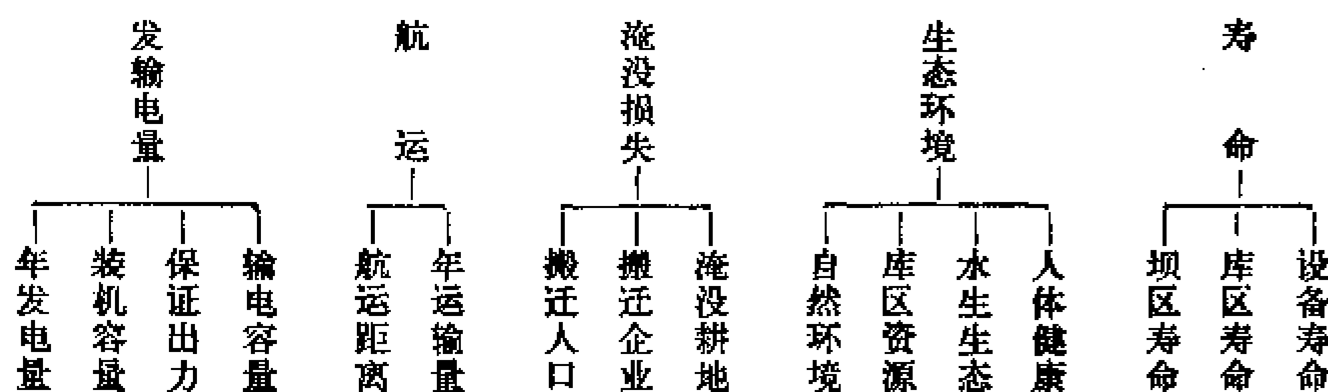
2.多目标综合决策

现在我们从另一角度来讨论。衡量一个水电站设置方案是否最优，可以从以下九个方面加以考虑：（1）发输电量；（2）航运；（3）防洪；（4）淹没损失；（5）生态

环境；（6）寿命；（7）旅游；（8）灌溉；（9）投资。

对于不同的方案，以上指标一般地有所不同。若两个方案对应着不同的坝高，则比较高的坝的发电量、防洪能力、灌溉能力等就比较强，而造成的淹没损失就比较大，对于生态环境的影响比较大，投资也要增加。由于以上九个指标的量纲都不一样，以下我们把它们统一到满意性程度上来，这样也便于应用给出的程度分析模型。我们以人对于方案的满意性程度为尺度，取对于所述的九个指标具有综合意义上的最高满意性程度的方案为最优方案。

有时专家在比较诸方案而给出对于每一个目标的满意性程度时，仍有一定的困难。这就需要对指标作进一步分解，比如：




然后我们请专家对于这些子目标进行评定。其次我们把对于子目标的满意性程度综合为对于原始目标的满意性程度。其方法是作区间数的平均运算。例如，某一专家对于生态环境的四个子目标进行评定的结果分别为：

$$[0.4,\ 0.6];\ [0.5,\ 0.6];\ [0.2,\ 0.8];\ [0.7,\ 0.9]$$

则我们取

$$\left[\frac{1}{4}\left(0.4+0.5+0.2+0.7\right),\ \frac{1}{4}\left(0.6+0.6+0.8+0.9\right)\right]=[0.45,\ 0.725]$$

作为这位专家对原始目标“生态环境”的评定结果。如果必要的话，也可以根据各子目标的重要性程度作加权平均。一般地，$n$个区间数$[a_i,\ b_i]$，（$i=1,\ \cdots,\ n$）关于权数分配$W_i$（$i=1,\ \cdots,\ n$）的平均定义为：

$$\sum_{i=1}^{n} W_i[a_i,\ b_i] \triangleq \{x \mid \exists c_i,\ a_i \leqslant c_i \leqslant b_i,\ x=\sum_{i=1}^{n} W_i c_i\}$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{n} W_i a_i,\ \sum_{i=1}^{n} W_i b_i\right]$$

另外，也可以从随机性的角度对于原始目标进行分解。以防洪为例，考察基本事件空间$\Omega=\{E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4\}$，其中$E_1$、$E_2$、$E_3$以及$E_4$分别表示在指定的时期内“没有造成威胁的洪水”，“有十年一遇的洪水”，“有百年一遇的洪水”，以及“有千年一遇的洪水”。根据气象部门提供的资料，我们知道这四个事件的概率分别为：

$$P(E_1)=0.30;\ P(E_2)=0.54;\ P(E_3)=0.15;\ P(E_4)=0.01$$

我们请专家对每一方案就目标“防洪”作以下的满意性评定：

如果在指定的时期没有出现构成威胁的洪水，那么该方案的满意性程度是多少？即如果事件$E_1$发生，则满意性程度为多少？同样还要回答如果$E_i$（$i=2,\ 3,\ 4$）发生，满意性程度有多少？设某专家的评定结果为：

$$[0.2,\ 0.3];\ [0.4,\ 0.6];\ [0.8,\ 0.9];\ [0.5,\ 0.6]$$

则我们取期望区间数：

$$\sum_{i=1}^{n} P(E_i)[a_i,\ b_i] = \left[\sum_{i=1}^{n} P(E_i)a_i,\quad \sum_{i=1}^{n} P(E_i)b_i\right]$$

$$= [0.30\times0.2+0.54\times0.4+0.15\times0.8+0.01\times0.5,$$
$$0.30\times0.3+0.54\times0.6+0.15\times0.9+0.01\times0.6]$$
$$= [0.401,\ 0.555]$$

作为该专家就原始目标"防洪"而言的满意程度。

这样就得到了四个方案分别对于九个目标的满意程度的统计数据。从而对每一个方案按落影公式可得$\overline{x}(a_1,\ \cdots,\ a_9)$。

**专 家 调 查 表** 表 4-1-3

| $A$发输电 | $B$ 航 运 | $C$ 防 洪 | $D$淹没损失 | $E$生态环境 | $F$ 寿 命 | $G$ 旅 游 | $H$ 灌 溉 | $I$ 投 资 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

**专 家 评 定 调 查 结 果 表** 表 4-1-4

| $i$ 专 家 | 目 | | | | | | | 标 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ | $I$ |
| 1 | • | • | | | | | | | • |
| 2 | • | | • | | | | | | |
| 3 | • | • | • | | • | | | | • |
| 4 | • | • | | • | | | • | | |
| 5 | • | | • | | | | | • | |
| 6 | • | • | • | • | • | | | | |
| 7 | • | • | | | | • | | • | • |
| 8 | | • | • | | | | | | |
| 9 | • | | | | • | | | | |
| 10 | • | • | • | | | • | | • | |
| 11 | • | | | • | | | | | • |
| 12 | • | • | • | | | | | | |
| 13 | • | • | | • | • | | | • | |
| 14 | • | • | • | • | | | | | |
| 15 | • | | • | | | • | • | | • |
| 16 | • | • | | • | • | | | | |
| 17 | • | | | • | • | | | • | |
| 18 | | • | | | | | | • | |
| 19 | • | | • | | | • | | | |
| 20 | • | • | • | | | | • | | • |
| 21 | | | | • | • | | | • | |
| 22 | • | • | • | | | | | | |
| 23 | • | • | • | | | | | | • |
| 24 | • | • | | • | • | | | | |
| 25 | • | | • | | • | • | | | |
| 26 | • | • | | • | | | | • | • |

下一步是关于权重的确定。我们采取了[注 2]中提到的方法，即仍然是专家调查法。发给每位专家一张形如表4-1-3的表格。请每位专家在他认为“重要”的那个目标下面打上一个“*”号，由此我们得到了数据表（表4-1-4）。

通过计算（利用落影公式（4-1-15））得到：

$m(A)=0.885$；$m(B)=0.654$；$m(C)=0.538$；$m(D)=0.385$；$m(E)=0.346$

$m(F)=0.192$；$m(G)=0.115$；$m(H)=0.269$；$m(I)=0.308$。

于是规一化之后得到常权数分配：

$w(A)=0.24$；$w(B)=0.177$；$w(C)=0.146$；$w(D)=0.104$，$w(E)=0.094$

$w(F)=0.052$；$w(G)=0.031$；$w(H)=0.073$；$w(I)=0.083$。

按照这组权数得到的目标排列与主观原始直觉有很好的符合程度。

根据上面的常权数分配，得到常权比，按（4-1-13）式修改为变权，从而得到变权比（4-1-14）。于是按式（4-1-12）得到照顾到九个目标的变权分配。

最后由公式（4-1-17），利用计算机很快得到诸方案对九个目标的综合程度：

$t(A_1)=0.40$；$t(A_2)=0.61$；$t(A_3)=0.72$；$t(A_4)=0.38$

我们取方案$A_3$为最优方案，这与前面结果一致。

## §4-2 预测负荷的逐步回归法和典型日负荷图的计算机模糊模拟[55]

1984年，Chen，Dehang为了预测负荷，利用计算机执行逐步回归法。对影响负荷的七个因素的逐步回归分析，选择了最有意义因素和建立了负荷预测模型。为了模拟典型日负荷图利用了模糊集合理论，并提出了计算机模糊模拟方法（CFS法）。

负荷预测是一个电力系统规划和运行的重要任务之一。负荷预测对电力工业和国民经济是非常有效益的，因为它确定发电量、输电量和配电量。在预测华东电力系统的负荷时，首先在计算机上执行了逐步回归法。对影响负荷的七个因素的逐步回归分析，建立了峰值负荷逐步回归预测模型。为了分析影响电能消耗量的各种不同因素，为了分析复合系统及其子系统之间的关系以及为了分析年电能消耗量、年峰值负荷和平均每年的日负荷率之间的关系，我们也利用了逐步回归法。利用不同的数学模型，我们可以研究已给出的华东电力系统的电力需求。第二，模糊集合理论应用于模拟典型日负荷图。复合系统考虑为适当选择的所有负荷组件的合成体。复合系统的各负荷处理为Ⅱ型模糊集合。还适当地选择了隶属度集合$G$。各负荷组件的隶属度用语言术语来表达。第三，利用CFS法把模糊隶属度变换成为相应的非模糊数值。

### 一、预测电力需求的逐步回归法

1.逐步回归预测模型

影响峰值负荷的各种因素是极其复杂的。峰值负荷预测模型可以考虑为多元回归模型。看起来，某些因素可能是与峰值负荷密切相对的。尽管如此，在计算峰值负荷的回归方程中，仍然计及了所有相关因素，在回归方程中的某些因素的变化变得不重要。原因在

于：这些因素与参加回归的$n$-变量$x_1$，$x_2$，…，$x_n$的其他因素有相关关系，它们所起的作用由那些其他的有关因素所代替了。这时，如果这些因素仍保留在回归方程中，它们不仅增加了不必要的计算，而且还增加了回归方程的不稳定性。为了建立优化的回归方程，有必要选择所有显著影响峰值负荷的因素。逐步回归法对于上述目的是有效的。

以上海地区电力系统的负荷预测为例。根据与峰值负荷的相关程度，应该考虑七个因素，即工业年总产值；原材料工业产值占工业总产值的比例；月峰值负荷的平均最高温度（在一月中产生的峰值负荷，冬天考虑平均最低温度）；月峰值负荷的降雨量；日峰值负荷的负荷率；灌溉的年电能消耗量；一般用途的年电能消耗量。有效水平取为$\alpha=0.1$，整理了近18年的数据，峰值负荷是夏季峰值负荷。设$F$-检验是$F_{\alpha,1}(1, 18-K-1)$，当$K$取为6.4和2时，只有两个因素——工业年总产值和日峰值负荷的负荷率——仍然保留。以下是一部分计算结果。

上海市的夏季峰值负荷的逐步回归预测模型是：

$$Y=1650.749+3.124X_1-15.729X_2 \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

式中：$Y$——夏季峰值负荷的预测（兆瓦）；$X_1$——工业年总产值（亿元）；$X_2$——日峰值负荷的负荷率（%）。

我们把1963～1980年的工业年总产值和日峰值负荷的负荷率的数据代入到上述方程式中，平均预测误差为3.2%。

上海市的冬季峰值负荷的逐步回归预测模型是：

$$Y=293.235+2.821X_1+19.917X_2 \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

式中：$Y$——冬季峰值负荷的预测（兆瓦）；$X_1$——工业年总产值（亿元）；$X_2$——月峰值负荷的平均最低温度（℃）。

上述方程的18年的平均预测误差为2.76%。相类似地，我们有华东电力系统的夏季峰值负荷的逐步回归预测模型。它是：

$$Y=3774.159+4.699X_1-41.118X_2 \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

式中：$Y$——夏季峰值负荷的预测（兆瓦）；$X_1$——工业年总产值（亿元）；$X_2$——平均每年的日负荷率（%）。

上述方程的18年的平均预测误差为2.78%。除了夏季和冬季峰值负荷之外，我们还能够建立年峰值负荷的逐步回归预测模型。

上海市的年峰值负荷的逐步回归预测模型：

$$Y=192.765+0.327X_1-1.885X_2 \qquad (4\text{-}2\text{-}4)$$

式中：$Y$——年峰值负荷的预测（10兆瓦）；$X_1$——工业年总产值（亿元）；$X_2$——平均每年的日负荷率（%）。

（4-2-4）方程的18年的平均预测误差为2.28%。为了建立年电能消耗量的逐步回归预测模型，我们利用逐步回归分析如下因素，即工业年总产值；重工业产值占工业总产值的比例；平均每年的日负荷率；平均年最高温度和年降雨量。

上海市的年电能消耗量的逐步回归预测模型是：

$$Y=17.114+0.228X \qquad (4\text{-}2\text{-}5)$$

式中：$Y$——年电能消耗量的预测（亿千瓦时）；$X$——工业年总产值（亿元）。

(4-2-5)方程的18年的平均预测误差为2.0%。

2.影响峰值负荷和电能消耗量的主因素的逐步回归分析

综上所述，大多数峰值负荷的逐步回归方程式仅包括两个因素，即工业年总产值和负荷率。这表明两个因素都对峰值负荷有最显著的影响。

就上海市而论，当工业总产值保持不变时，如果日负荷率的变化量$\Delta r=5\%$，那么夏季峰值负荷的变化量$\Delta Y=-78\sim-79$兆瓦。就华东电力系统而论，当平均每年的日负荷率按5％增加时，那么，年峰值负荷按156兆瓦递减。就华东某些地区而论，重工业产值占工业总产值的比例，灌溉的电能消耗量和生活的电能消耗量也对峰值负荷有显著的影响。例如，在浙江省，当重工业产值的比例按10％递增时，如果其他因素保持不变，那么年峰值负荷按111.5兆瓦递增。逐步回归分析还表明：影响年电能消耗量的最显著因素是工业年总产值。然而，显著因素包括重工业产值占工业总产值的比例，年降雨量等。华东的某些省，例如安徽省，当年降雨量按100mm递增时，年电能消耗量按0.786亿千瓦时递减。就浙江省而论，当重工业产值的比例按5％递增时，年电能消耗量按5亿千瓦时递增。在给出有关前提和预测显著因素之后，我们能够用逐步回归模型对未来作出峰值负荷和电能消耗量的预测。预测流程图如图4-2-1所示。

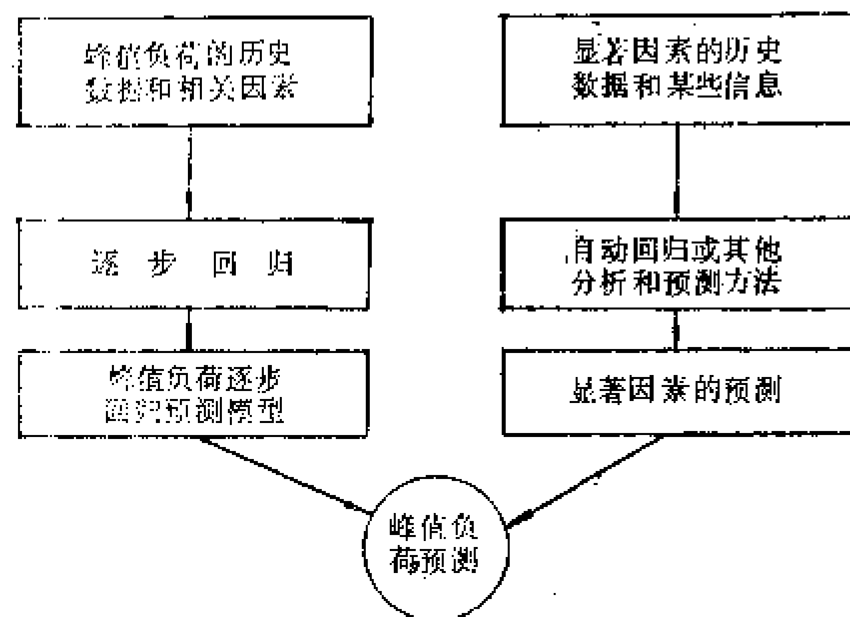



图 4-2-1 用逐步回归模型的预测流程图

3.年峰值负荷，年电能消耗量和平均每年的日负荷率之间的关系。

华东电力系统中的年峰值负荷、年电能消耗量和平均每年的日负荷率有一种密切关系。当平均每年的日负荷率保持不变时，如果年电能消耗量递增，那么年峰值负荷相应地递增。当年电能消耗量不变时，如果平均每年的日负荷率递增，那么年峰值负荷相应地递减。对这三个因素进行逐步回归分析，我们得到了它们之间的关系。

上海市的年峰值负荷、年电能消耗量和平均每年的日负荷率之间关系方程式是：

$$Y=241.101+1.498X_1-2.801X_2 \qquad (4\text{-}2\text{-}6)$$

式中：$Y$——年峰值负荷的预测（10兆瓦）；$X_1$——年电能消耗量（亿千瓦时），$X_2$——平均每年的日负荷率（％）。

上述方程的平均预测误差为1.9％。

4.总电力系统及其子系统之间的关系

研究总系统和其子系统之间的关系，对电力系统的负荷量和能量的合理分配，和对电力系统的经济运行和安全运行有重要作用。应用逐步回归分析，得到如下方程式：

华东电力系统的年峰值负荷和其子系统的年峰值负荷之间的关系方程式是：

$$Y=8.956+0.758X_1+1.082X_2+0.76X_3+1.187X_4 \quad (4\text{-}2\text{-}7)$$

式中：$Y$——华东电力系统的年峰值负荷（10兆瓦）；$X_1$——上海市的年峰值负荷（10兆瓦）；$X_2$——江苏省的年峰值负荷（10兆瓦）；$X_3$——安徽省的年峰值负荷（10兆瓦）；$X_4$——浙江省的年峰值负荷（10兆瓦）

上述方程的18年的平均误差为1.1%。

## 二、典型日负荷图的计算机模拟（CFS）方法

1.基本概念和符号表示法

**定义1** 设$V$是一个集合，比如说一个实数集合，$V$的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$定义为某些有序对所构成的集合，例如：

$$\underset{\sim}{A}=\{X,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)/x\in V\} \quad (4\text{-}2\text{-}8)$$

式中：$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$记为$X$属于$\underset{\sim}{A}$的隶属度，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\in[0,1]$，$x\in V$；$V$称之为论域。$\underset{\sim}{A}$可以简单地记为：

$$\underset{\sim}{A}=\int_V(X,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \quad (4\text{-}2\text{-}9)$$

这里积分符号记为所有有序对的并。

**定义2** 设$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$是两个模糊子集，则有

$$\text{not}\underset{\sim}{A}\triangleq 7\underset{\sim}{A}\triangleq\int_V(X,\ 1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) \quad (4\text{-}2\text{-}10)$$

$$\underset{\sim}{A}\text{or}\underset{\sim}{B}\triangleq A\cup B\triangleq\int_V(X,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)) \quad (4\text{-}2\text{-}11)$$

$$\underset{\sim}{A}\text{and}\underset{\sim}{B}\triangleq\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\triangleq\int_V(X,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)) \quad (4\text{-}2\text{-}12)$$

**定义3** $$\text{very}\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}^2=\int_V(X,\ \mu_{\underset{\sim}{A}}^2(x)) \quad (4\text{-}2\text{-}13)$$

**定义4** 若一个隶属度集合$G=\{g_0,g_1,\cdots,g_n/g_{i-1}<g_i,g_i\in[0,1],\ i=1,2,\cdots,n\}$。则$g_0$称为极小隶属度，记为$g_{\min}$；$g_n$称为极大隶属度，记为$g_{\max}$。

**定义5** 设$V$是一个论域，$x\in V$。若$x$属于$\underset{\sim}{A}$的隶属度是一个模糊隶属度，则$\underset{\sim}{A}$称为$V$的一个2型模糊子集。

**定义6** 若论域中的所有元素是模糊变量或模糊子集，则论域称为模糊论域，记为$\widetilde{V}$。

**定义7** 若隶属度集合中的所有元素都是模糊的，则该集合称为模糊隶属度集合，记为$\widetilde{G}$。

2.负荷图的形成

在任何情况下，一个系统的总电力需求量可以表达成：

$$P=a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_np_n \quad (4\text{-}2\text{-}14)$$

式中：$P_i$是第$i$负荷组件的峰值负荷，$a_i\in[0,1]$；$P$是复合系统的总负荷。若已给出$a_1$，

$a_2$，…，$a_n$的一个集合，则形成了一个负荷图。$a_1$，$a_2$，…，$a_n$的集合称为系数矩阵，$a_1p_1$，$a_2p_2$，…，$a_np_n$的集合称为负荷矩阵。

24小时的系数矩阵是：

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \cdots\cdots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \cdots\cdots & a_n^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{(24)} & a_2^{(24)} & \cdots\cdots & a_n^{(24)} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}2\text{-}15)$$

24小时的负荷矩阵是：

$$\begin{bmatrix} a_1^{(1)}p_1 & a_2^{(1)}p_2 & \cdots & a_n^{(1)}p_n \\ a_1^{(2)}p_1 & a_2^{(2)}p_2 & \cdots & a_n^{(2)}p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{(24)}p_1 & a_2^{(24)}p_2 & \cdots & a_n^{(24)}p_n \end{bmatrix} \quad (4\text{-}2\text{-}16)$$

我们仅考虑$[g_0, g_{m-1}]\subset[0, 1]$中的$m$数$g_0$，$g_1$，…，$g_{m-1}$，这里$g_i - g_{i-1} = g_{m-1} - g_0/m$。$i = 1, 2, \cdots, m-1$。在$m$数中，$g_0$，$g_{m-1}$是关键数值并可以从各负荷组件的历史负荷图获得。

设各负荷组件构成的论域是

$$\widetilde{V} = [a_1, a_2, \cdots, a_n\} \quad (4\text{-}2\text{-}17)$$

设非模糊隶属度集合是

$$G = \{g_0, g_1, g_2, \cdots, g_{m-1}\} \quad (4\text{-}2\text{-}18)$$

设各负荷组件的模糊子集是：

$$\underset{\sim}{A} = \{(a_1, \mu_{\underset{\sim}{A}}(a_i))/i = 1, 2, \cdots, n, \mu_{\underset{\sim}{A}}(a_i)\in G\} \quad (4\text{-}2\text{-}19)$$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_i)$将赋值于系数$a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$。每一个系数矩阵对应于式（4-2-19）的一个模糊子集。

3.系数矩阵的选择——CFS方法。

我们以华东电力系统作为实例，并预测其1985年的夏季典型日负荷图。

设模糊论域是：

$$\widetilde{V} = \{\text{上海市负荷，江苏省负荷，安徽省负荷，浙江省负荷}\} \quad (4\text{-}2\text{-}20)$$

我们取$g_{\min} = 0.7$和$g_{\max} = 1$。设隶属度集合是：

$$G = \{0.7, 0.73, 0.76, 0.79, 0.82, 0.83, 0.88, 0.91, 0.94, 0.97, 1\} \quad (4\text{-}2\text{-}21)$$

设各负荷组件的模糊隶属度集合是：

$\widetilde{G}$＝{小，中，大，非常小，非常中，非常大，不非常大，非常非常小，不非常小，小和不非常小，非常中和小，大和不非常大，中和大，非常非常大}　（4-2-22）

这里“非常非常小”和“非常非常大”对应于$g_{\min}$和$g_{\max}$。根据历史负荷图和现在负荷图，我们对各种不同的负荷组件的夏季典型日负荷图作语言描述（参看表4-2-1）

从表4-2-1和$\widetilde{V}$和$\widetilde{G}$，形成了2型模糊子集。

负荷组件0－1$h$＝{（$a_1$，非常小），（$a_2$，小），（$a_3$，小），（$a_4$，小）}

24小时期间夏季典型负荷图的语言描述　　表 4-2-1

| 时　间 | 各负荷组件 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 上海市 | 江苏省 | 安徽省 | 浙江省 |
| 1 | 非常小 | 小 | 小 | 小 |
| 2 | 非常非常小 | 小 | 非常小 | 小 |
| 3 | 非常小 | 小 | 小 | 非常非常小 |
| 4 | 非常小 | 小 | 小 | 小 |
| 5 | 小 | 小和不非常小 | 非常中和小 | 非常中 |
| 6 | 小 | 小和不非常小 | 非常中和小 | 非常中 |
| 7 | 小和不非常小 | 小和不非常小 | 非常中 | 大和不非常大 |
| 8 | 大 | 大 | 大 | 大 |
| 9 | 大 | 大 | 大 | 大 |
| 10 | 非常非常大 | 大 | 大 | 大 |
| 11 | 大和不非常大 | 大和不非常大 | 中和大 | 大和不非常大 |
| 12 | 中和大 | 大和不非常大 | 中和大 | 大和不非常大 |
| 13 | 非常大 | 非常中和小 | 非常中和小 | 大和不非常大 |
| 14 | 非常大 | 大 | 中和大 | 中和大 |
| 15 | 非常大 | 大 | 中和大 | 非常大 |
| 16 | 非常大 | 大和不非常大 | 大 | 非常大 |
| 17 | 中和大 | 大和不非常大 | 大 | 中和大 |
| 18 | 中和大 | 大和不非常大 | 大和不非常大 | 大和不非常大 |
| 19 | 中和大 | 大 | 大和不非常大 | 大和不非常大 |
| 20 | 大和不非常大 | 非常非常大 | 非常非常大 | 非常非常大 |
| 21 | 大和不非常大 | 非常大 | 非常大 | 大 |
| 22 | 中和大 | 非常大 | 大和不非常大 | 大 |
| 23 | 非常中和小 | 大和不非常大 | 大和不非常大 | 非常中和小 |
| 24 | 小和不非常小 | 小和不非常小 | 非常中和小 | 小 |

负荷组件 1 － 2 $h$ = {($a_1$，非常小)，($a_2$，小)，($a_3$，小)，($a_4$，小)}

⋮

负荷组件23 － 24$h$ = {($a_1$，不非常大)，($a_2$，小和不非常小)，($a_3$，非常中和小)
　　($a_4$，小)}　　(4-2-23)

为了把上述方程式中的模糊隶属度变换成为(4-2-21)式的非模糊数值，我们采取两个步骤：首先，我们定义“大”，“中”，“小”，“非常大”，…，作为模糊子集。第二，我们给每个模糊隶属度赋值为(4-2-21)式中的一个非模糊数值。

步骤 1：我们仅定义“大”，“中”，“小”。其他语言术语的模糊子集应用(4-2-20)～(4-2-25)推导出来。取论域为

$$V = \{0,\ 0.02,\ 0.04,\ \cdots,\ 0.96,\ 0.98,\ 1\} \qquad (4\text{-}2\text{-}24)$$

设对应于论域的隶属度集合为：　$M = [0,\ 1]$　　(4-2-25)

从(4-3-24)式和(4-3-25)式，我们定义“小”为：

小 = {(0，1)，(0.02，1)，(0.04，1)，(0.06，0.9)，(0.08，0.8)，(0.1，0.75)，(0.12，0.7)，(0.14，0.7)，(0.16，0.7)，(0.18，0.7)，(0.2，0.65)，(0.22，0.65)，(0.24，0.6)，(0.26，0.6)，(0.28，0.6)，(0.3，0.55)，(0.32，0.55)，(0.34，0.55)，(0.36，0.5)，(0.38，0.5)，(0.40，0.3)，

(0.42, 0.25), (0.44, 0.22), (0.46, 0.2), (0.48, 0.15), (0.5, 0.1), (0.52, 0.08), (0.54, 0.05), (0.56, 0.04), (0.58, 0), …, (0.98, 0), (1, 0)} (4-2-26)

相类似地，也可以定义“中”和“大”。

步骤2：使语言变量定量化。$V$分解成11个子集。

$$V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{10} \tag{4-2-27}$$

假设如下的对应：

$$\begin{matrix} V_0 & V_1 & & V_{10} \\ \updownarrow & \updownarrow & \cdots\cdots & \updownarrow \\ g_0 = 0.7 & g_1 = 0.73 & & g_{10} = 1 \end{matrix} \tag{4-2-28}$$

设一个描述的语言术语是$L_\alpha = \{(0, \mu_1), (0, \mu_2), \cdots\cdots, (0.98, \mu_{50}), (1, \mu_{51})\}$。用$M(V_i)$代表$V_i$中各元素的隶属度的和。

$$M(V_q) = \bigvee_{i=0}^{10} M(V_i) \tag{4-2-29}$$

设$N$是一个定量化算子，则有

$$N(L_\alpha) = g_q \tag{4-2-30}$$

上述算术和不同模糊子集运算是在计算机上执行的。我们仅把模糊子集的不同元素的隶属度数据输入到计算机中去，打印出对应于每个模糊语言术语的数值。计算结果如表4-2-2，计算的流程图如图4-2-2所示。

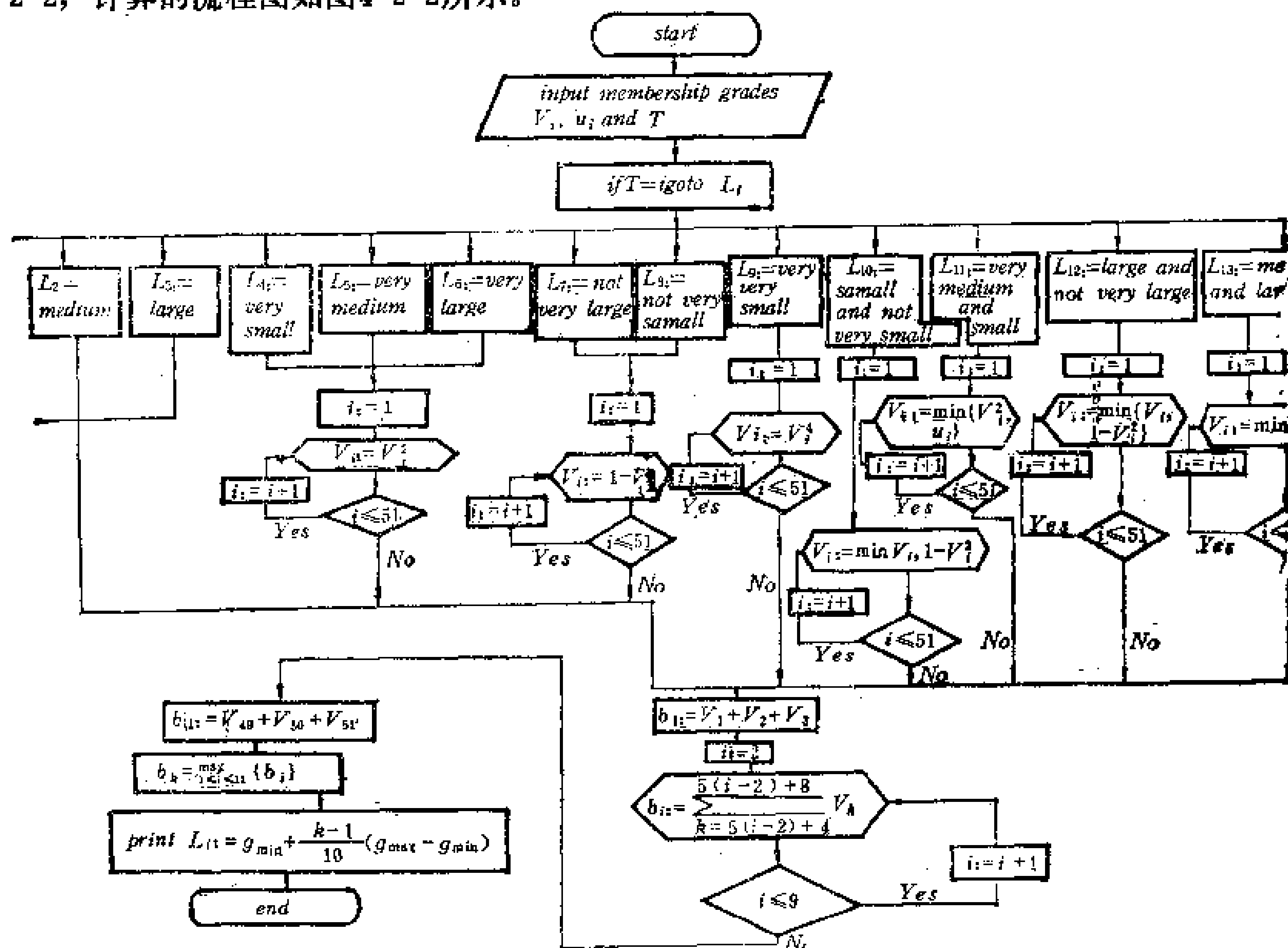



图 4-2-2 计算机模糊模拟流程图

**模糊隶属度与数值之间对应** 表 4-2-2

| 模糊隶属度 | 从G集合来的数值 | 模糊隶属度 | 从G集合来的数值 |
|---|---|---|---|
| 小 | 0.73 | 非常非常小 | 0.7 |
| 中 | 0.85 | 不非常小 | 0.91 |
| 大 | 0.97 | 小和不非常小 | 0.79 |
| 非常小 | 0.7 | 非常中和小 | 0.82 |
| 非常大 | 0.97 | 大和不非常大 | 0.91 |
| 非常中 | 0.85 | 中和大 | 0.85 |
| 不非常大 | 0.73 | 非常非常大 | 1 |

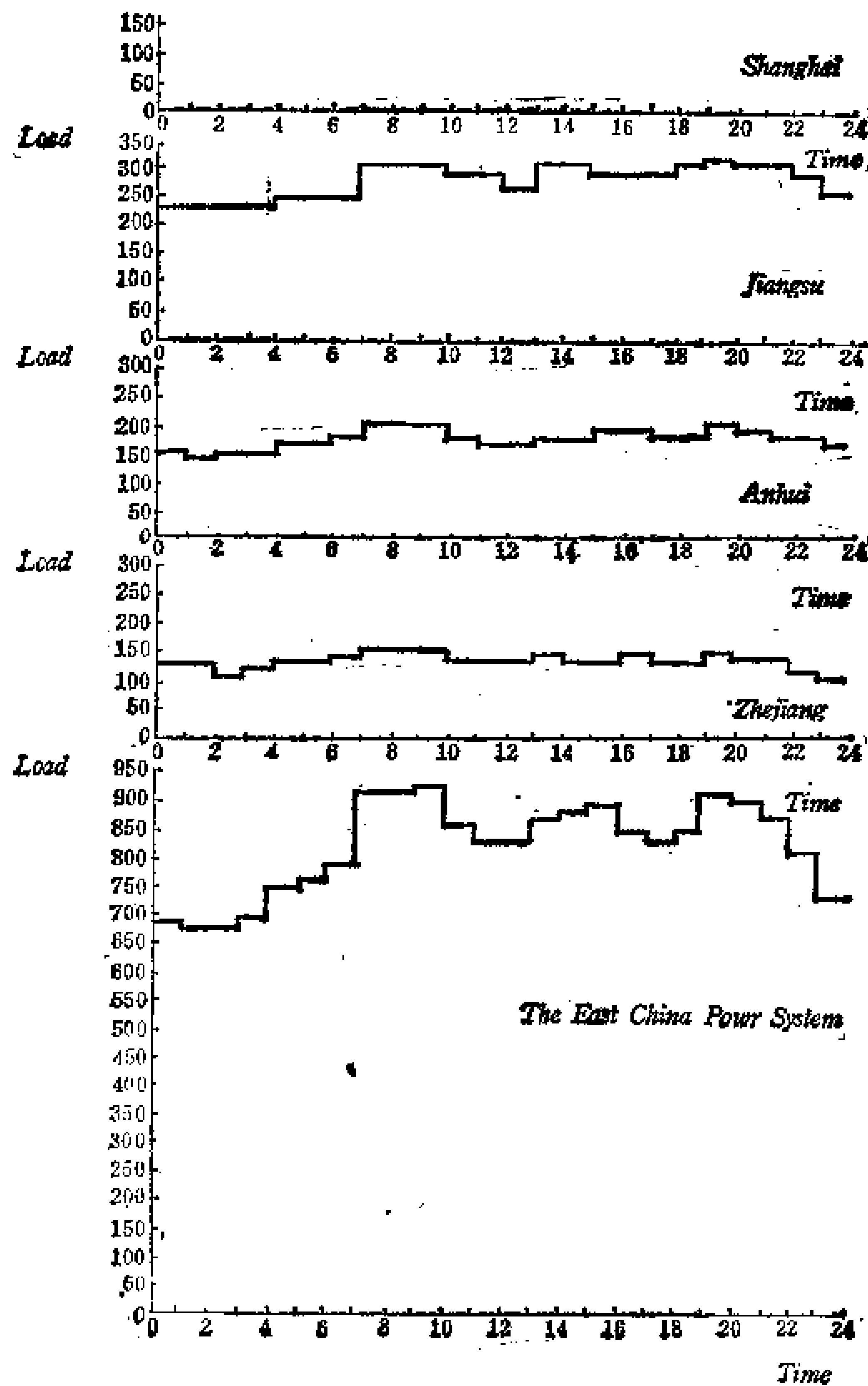



图 4-2-3 1985年的华东电力系统的典型日负荷曲线

把（4-2-23）式变换成为非模糊隶属度公式，并求得华东电力系统的典型日负荷的系数矩阵。可以用逐步回归负荷预测模型预测上海市、江苏省、安徽省、浙江省的夏季峰值负荷。即上海市$P_1=269.36$，江苏省$P_2=318.23$，安徽省$P_3=198.95$和浙江省$P_4=159.72$。从（4-3-14）式，能够计算出华东电力系统的1985年的典型日负荷图。典型日负荷曲线如图4-2-3所示。

4.计算机模糊模拟方法的验证。

我们利用CFS方法模拟上海市的1980年夏季日峰值负荷的负荷图。设隶属度集合是$G=\left\{g_i \mid g_i=0.74+\frac{1-0.74}{10},\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ 10\right\}$。容易看出$g_{\min}=0.74$，$g_{\max}=1$，已知上海市的夏季峰值负荷为$P_1=227.3$。模拟负荷曲线与实际负荷曲线的比较如图4-2-4，和图4-2-5所示。其中，$\beta$代表极小负荷率，和$\gamma$代表平均日负荷率。极小模拟误差为零，极大模拟误差为3.1%和24小时的平均模拟误差为1.25%。

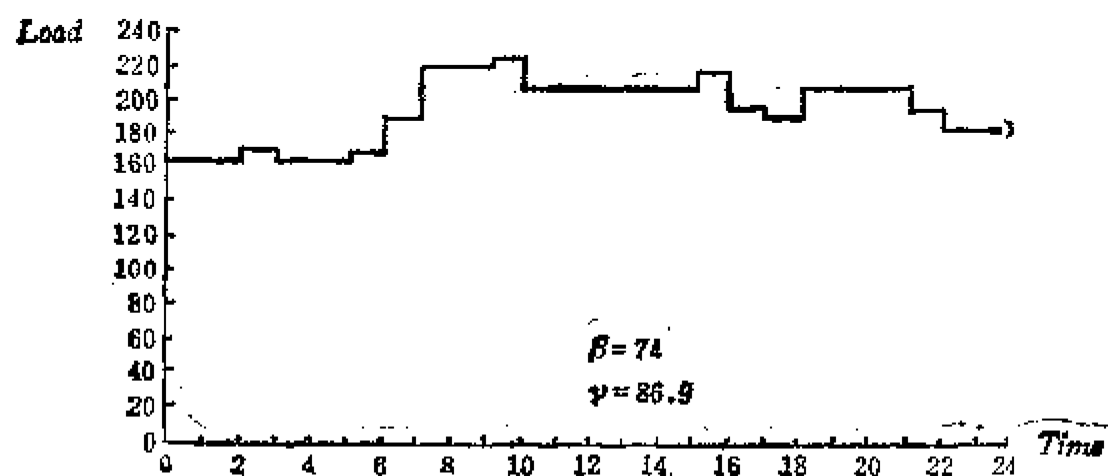



图 4-2-4 上海市的（June 18、1980）夏季日峰值负荷的实际负荷曲线

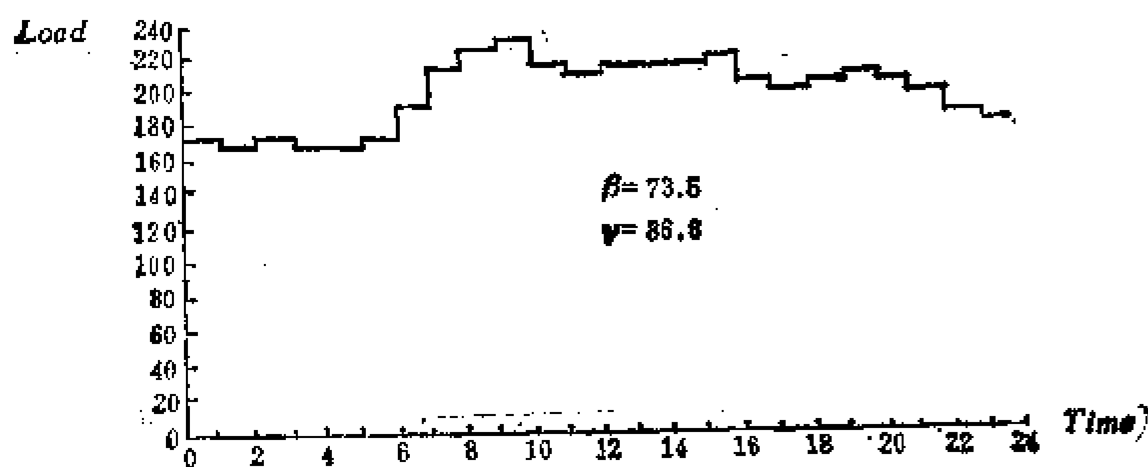



图 4-2-5 用CFS方法的上述曲线的模拟曲线

## §4-3 东江水电工程库周区域经济系统的综合优化[61]

1986年，李希平、张兆基等针对东江水电工程库周区域经济系统是一个包括工业、农业、交通邮电、建筑业，商业服务及旅游业等分系统在内的复杂大系统的特点，设计了多层次的大系统分解协调优化模型，探讨了该区域在符合国家总的发展方针和满足社会需求的前提下最优资源分配方案和最佳经济结构，以评价工程的社会经济效益，并指导库周区域社会经济的开发。

东江水电工程的建成，将形成一座装机50万千瓦，年发电量13.2亿度的电站和一个库容81.2亿立米，面积24万亩的水库，同时要淹没耕地5.7万亩，安置迁移人口5.25万。库周区域所涉及范围，从自然地理和经济地理着眼，包括资兴市十一个乡和东江、鲤鱼江、三都三镇所辖区域。库区人口分布和生产结构将发生变化，这是使库周区域社会经济结构跃变的良好转机。应因势利导，切实制定合理的发展方案，取得整体上的最佳效果。资源突变，社会经济体制重大变革的未来发展状况，很难用趋势外推的方法进行预测。我们试图通过对它的种种经济因素进行数量化处理，建立一个经济系统的综合优化模型，探讨该区域在符合国家总的发展方针和满足社会需求前提下的最优资源分配方案及最佳经济结构，以评价工程的社会经济效益，并指导库周区域社会经济的开发。

## 一、模 型 原 理

1.模型结构框图

一个区域经济系统是一个包括工业、农业、交通邮电、建筑业、商业服务及旅游业等分系统在内的复杂大系统。每个分系统又可分解为若干个子系统。

根据库区国民经济系统的层次性，以及各个分系统之间的内部联系，我们设计了一个具有二个层次的大系统分解协调优化模型，对它的经济结构进行综合优化分析。模型的结构框图如图4-3-1所示。

2.模型的基本原理

模型共分为六个子模块，现分述如下：

1）预测子块

预测子块是为了对人口、劳力、资金、电力、煤炭、土地资源、水资源等广义资源进行预测而设计的。它有多个通道与优化块相连，根据预测结果给出的范围，利用它们，可方便地改变馈入优化块的各种资源信息，形成不同的优化方案，以便给决策者提出供选择的种种发展方案。

2）工业优化子块

把库周区域工业分系统分解为火力发电、水力发电、煤炭、化工、机械、冶金、森林工业、建材、造纸、轻纺及食品饲料等十一个部门。设它们在计算年度的产值分别为$XG_1$，$XG_2$……$XG_{11}$。

第$j$部门单位产值需消耗第$i$种资源（或物质）量记为$ag_{ij}$；第$i$种资源用于工业生产的可供量记为$bg_i$；根据社会需求，资源等条件确定第$j$部门产值的上下限，分别记为$GH_j$，$GL_j$，（$j=1$，2，…，11），最后设工业产值为$XG$，工业净产值为$IG$，第$j$部门的净产值率为$CG_j$。

根据以上设定，工业优化子模型归结为：

$$\max\{IG=CG_j\cdot XG\}$$
$$S.t\begin{cases}AG\cdot XG\leqslant BG\\GL\leqslant I\cdot XG\leqslant GH\end{cases}\qquad(4\text{-}3\text{-}1)$$

式中：$XG=[XG_1, XG_2, \cdots, XG_{11}]^T$；$CG=[CG_1, CG_2, \cdots, CG_{11}]^T$；

$BG=[bg_1, bg_2, \cdots, bg_{11}]^T$；　$GL=[GL_1, GL_2, \cdots, GL_{11}]^T$；

$GH=[GH_1, GH_2, \cdots, GH_{11}]^T$。

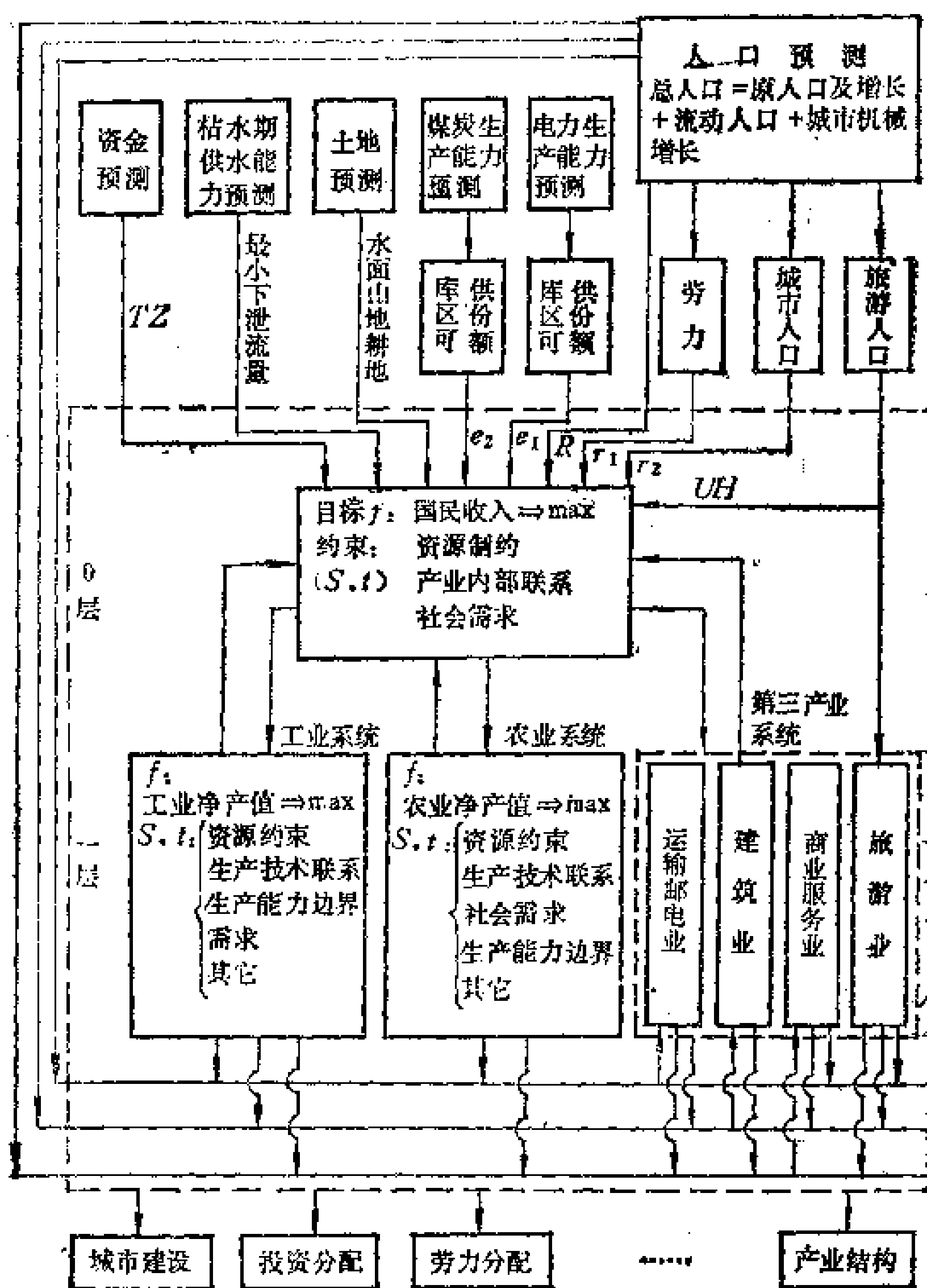



图 4-3-1 模型的结构框图

$$AG=\begin{bmatrix} ag_{1,1} & ag_{1,2}, & \cdots, & ag_{1,11} \\ ag_{2,1} & ag_{2,2}, & \cdots, & ag_{2,11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ag_{m,1} & ag_{m,2}, & \cdots, & ag_{m,11} \end{bmatrix},$$

$$I=\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \text{为}11\times 11\text{单位矩阵}$$

3）农业优化子块

农业分系统同样可以分解为层次更低的子系统：种植业、林业、牧业、鱼业等。为了使这个分系统的优化和国土资源、社会需求等紧密联系起来，在模型中选用各子系统中的主要产品或产品类作为决策变量，变量设置如表4-3-1。

农业分系统决策变量设置表　　表 4-3-1

| 所属系子统 | 种值业系统 | | | | 林业系统 | | | | | | 牧业 | | | 渔业 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 名称 | 水稻播面 | 其它粮作播面 | 蔬菜播面 | 经作播面 | 水果播面 | 油茶面积 | 用材林面积 | 风景林面积 | 防护林面积 | 其它经济林面积 | 草食动物 | 家禽 | 牲猪 | 水库粗养面积 | 水库精养面积 |
| 变量代号 | $XN_1$ | $XN_2$ | $XN_3$ | $XN_4$ | $XN_5$ | $XN_6$ | $XN_7$ | $XN_8$ | $XN_9$ | $XN_{10}$ | $XN_{11}$ | $XN_{12}$ | $XN_{13}$ | $XN_{14}$ | $XN_{15}$ |
| 单位 | 万亩 | 万亩 | 万亩 | 万亩 | 万亩 | 万亩 | 万亩 | 万亩 | 万亩 | 万亩 | 万头 | 万只 | 万头 | 万亩 | 万亩 |

设：

$$AN=\begin{bmatrix} an_{1,1} & an_{1,2}, & \cdots, & an_{1,15} \\ an_{2,1} & an_{2,2}, & \cdots, & an_{2,15} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ an_{m,1} & an_{m,2}, & \cdots, & an_{m,15} \end{bmatrix}$$

为农业决策变量$XN_1$，…，$XN_{15}$对$m$种国民经济各部门共同需要的资源的单位消耗矩阵；

$$DN=\begin{bmatrix} dn_{1,1} & dn_{1,2} & \cdots & dn_{,15} \\ dn_{2,1} & dn_{2,2} & \cdots & dn_{,15} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ dn_{k,1} & dn_{k,2} & \cdots & dn_{k,15} \end{bmatrix}$$

为农业决策变量对$k$种农业特有资源或物质的单位消耗（或产出）系数矩阵。

$BN=[bn_1, bn_2, \cdots, bn_m]^T$为$m$种共用资源用于农业的可供量；

$BDN=[bdn_1, bdn_2, \cdots, bdn_k]^T$。为$k$种农业资源或产品的总供应（或需求）向量；

$NH$，$NL$分别为农业决策向量$XN$的上下限向量；

$YN=\sum_{i=1}^{15}a_iXN_i$ 为农业产值，其中：$a_i(i=1, 2, \cdots, 15)$是决策变量$XN_i$的单位产值；

$$IN=\sum_{i=1}^{15}Cn_i\cdot XN_i=CN\cdot XN$$

为农业净产值，$Cn_i$（$i=1, \cdots, 15$）是决策变量$XN_i$的单位净产值。

由此，农业优化子模型为

$$\max\{IN=CN\cdot XN\}$$

$$s\cdot t\begin{Bmatrix} AN\cdot XN\leqslant BN \\ DN\cdot XN\leqslant BDN \\ NL\leqslant I\cdot XN\leqslant NH \end{Bmatrix} \qquad (4\text{-}3\text{-}2)$$

4）第三产业优化子块

这里指的第三产业限定为交通邮电业、建筑业、商业及服务业、旅游业等部门。这个子块的决策变量取交通邮电业、建筑、商业及服务业、旅游业的产值，设为$XS_1$，$XS_2$，$XS_3$，$XS_4$。于是，第三产业的产值为：$XS=\sum_{i=1}^{4}XS_i$；净产值表示为：$IS=\sum_{i=1}^{4}CS_i\cdot XS_i=CS\cdot XS$。式中，$CS_i$表示$i$部门的净产值率。

设$AS$为各部门对$m$种共用资源的单位消耗系数矩阵：

$$AS=\begin{bmatrix} as_{1,1} & as_{1,2} & \cdots & as_{1,4} \\ as_{2,1} & as_{2,2} & \cdots & as_{2,4} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ as_{m,1} & as_{m,2} & \cdots & as_{m,4} \end{bmatrix}$$

$BS=[bS_1,\ bS_2,\ \cdots,\ bS_m]^T$为$m$种资源供第三产业各部门使用的可供应向量。

旅游业产值与年平均游客数及消费水平有关，而游客数量与景观资源价值、投资额、服务水平有关。要使库区景观具备最起码的旅游条件，需要有最低限额的投资量，而由于景观容量的限制，其投资额也必须有一个上限。在此投资区间中，游客数量将与投资量有单调递增关系，设定为S形曲线。为了取得线性模型将S形曲线近似取为直线。由于产值和游客数量是成正比例的，因此，可对旅游业产值作上下限约束，即

$$UL\leqslant XS_4\leqslant UH$$

于是，第三产业优化模型为：

$$\max\{IS=CS\cdot XS\}$$

$$s.t\begin{cases} AS\cdot XS\leqslant BS \\ UL\leqslant XS_4\leqslant UH \end{cases} \qquad (4\text{-}3\text{-}3)$$

5）总体优化子块

由于工业、农业、第三产业等各分系统在资源使用上存在分配关系，相互之间又存在着技术经济联系，因此，在进行整个经济系统综合优化时，需要更高层次的模块，来完成优化过程中各分系统之间的协调。

一般说来，作为第三产业的交通邮电业、建筑业、商业及服务业、旅游业，各自的发展虽然存在一定的弹性，但是从国民经济整体来看，库周区域经济属于开放系统，是不能孤立地发展的，与社会经济各个方面存在着相关关系，必须与其他产业及社会系统的发展相协调。根据对国民经济各部门之间相关分析。设交通邮电业产值为$XS_1$，建筑业产值为$XS_2$，商业及服务业产值为$XS_3$，旅游业产值为$XS_4$，它们与工业总产值$XG$、工业净产值$IG$、农业总产值$YN$、农业净产值$IN$以及总人口$R$之间，存在如下关系：

$$\begin{bmatrix} XS_1 \\ XS_2 \\ XS_3 \\ XS_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{19} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{29} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \cdots & \beta_{39} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \cdots & \beta_{49} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} XG \\ IG \\ YN \\ IN \\ R \\ XS_1 \\ XS_2 \\ XS_3 \\ XS_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \beta_{30} \\ \beta_{40} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}3\text{-}4)$$

对于国民经济各部门共用的$m$种资源的分配，必须满足下列制约关系：

$$BG+BN+BS\leqslant B \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

式中：$B=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m]^T$，表示$m$种资源约束的自由项。

于是，总体优化块表述为：

$$\max\{I = IG + IN + IS\}$$

$$s \cdot t \begin{cases} BG + BN + BS \leqslant B \\ \begin{bmatrix} XS_1 \\ XS_2 \\ XS_3 \\ XS_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{19} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{29} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \cdots & \beta_{39} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \cdots & \beta_{49} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} XG \\ IG \\ YN \\ IN \\ R \\ XS_1 \\ XS_2 \\ XS_3 \\ XS_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \beta_{30} \\ \beta_{40} \end{bmatrix} \\ XG = \sum_{i=1}^{11} XG_i \\ YN = \sum_{i=1}^{15} a_i XN_i \end{cases} \quad (4\text{-}3\text{-}6)$$

式中：$\{\beta_{ij}\}$为相关关系矩阵。

6 ）优化信息处理子块

对优化模块输出的信息进一步处理，能得到劳动力、电力、煤炭、水资源、木材等资源的最佳分配方案，固定资产投资的最佳方向及其分配，城市的最适规模（人口、城市建筑面积等）最优产业结构等。

7 ）模型的信息结构

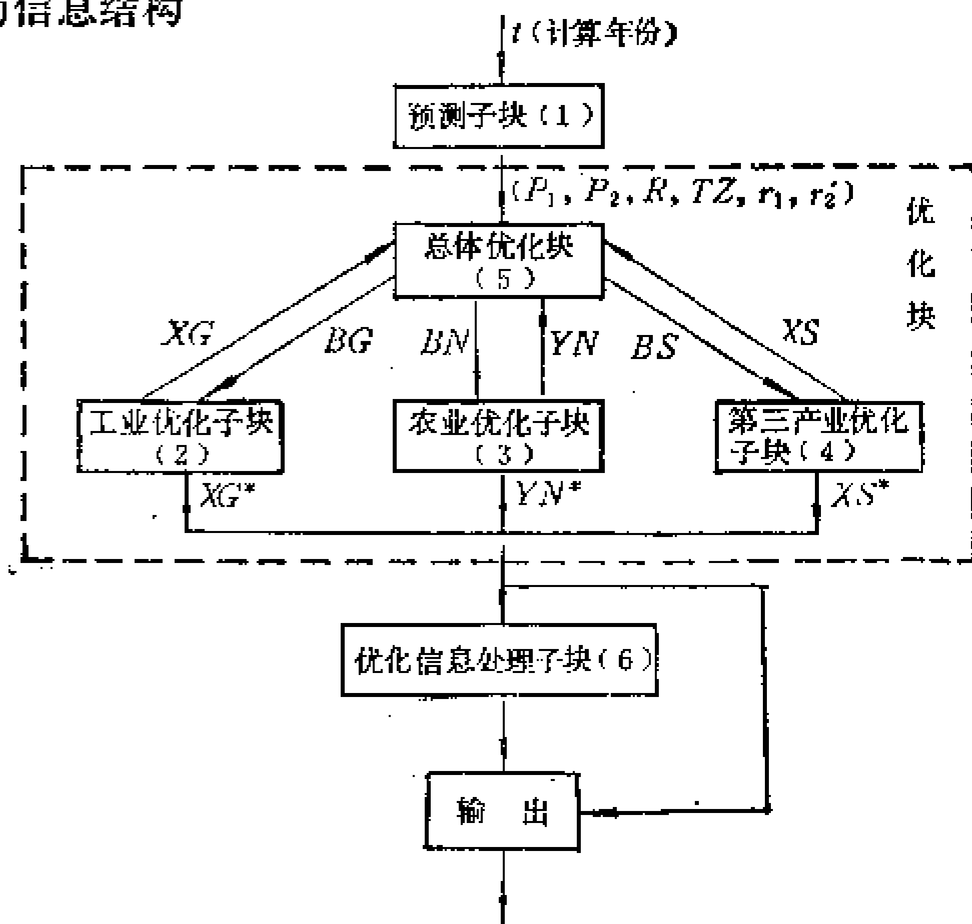



图 4-3-2 模型的信息结构框图

将（4-3-1）～（4-3-6）式的各子模块按图4-3-2的信息结构连结起来，即构成本模型。其核心部分是由工业优化子块、农业优化子块、第三产优化子块及总体优化子块构成的二级分解协调最优化大系统。预测子块是这个二级大系统的输入信息形成单元，优化信

总处理子块则是将这个二阶大系统的输出信息进一步归纳、提炼的单元。

## 二、模型参数辨识

东江库区的经济结构，将随着资兴市的兴建，在不太长的时间内，必然转化为城市结构。因此，全部采用本区域的历史数据预测未来是不可取的。本模型所需的全部数据主要来自本区域的历史统计资料，参比城市有关经济统计资料，某些特殊的数据取自有关部门。

模型参数应能反映库周区域未来种种经济因素、社会因素、信息源和研究对象存在着时、空差异，因此，从上述信息源采集到的数据，一般不宜直接套用，必须经过分析、推断、对比、预测。为此采用了以下参数辨识方法：专家评估法、相关分析法、参数优化。对一些可控的，而随机性、不确定性又比较大的参数，如城市人口、固定资产投资额、能源占用比例等，以预测分析为基础，在其合理的范围选择多组不同的值参与优化计算；对一些灵敏度高的参数，如工业部门单位产值占用固定资金取两组以上不同值参与计算，作灵敏度分析。然后对计算结果进行分析比较，选择合理的、较优的参数。

## 三、计算结果分析

对不同年份进行了17个方案的计算、分析、比较，可从中得到下面一些有益的结论。

（1）1990～1995年间，当新增固定资产累计投资额达到4～5.5亿元时，库周区域总人口以25万左右为宜，其中资兴市城市人口以18～19万为佳；2000～2005年间，当新增固定资产累计投资额达7～8亿元时，库周区域总人口以30万左右为宜，其中资兴市城市人口以20～21万为佳。

（2）与最优经济结构相适应的劳动力分配应是：工业占总劳动力的55～60%，农业占总劳动力的25～30%，第三产业占总劳动力的15～20%。

到本世纪末，劳平社会产值可达11000元左右，劳平国民收入将达6500元上下；与此相应的人均社会产值5000元左右，人均国民收入为3000元上下。

（3）工业应重点发展森工、建材、化工、食品等部门；适当发展能源、机械、轻纺；在本世纪内冶金业的发展重点应放在积累技术和查明资源上；不宜过多地扩大外延性生产；造纸工业应限制发展（或不再发展）。

（4）库周区域经济的支柱产业将是能源工业（电力与煤炭）、森林工业、建材工业、旅游业、化学工业、食品业。到本世纪末，它们的年产值预计均在1亿元以上。

（5）制约库周区域社会经济发展的主要因素将是资金。当新增固定资产累计投资额在2亿至7亿元间变化时，社会总产值将在9.9亿至16.2亿元之间（国民收入在5.5至9.5亿元，工农业总产值在7.3至12.6亿元之间）。而且经济结构的优化结果受资金变化的影响十分敏感。此外，电力、煤炭的变化对结构优化的影响也十分敏感。当煤炭供应份额增加时，可增加火电、建材生产；当电力供应增加时，不应增加（甚至减少）火电生产，而应使化工、机械、森工，建材等部门增加生产。

（6）库周区域总人口对国民经济中的工农业比重有较大影响。人口发展必须和投资水平相协调。在投资水平较低时，应严格限制资兴市的人口增长，以减少农业投资规模，把钱用在旅游业和工业支柱行业，以提高国民经济效益。

## §4-4 污水处理厂运行管理效果的模糊综合评判[62]

1983年，陈洪、黄金丽运用Fuzzy数学对上海市曹杨污水处理厂运行管理效果进行综合评判。所得结果较好地反映了该厂的运行实际。对污水处理厂科学管理提供了一种新方法，具有实用价值。

一座污水处理厂究竟运行得如何？以往人们关心的仅是$BOD_5$（五日生化需氧量）的去除率和$SS$（悬浮物）的去除率。实际上，这两个指标并不能全面地反映该厂的经营好坏。如果成倍地增加曝气池的供气量，$BOD_5$当然去除的多，但是，电耗增大，成本也提高了；此外，如果某一天进水量少，在通常的曝气条件下，$BOD_5$也会去除很多。这就不能说该厂的经营是好的。所以，应该进行包括产量、质量、单耗在内的综合评判。

### 一、综 合 评 判

为了反映与评判有关的各个侧面，并力求符合实际，我们假定评判因素的论域为

$$U=\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5\}$$

式中：$u_1$为产量，即每天处理污水量（千吨/日）；$u_2$为质量，即$BOD_5$去除率（%）；$u_3$亦为质量，即$SS$去除率（%）；$u_4$为气水比，即处理一吨污水的空气量（立方米/吨）；$u_5$为单耗，即去除1公斤$BOD_5$所耗的电度数（度/公斤$BOD_5$）。

决择集为$V=\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_5\}$即$V=\{$很好，好，中，差，很差$\}$。

评判空间为$\mathscr{U}=(U, V, \underset{\sim}{R})$，其中，$\underset{\sim}{R}$为$\mathscr{F}(U)$到$\mathscr{F}(V)$的一个Fuzzy变换，也就是

**评判因素旬平均值** 表 4-4-1

| 水 量 | $BOD_5$去除率 | $SS$去除率 | 气水比 | 单 耗 | 水 量 | $BOD_5$去除率 | $SS$去除率 | 气水比 | 单 耗 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.6 | 80.3 | 81.7 | 8.90 | 0.90 | 15.9 | 93.8 | 89.4 | 7.77 | 1.30 |
| 11.1 | 80.1 | 78.5 | 7.80 | 0.97 | 15.7 | 93.5 | 95.0 | 7.51 | 1.00 |
| 12.0 | 90.0 | 88.0 | 7.20 | 0.83 | 16.8 | 95.9 | 94.3 | 8.12 | 1.05 |
| 12.4 | 90.2 | 81.8 | 7.40 | 0.80 | 16.0 | 94.2 | 92.0 | 8.84 | 1.02 |
| 12.0 | 89.9 | 87.4 | 7.20 | 0.74 | 17.4 | 90.8 | 90.0 | 9.15 | 0.94 |
| 13.0 | 91.4 | 90.2 | 7.30 | 0.73 | 16.3 | 91.1 | 91.6 | 7.80 | 1.06 |
| 14.9 | 95.4 | 91.3 | 7.70 | 0.79 | 15.4 | 92.9 | 90.3 | 9.28 | 0.95 |
| 13.9 | 94.3 | 92.7 | 7.29 | 0.84 | 16.1 | 94.1 | 95.0 | 0.64 | 0.81 |
| 14.1 | 96.1 | 92.2 | 8.22 | 0.75 | 18.7 | 94.6 | 95.8 | 6.54 | 0.66 |
| 17.3 | 95.9 | 92.5 | 7.74 | 0.89 | 16.6 | 95.6 | 94.9 | 7.00 | 0.94 |
| 17.4 | 95.9 | 93.8 | 6.69 | 0.79 | 16.0 | 96.1 | 96.0 | 7.56 | 1.13 |
| 17.4 | 91.4 | 89.3 | 6.22 | 0.68 | 17.5 | 95.7 | 93.3 | 6.80 | 1.08 |
| 18.4 | 87.6 | 83.6 | 7.15 | 0.67 | 13.9 | 96.8 | 94.7 | 8.20 | 1.24 |
| 15.8 | 81.4 | 82.4 | 6.69 | 0.82 | 16.6 | 95.8 | 89.6 | 4.89 | 1.25 |
| 13.7 | 87.8 | 87.5 | 7.39 | 0.71 | 15.9 | 97.2 | 94.8 | 2.05 | 0.79 |
| 16.6 | 87.6 | 84.4 | 8.30 | 0.87 | 16.1 | 96.8 | 94.1 | 3.48 | 0.98 |
| 15.5 | 94.7 | 89.8 | 7.88 | 0.98 | 14.8 | 96.2 | 94.4 | 6.52 | 0.95 |
| 15.9 | 94.5 | 92.8 | 7.24 | 1.11 | 14.4 | 97.2 | 96.6 | 7.09 | 0.74 |

从$U$到$V$的一个Fuzzy关系，即$\underset{\sim}{R}$是$U\times V$上的一个Fuzzy子集。

我们选择了上海市曹杨污水处理厂为讨论对象，对该厂扩建以来正常运行下的大量数据，用数理统计方法处理，按每一旬得出各个评判因素的平均值，如表4-4-1。

寻求Fuzzy关系$\underset{\sim}{R}$，具体步骤如下：

1.级别的确定

根据实际运行情况作相对的划分，如表4-4-2所示。

级　别　划　分　　　　表 4-4-2

| $U$ | $V$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ |
| $u_1$ | 18以上 | 17～18 | 16～17 | 15～16 | 15以下 |
| $u_2$ | 93以上 | 89～93 | 85～89 | 80～85 | 80以下 |
| $u_3$ | 93以上 | 89～93 | 85～89 | 80～85 | 80以下 |
| $u_4$ | 7以上 | 7～8 | 8～9 | 9～10 | 10以下 |
| $u_5$ | 0.9以下 | 0.9～1.0 | 1.0～1.1 | 1.1～1.2 | 1.2以上 |

2.确定评判因素Fuzzy集

根据原始数据分别着眼于各个评判因素，确定各个因素Fuzzy集$\underset{\sim}{A}_1$，$\underset{\sim}{A}_2$，$\underset{\sim}{A}_3$，$\underset{\sim}{A}_4$，$\underset{\sim}{A}_5$。

1）$\underset{\sim}{A}_1$的确定

设论域$X$为“每天处理污水量”（以千吨）计，Fuzzy集$\underset{\sim}{A}_1$的隶属函数定义为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 15\\ \dfrac{2}{9}(x-15)^2 & 15<x\leqslant 16.5\\ 1-\dfrac{2}{9}(x-18)^2 & 16.5<x\leqslant 18\\ 1 & x>18\end{cases}\qquad(4\text{-}4\text{-}1)$$

2）$\underset{\sim}{A}_2$的确定

设论域$X$为“$BOD_5$去除率”（%），Fuzzy集$\underset{\sim}{A}_2$的隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 80\\ 2\left(\dfrac{x-80}{13}\right)^2 & 80<x\leqslant 86.5\\ 1-2\left(\dfrac{x-93}{3}\right)^2 & 86.5<x\leqslant 93\\ 1 & x>93\end{cases}\qquad(4\text{-}4\text{-}2)$$

3）$\underset{\sim}{A}_3$的确定

设论域$X$为“$SS$去除率”（%），Fuzzy集$\underset{\sim}{A}_3$的隶属函数与$\underset{\sim}{A}_2$的隶属函数式相同。

4）$\underset{\sim}{A}_4$的确定

设论域$X$为"处理一吨污水所需的空气量"（立方米/吨）。Fuzzy集$\underset{\sim}{A}_4$的隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_4}(x)=\begin{cases}1 & x\leqslant 7\\ 1-2\left(\dfrac{x-7}{3}\right)^2, & 7<x\leqslant 8.5\\ 2\left(\dfrac{x-10}{3}\right)^2, & 8.5<x\leqslant 10\\ 0 & x>10\end{cases} \quad (4\text{-}4\text{-}3)$$

5）$\underset{\sim}{A}_5$的确定

设论域$X$为"去除1公斤$BOD_5$的耗电度数"，Fuzzy集$\underset{\sim}{A}_5$的隶属度函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_5}(x)=\begin{cases}1, & x=0.9\\ 1-2\left(\dfrac{x-0.9}{0.3}\right)^2, & 0.9<x\leqslant 1.05\\ 2\left(\dfrac{x-1.2}{0.3}\right)^2, & 1.05<x\leqslant 1.2\\ 0, & x>1.2\end{cases} \quad (4\text{-}4\text{-}4)$$

3.确定$U\times V$的Fuzzy子集$\underset{\sim}{R}$

$$\underset{\sim}{R}=\begin{array}{c}\\ u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\\ u_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35}\\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45}\\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55}\end{bmatrix}\end{array} \quad (4\text{-}4\text{-}5)$$

其中，$r_{ij}$表示从第$i$个因素着眼，对被评对象作出第$j$种评语的可能程度。根据划定的级别，统计出表4-4-1中各因素的数值符合于某等级的个数，并计算其在该因素中所占的比例，此比值即为$r_{ij}$。例如"$SS$去除率"在表4-4-1中的值对应于"很好"这一等级（即93以上的）的个数为16个，占总数36的44%，所以取$r_{31}=0.44$，其余类推。于是得到如下Fuzzy关系矩阵$\underset{\sim}{R}$。

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.06 & 0.14 & 0.25 & 0.19 & 0.36\\ 0.64 & 0.20 & 0.08 & 0.08 & 0\\ 0.44 & 0.28 & 0.11 & 0.14 & 0.03\\ 0.28 & 0.50 & 0.17 & 0.06 & 0\\ 0.50 & 0.20 & 0.14 & 0.06 & 0.10\end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{R}$是一个单因素评价矩阵，比较客观地全面地反映了曹杨污水处理厂在经营管理方面的实际情况。

如果某一天（或某一旬）的一组实测数据为

$$\underset{\sim}{A}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5\end{array}\\ (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5)\end{array}$$

则根据$a_i(i=1, 2, \cdots, 5)$的值，分别在$\underset{\sim}{A}_i(i=1, 2, \cdots, 5)$中求得相应的隶属度值$\mu_{\underset{\sim}{A}_i}(a_i)$，于是把$A$模糊化了，从而得到一个Fuzzy集（着眼点）。

$$\underset{\sim}{A}=(\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(a_1),\ \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(a_2),\ \mu_{\underset{\sim}{A}_3}(a_3),\ \mu_{\underset{\sim}{A}_4}(a_4),\ \mu_{\underset{\sim}{A}_5}(a_5)).$$

按
$$\underset{\sim}{A}(\in\mathscr{F}(U))\to\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}\in\mathscr{F}(V)$$

则可获得这一天（或这一旬）的综合评价：

$$\underset{\sim}{B}=(\mu_{\underset{\sim}{B}_1}(v_1),\ \mu_{\underset{\sim}{B}_2}(v_2),\ \mu_{\underset{\sim}{B}_3}(v_3),\ \mu_{\underset{\sim}{B}_4}(v_4),\ \mu_{\underset{\sim}{B}_5}(v_5))$$

对所得结果进行归一化，然后，我们取隶属度最大的那一个作为这一天（或一旬）污水处理效果的综合评判结果，这是有其合理性和说服力的。

## 二、应 用 实 例

上海曹杨污水处理厂1981年11月上旬、中旬的各项评判因素的平均数据分别为：

$\underset{\sim}{A}_{上}$=(13.9千吨/天，96.8%，94.7%，8.2米$^3$/吨，1.24度/公斤$BOD_5$)

$\underset{\sim}{A}_{中}$=(16.6千吨/天，95.8%，89.6%，4.89米$^3$/吨，1.25度/公斤$BOD_5$)

按前述步骤Fuzzy化以后得，

$$\underset{\sim}{A}_{上}=(0,\ 1,\ 1,\ 0.68,\ 0),\quad \underset{\sim}{A}_{中}=(0.53,\ 1,\ 0.68,\ 1,\ 0)$$

根据$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}$，可求得

$$\underset{\sim}{B}_{上}=\underset{\sim}{A}_{上}\circ\underset{\sim}{R}=[0,\ 1,\ 1,\ 0.68,\ 0]\circ\begin{bmatrix}0.06 & 0.14 & 0.25 & 0.19 & 0.36\\ 0.64 & 0.20 & 0.08 & 0.08 & 0\\ 0.44 & 0.28 & 0.11 & 0.14 & 0.03\\ 0.28 & 0.50 & 0.17 & 0.06 & 0\\ 0.50 & 0.20 & 0.14 & 0.06 & 0.10\end{bmatrix}$$

$$=(0.64,\ 0.50,\ 0.17,\ 0.14,\ 0.03)$$

类似可得：$\underset{\sim}{B}_{中}=(0.64,\ 0.50,\ 0.25,\ 0.19,\ 0.36)$

进行归一化后得

$$\underset{\sim}{B}_{上}=(0.43,\ 0.34,\ 0.11,\ 0.09,\ 0.02)$$

$$\underset{\sim}{B}_{中}=(0.33,\ 0.26,\ 0.13,\ 0.09,\ 0.19)$$

取隶属度最大的那个等级作为评判结果，1981年11月上旬属于“很好”的隶属度为0.43。中旬属于“很好”的隶属度为0.33。显然，上旬的经营管理比中旬好，这个结论经有关专家评定是对的。

如果分别从单因素孤立地来看，似乎上旬的各项指标并不比中旬好。而综合评判的结果是：中旬比上旬差。其原因在于中旬的第四项指标每处理一吨污水仅用去4.89米$^3$，说明中旬鼓风机的开机时间（或台数）仅为上旬的一半，而第五项电耗却是一样的，说明电耗有浪费。

通过实际数据对数学模型的检验，其结果经专家评议，认为是符合污水厂实际处理效果的。Fuzzy综合评判方法是可行的，它不仅可以促使污水处理厂积极搞好经营管理、

经济核算，而且为污水处理厂的Fuzzy控制打下基础。

## §4-5 大桥工程方案选择的模糊决策[63]

1985年，冯可君、邓瑞玲应用多层次综合评判模糊数学模型，对湖南省湘潭市湘江第二大桥工程的三个方案进行了计算，取得了良好效果。

### 一、数 学 模 型

在城市规划建设中，如何选择最优工程方案，是一个经常遇到的问题。这同时又是一个合理地利用人力、物力、财力和自然环境、提高城市规划效益的关键性问题。以前，较为成型的方法即“主要因素法”，选择影响因素中的最主要几项因素来比较，而对于次要的因素，特别是难于精确用数字表示、只能用语气缀词描述的因素， 往往忽略不计。因此，白白损失一些信息，尤其是，这种方法遇到不同方案、不同主要因素优越性互相交叉的情况甚至会失效。现应用模糊数学中的多层次综合评判法来计算这类问题，使那些用文字描述的项目可以参加运算，以利用全部因素，得到比前者更为合理、更为准确的结果。

设因素集为$V$，决断集为$U=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$，由实践经验和推理得到一个从$V$到$U$的映射$\underset{\sim}{R}_i$，如表4-5-1所示。

从 $V$ 到 $U$ 的 Fuzzy 映射　　　　表 4-5-1

| 评语 | | | 等级 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 损失 | 造价 | 受益 | 隶属度 | | | | | | |
| 很小 | 很低 | 很大 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.33 | 0.67 |
| 小 | 低 | 大 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 |
| 较小 | 较低 | 较大 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 |
| 一般 | 一般 | 一般 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 |
| 较大 | 较高 | 较小 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 | 0 |
| 大 | 高 | 小 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 很大 | 很高 | 很小 | 0.67 | 0.33 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

将上述Fuzzy映射$\underset{\sim}{R}_i$的全体向量并列起来得到一个矩阵：$\underset{\sim}{R}_i=(r_{ij})_{n\times m}(i=1, 2, \cdots n; j=1, 2, \cdots, m)$，叫做综合评判的变换矩阵。

几个方案多层次综合评判的步骤如下：

步骤1．对某一方案因素集$V$作划分$P$。并记为

$$V_i=\{V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{im}\} \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

步骤2．对每个$V_i$的$K_i$个因素按下述初始模型作综合评判，设$V_i$的诸因素权数分配为$A_i$，$V_i$的综合评判的变换矩阵为$\underset{\sim}{R}_i$，则得到

$$\underset{\sim}{A}_i \circ \underset{\sim}{R}_i=\underset{\sim}{B}_i=(b_{i1}, b_{i2}, \cdots b_{im}), \ i=1, \cdots, n, \qquad (4\text{-}5\text{-}1)$$

步骤3．$V_i$的综合评判结果是$\underset{\sim}{B}_i$，$\underset{\sim}{B}_i\subset U$，设$V/P$的权数分配为$A$，总的评价矩阵

为：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{B}_1\\ \underset{\sim}{B}_2\\ \vdots\\ \underset{\sim}{B}_n\end{bmatrix}=(b_{ij})_{n\times m}$$

则得到：

$$\underset{\sim}{B}^*=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{A}\circ\begin{bmatrix}\underset{\sim}{A}_1\circ\underset{\sim}{R}_1\\ \underset{\sim}{A}_2\circ\underset{\sim}{R}_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \underset{\sim}{A}_n\circ\underset{\sim}{R}_n\end{bmatrix}, \quad (4\text{-}5\text{-}2)$$

它是对$V$的所有因素(二级模型)的综合评判结果。$\underset{\sim}{A}_i\circ\underset{\sim}{R}_i$（$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}$同）的选用如表4-5-2。

**算 子 选 用 表** 表 4-5-2

| 算 子 | 类 | | 型 |
|---|---|---|---|
| | $M(\wedge\cdot\vee)$ | $M(\wedge,\oplus)$ | $M(\cdot,\oplus)$ |
| $\vee^*$ | $\vee$<br>$a\vee b=\max(a,b)$ | $\oplus$<br>$a\oplus b=\min(a+b,1)$ | $\oplus$<br>$a\oplus b=\min(a+b,1)$ |
| $\wedge^*$ | $\wedge$<br>$a\wedge b=\min(a,b)$ | $\wedge$<br>$a\wedge b=\min(a,b)$ | $\cdot$<br>$a\cdot b=a\times b$ |

步骤4.计算综合评价值

$$W=\underset{\sim}{B}^*\circ C^T \quad (4\text{-}5\text{-}3)$$

式中：$C$——等级矩阵（见表4-5-1），$C^T$为$C$的转置矩阵。

步骤5.对每一规划工程方案重复1～4步骤，计算出各自$W$值。

步骤6.从$W_i$中选出最佳者。

## 二、湘江第二大桥规划工程方案比较

1.原始资料

湘潭市湘江大桥桥位及其空间规模选择的共提出三个规划方程方案。其原始资料共计12项，且按照损失、造价、受益三大项分成子集。三个规划工程方案的原始资料如表4-5-3所示。

2.综合评判计算（仅以甲桥位$M$（V、∧）算子为例）

$$\underset{\sim}{B}_{损甲}=[0.5,\ 0.3,\ 0.1,\ 0.1]\circ\begin{bmatrix}0&0.25&0.50&0.25&0&0&0\\0&0&0.25&0.50&0.25&0&0\\0&0&0.25&0.50&0.25&0&0\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\end{bmatrix}$$

$$=[0\quad 0.25\quad 0.5\quad 0.3\quad 0.25\quad 0.1\quad 0.1]$$

## 大 桥 方 案

表 4-5-3

| 权数 | 大项目 | 权数 | 小项目 | 甲桥位 原始资料 | 甲桥位 经验推理评语或语 | 乙桥位 原始资料 | 乙桥位 经验推理评语或语 | 丙桥位 原始资料 | 丙桥位 经验推理评语或语 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.22 | 损失 | 0.50 | 占用良田（亩/对比百分数） | 126/100 | 较大 | 101/80.2 | 一般 | 98/77.8 | 较小 |
| | | 0.30 | 拆迁房屋（米²/对比百分数） | 13072/100 | 一般 | 38464/294.3 | 很大 | 11570/88.5 | 小 |
| | | 0.10 | 绕道通过地带情况 | 通过缺田地带（4分田/人） | 一般 | 通过缺田地带（4分田/人） | 一般 | 缺田情况不如甲乙突出 | 较小 |
| | | 0.10 | 由下振司去易俗河绕行车损失 | 14.45万元 | 小 | 9.86万元 | 很小 | 70.94万元 | 很大 |
| 0.18 | 工程造价 | 0.50 | 引线工程造价（万元/对比百分数） | 978.98/100 | 一般 | 1215.48/124.2 | 高 | 1088.6/111.2 | 较高 |
| | | 0.1 | 复盖层厚度（米） | 0.8～7.1 | 一般 | 0.8～7.1 | 一般 | 3.83～6.75 | 较高 |
| | | 0.1 | 桥位地形地貌 | 较开阔 | 一般 | 不开阔 | 较高 | 开阔 | 较低 |
| | | 0.30 | 附属工程设施情况 | 复杂 | 较高 | 不利 | 高 | 一般 | 一般 |
| 0.6 | 受益 | 0.50 | 引出过境交通 | 不利 | 较小 | 不利 | 较小 | 最有利 | 大 |
| | | 0.25 | 对区域发展影响 | 一般影响 | 一般 | 影响较大 | 较小 | 不影响 | 大 |
| | | 0.15 | 桥位与建设大道联系 | 较好 | 一般 | 好 | 较大 | 较差 | 较小 |
| | | 0.10 | 由板塘路口至易俗河营运里程 | 10.5公里 | 较小 | 9.55公里 | 较大 | 9.75公里 | 一般 |

$$\underset{\sim}{B}_{\text{造甲}}=[0.5,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.3]\circ\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=[0\quad 0.25\quad 0.3\quad 0.5\quad 0.25\quad 0\quad 0]$$

$$\underset{\sim}{B}_{\text{益甲}}=[0.50\quad 0.25\quad 0.1\quad 0.15]\circ\begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=[0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.25,\ 0.25,\ 0,\ 0]$$

$$\underset{\sim}{B}_{\text{综甲}}=[0.22\quad 0.18\quad 0.60]\circ\begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.50 & 0.30 & 0.25 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.25 & 0.30 & 0.50 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$=[0\quad 0.25\quad 0.5\quad 0.25\quad 0.25\quad 0.1\quad 0.1]$

$W_{甲}=[0\ 0.25\ 0.5\ 0.25\ 0.25\ 0.1\ 0.1]\cdot[-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3]^{T}$

$=-0.25$

仿上计算得：$W_{乙}=-0.84$；$W_{丙}=1.16$

连同其余两算子一起，其结果见表4-5-4。

各方案在不运算下的$W$值　　　　表 4-5-4

| 方案 | 算 | | 子 |
|---|---|---|---|
| | $M(\wedge,\vee)$ | $M(\wedge,\oplus)$ | $M(\cdot,\oplus)$ |
| | $W$ | | |
| 甲 | −0.25 | −1.35 | −0.51 |
| 乙 | −0.84 | −1.49 | −0.76 |
| 丙 | 1.16 | 3.51 | 0.96 |

$M(\wedge,\oplus)$为主因素突出型，算出方案$W$值相差较大。$M(\cdot,\oplus)$为加权平均型，它对各因素依权均衡照顾。由于采用多层次模型，所有单因素的评价未被泯浸，主因素决定型$M(\wedge,\vee)$算出的$W$值仍能反映三方案的内在差别。

从表4-5-4可见，甲乙两方案接近，甲方案稍优于乙方案，丙方案又优于甲方案。故选择的最佳方案为丙方案。这种结论与"讨论湘潭市湘江第二大桥桥位及其空间规模"的结论一致。而此种多层次，多算子综合评判法利用了全部信息，结论比以前更精确，合理。

## §4-6　用系统工程方法对上海新港址进行评价和选优[64]

1984年，王浣尘、吴健中、王鹤祥针对上海市港口选址是一个复杂的大系统的特点，提出了用系统工程方法对新港址进行评价和选优的程序框图和评价指标体系，采用了可能-满意度的多目标决策方法和数学模型，在计算机上进行仿真计算，通过分析得出了新港址的优化方案，为决策提供了科学依据。

目前，上海港的吞吐能力已达到饱和状态。近年来，压船、压货、压客的现象较严重，给我国在政治、经济上造成了损失，仅1980年因候潮、候码头延误外轮11570艘天，相当于损失6900万美元。为适应我国国民经济战略目标的要求和对外贸易进一步发展的需要，必须建设上海新港区。关于上海港新港址，有关方面经多次反复比较、筛选，最后提出了四个方案，即罗泾、七丫口、外高桥、金山嘴。合理地选好上海新港址是建设新港区急待解决的首要问题。对于这类投资额大、工期长、涉及面广的多学科、大规模的项目，有必要在初步可行性研究中采用系统工程方法，对新港址进行评价和选优。

### 一、过程和方法

1.过程

用系统工程的方法对新港址进行评价和选优的程序如图4-6-1所示。

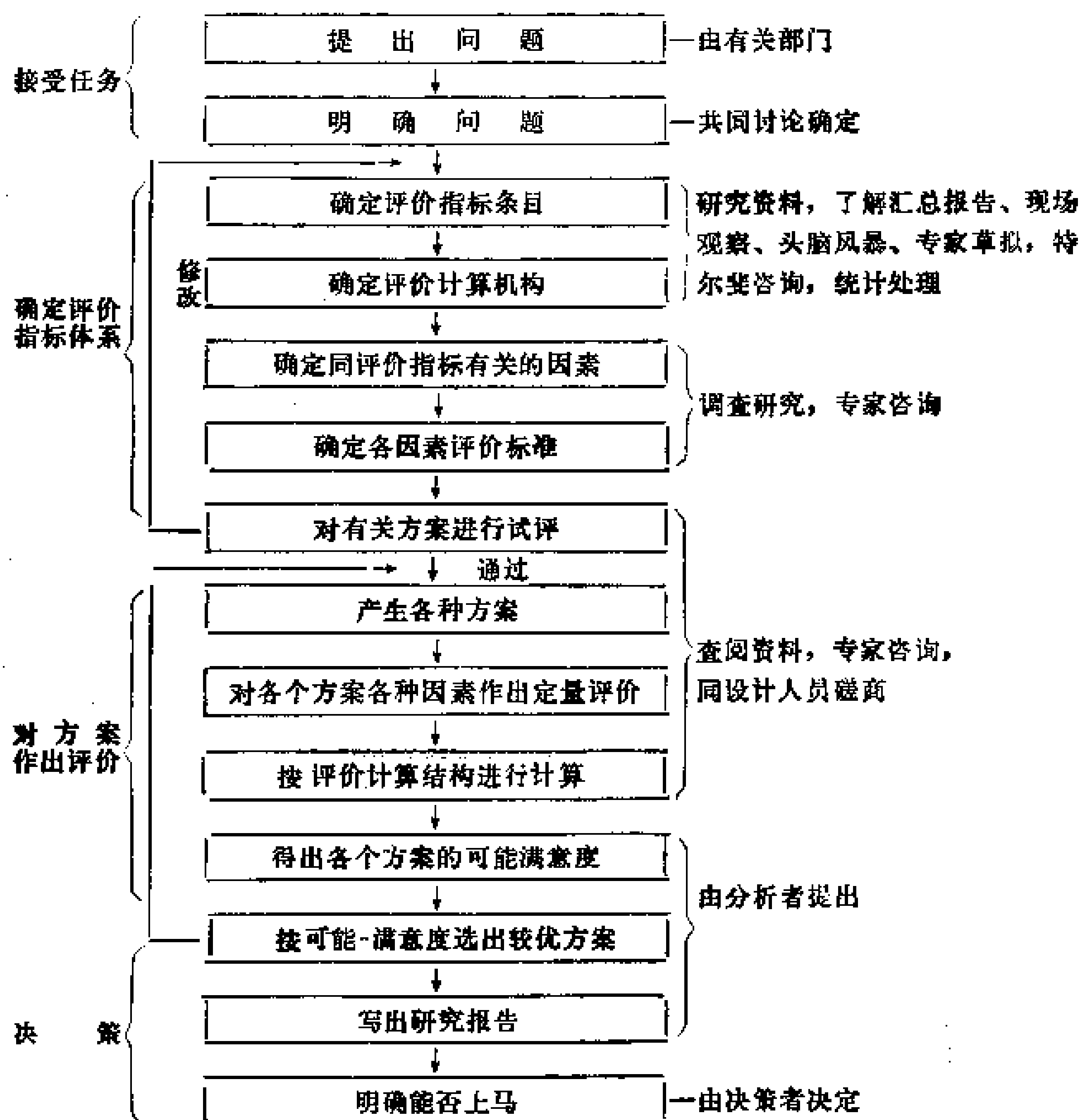



图 4-6-1 对新港址评价和选优的程序框图

**2.方法**

目前可行性研究，还没有形成完整的方法，因此，只要能够完成可行性研究这项工作任务，能够回答"是否可行"和"何者为优"两个问题的科学方法都是可用的。

港口选址是政治、经济、地理条件、技术、交通、城市设施等相互交织在一起的十分庞大复杂的系统，是个多目标决策问题。用一般的评价法很难把各条评价指标在整个系统中的重要程度恰如其分地表达出来。譬如说，很难把那些决定项目能否上马的极重要因素或称为"致命因素"在系统中的地位表达出来。同时，又必须对这样一个错综复杂的系统最终作出科学的评价，尽可能地达到客观条件所容许达到的定量程度，因此，我们采用了可能-满意度的多目标决策方法。

既要满足客观需求，又要考虑实际可能，针对"需要"和"可能"这一对概念给出"满意度"和"可能度"的定量描述。

对一事物某些属性的可能与需要分成两个单因素来考虑，显得简便一些，先分开考虑，再综合起来统一考虑。可能-满意度就是把事物对各种属性的可能度$p(r)$、满意度$q(s)$并合成对于某一属性$a$的可能-满意度曲线。这曲线定量地描述了既可能又满意的程度。以符号$W$表示，$W[0, 1]$。

当$W=1$时，表示百分之百的既可能又满意；当$W=0$时，表示或者完全不可能，或

者完全不能令人满意，或者既是完全不可能，又是完全不能令人满意。这种并合可用符号表示如下：

$$\left.\begin{array}{l} W(a)=\langle p(r)\circ q(s)\rangle \\ S.t.f(r,s,a)=0 \quad r\in R,\ s\in S,\ a\in A \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}6\text{-}1)$$

式中：$S.t$即Subject to，表示并合过程的限制条件；〈 ∘ 〉为并合的运算过程。

从定量角度来看，既有可能，又要满意，因此，一般有关系式：

$$\left.\begin{array}{l} W(a)\leqslant \max\limits_{r(\text{或}s)r,s} \min(p(r),\ q(s)) \\ S.t.f(r,s,a)=0,\ r\in R,\ s\in S,a\in A \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}6\text{-}2)$$

具体要把各分项可能-满意度并合成总的可能-满意度时的计算方法，可以采用多目标决策中的多维价值组合规律，诸如代换、加法、乘法和混合运算等。

例如弱并合是指所并合得到的可能-满意度是最大可能值。即在（4-6-2）中取等号，这时就可动用各种适用的优化技术，各种规划的方法。当$a=r=S$时，就有更简单的形式：

$$W(a)=\min_{r,s}\{p(a),\ q(a)\} \qquad a\in A \qquad (4\text{-}6\text{-}3)$$

这类似于模糊集理论中的"交"（intersection）。

强并合是指以并合的可能-满意度是严格的，即其中引用乘法的公式，用算式表示为：

$$\left.\begin{array}{l} W(a)=\max\limits_{r\text{或}s}\{p(r),\ q(S)\} \\ S.t.f(r,s,a)=0,\ r\in R,\ s\in S,\ a\in A \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}6\text{-}4)$$

当$a=r=s$时，就有

$$W(a)=p(a)\cdot q(a),\ a\in A \qquad (4\text{-}6\text{-}5)$$

这类似于多目标决策准则中的一般乘法规则。

如果在运算中要反映出对可能度或满意度的重视程度有所偏重倚轻的话，则可引入"指数加权法"，这也类似于模糊集理论中的集中（Concentration）和扩张（dilation）的运算，即可用$p^\beta$，$q^r$来代替$p$，$q$。要重视，则$\beta$，$r>1$，要轻视则$\beta$，$r<1$。

上述（4-6-2）～（4-6-5）式的数值计算，在计算机上是容易实现的。如果有$p(r)$，$q(s)$和$f(r,s,a)=0$的函数式，则可能获得相应的公式解。

使用的原则用俗语来说就是：

一好遮百丑——代换法则，不可偏废——加权乘法

好坏搭配——加权加法，模棱两可——混合法则。

当然，也可根据实际要求，开发和采用其他算法。

## 二、评价指标体系

对不同港址进行评价和选优，必须建立能对照和衡量各个送审方案的统一尺度，即评价指标体系。评价指标体系必须科学地、客观地、尽可能全面地考虑各种因素，包括为建设港口所需考虑的全部主要因素，以及港口建成后产生的效果和利弊。这样可以明确地对各方案进行对比和评价，并对其缺陷筹划适当的对策。

由此可见，建立评价指标体系是一切规划和制定方案工作中基础的一环。

通过查阅大量资料，现场观察，走访各有关新港区的可行性研究分项咨询单位，多次与上海港务局有关领导、设计人员讨论，并通过两轮特尔斐（Delphi）法咨询，经过反复研究，推敲设计出与国家政策一致性3条、技术20条、经济13条、与城市和地区发展规划的关系7条、与全国交通网联系8条、资源11条，环境保护4条、受国内其它项目影响2条、军事2条、共9大类70条评价指标。并对9大类和70条指标的重要程度区分为不同等级，即极重要$A$、很重要$B$、重要$C$、应考虑$D$、意义不大$E$、不必考虑$F$、详见图4-6-2。

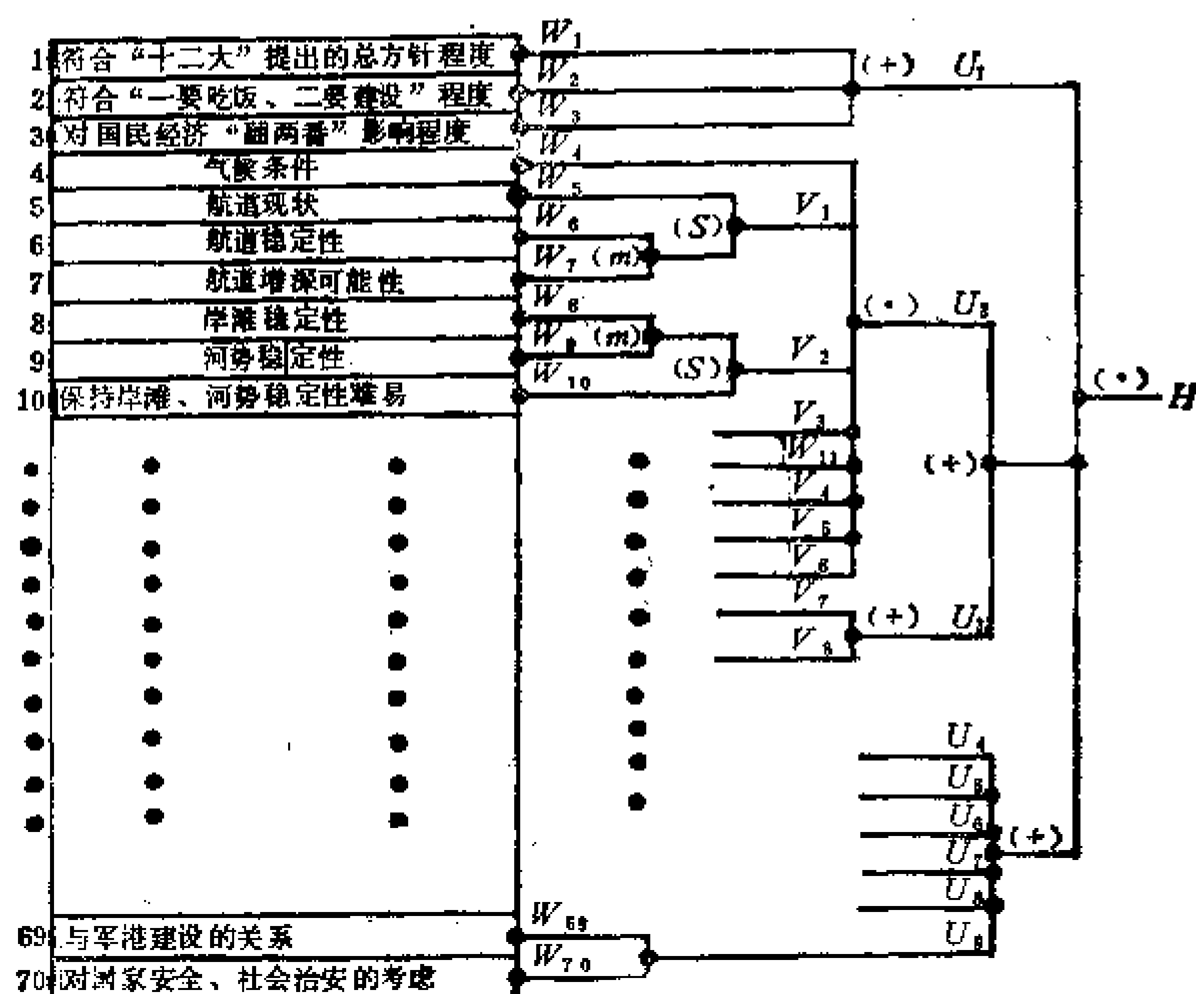



图 4-6-2　评价指标体系

$H$—选址点可能-满意度；$U_1$—与国家政策一致性；$U_2$—技术；$V_1$—航道；$V_2$—岸滩河势；$V_3$—回游；$V_4$—主要建筑物；$V_5$—规模；$V_6$—运行，维修；$U_3$—经济；$V_7$—直接经济；$V_8$—间接经济；$U_4$—与城市、地区发展关系；$U_5$—交通网联系；$U_6$—资源；$U_7$—环境保护；$U_8$—受国内重大项目影响；$U_9$—军事

## 三、评价指标定量化

如果只是定性地描述港区选址点而没有定量的描述，就难以作出科学的分析，那就只能停留在泛泛空谈的阶段，就会“心中无数”。

为此，对70条评价指标逐条地制定评价的因素和标尺，也就是对评价指评的定量化。

评价的因素：用某物理量或参数来衡量。

评价的标尺：对评价的因素定量地规定其临界值，即判断优劣的上、下界限值。

对于评价指标，通过查阅资料，访问设计者、用户、或实践经验能够制定出评价的因素和标尺，但应尽量力求确切、符合实际情况。

70条评价项目，基本上可以分为三大类：

第一类，能直接定量的条目。例如第24条“投资额”，系指各选址点的投资额，由于规模不一样，可用单位泊位的总投资额来衡量。

第二类，可间接定量的条目。例如第四条"气候条件"，系指所选港址的风力、风速、港区的波浪高度等自然条件，这些因素的优劣很难直接定量。对港口来说，气候条件主要影响装卸作业，为此，可以选用全年可装卸作业的天数来衡量。衡量的依据如后：

（1）日本有关港口规划指出，港口装卸作业条件为：风力≤5级；风速10～15米/秒；港内浪高0.5～1米；在上述条件下全年可作业天数329～347天。

（2）我国江河总平面设计规范指出：港口全年可作业天数应28×12＝336天。

（3）上海黄浦江沿岸码头全年作业300～330天。

（4）风、浪、雨、雪等气候条件对装卸作业有影响。装卸货物的种类以及停靠码头的船泊与风、浪间的方向等因素对装卸作业有影响。

综上所述，港口全年装卸作业的最高天数为340天，不少于这个天数就可以说完全满意了，即满意度$q_A=1$。如以每周工作日3天计算，扣除国定假日7天，全年工作日149天，圆整为150天，此种情况可以认为是很不满意的，此时，$q_A=0$。所以，$R_A=340$天，$R_B=150$天。随着$R_B$向$R_A$递增，其满意度亦正比例递增。

第三类，定性条目的定量化。

例如第8条"岸滩稳定性"。系指港区0米，－2米，－5米，……等深线离岸距离的变化。

衡量岸滩稳定性问题，至今尚难作出定量的描述，很难说当等深线离岸距离的变化在多少米范围内是稳定的，或者说，在多少年内等深线离岸的变化超过多少米时，认为是稳定的。

对于本类型性质的指标，只能借助于模糊理论的概念和方法，使其半定量化，"评分"就是最常用的一种简便方法。本条目划分等级为：

| 稳定 | 较稳定 | 一般稳定 | 不很稳定 | 不稳定 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.8 | 0.5 | 0.2 | 0 |

70条评价指标经定量化处理如表4-6-1所示。

评价指标定量化　　　　表4-6-1

| 指标序号 | 标尺单位 | $R_A$ | $R_B$ | R | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | (或)分级 | | 金山嘴 | 外高桥 | 七丫口 | 罗泾 |
| 1 | | 分级 | | 0.95 | 0.95 | 0.95 | 0.95 |
| 2 | 亿元 | 30 | 150 | 73.56 | 74 | 89.45 | 17.35 |
| | 年 | 20 | 100 | 23.0 | 27.8 | 37.6 | 43.5 |
| 3 | 千万吨 | 5 | 0 | 6.28 | 6.078 | 6.036 | 1.11 |
| 4 | 天 | 340 | 150 | 300 | 331 | 331 | 331 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 69 | | 分级 | | 1.0 | 0.8 | 0.5 | 0.5 |
| 70 | | 分级 | | 1.0 | 0.8 | 0.5 | 0.5 |

## 四、数　学　模　型

系统工程方法的主要手段是依靠数学模型进行分析和运算。数学模型是对具体事物主要性质的定量描述，是对具体事物所关心的性质更本质更深刻的反映，建立模型必须吃透普遍联系，抓住本质和要害，否则会停留在“数学游戏”上。对系统的各组成部分间的关系，越是揭示清晰、深刻、精确，就越能真实地反映系统的本质。模型是现实系统的代表，但不是现实系统本身，一旦把能够反映真实系统的模型建立起来，就能把具有千丝万缕联系的复杂事物典型化，就具有一定的通用性。

港址评价指标体系不仅目标多，影响因素多，而且这些目标、因素间存在错综复杂的相互关系，是一个多目标决策问题。如果一下子就进行一揽子的讨论，是较为困难的。处理这类问题的方法可以是先分成简单的几个单目标，分层次逐级地综合成单目标即总目标，构成一个目标树。

在分别得出70条评价指标可能-满意度$W_K$的基础上，根据它们在“评价指标体系”中重要程度的等级和相互间的关系，应用多目标决策中多维价值组合规则，并合成分指标可能-满意度值$V_i$，进一步并合成九大类指标可能-满意度$U_i$，最后综合成总的可能-满意度$H_i$，也就是某港址方案的可能-满意度。

可用算式表述如下：

$$H = \langle U_1 (\bullet) \langle U_2 (+) U_3 \rangle (\bullet) \langle U_4 (+) U_5 (+) u_6 (+) U_7 (+) U_8 (+) U_9 \rangle\rangle \quad (4\text{-}6\text{-}6)$$

式中：

$$U_1 = \langle W_1 (+) W_2 (+) W_3 \rangle$$

$$U_2 = \langle W_4 (\bullet) V_1 (\bullet) V_2 (\bullet) V_3 (\bullet) W_{13} (\bullet) V_4 (\bullet) V_5 (\bullet) V_6 \rangle$$

……

$$U_8 = \langle W_{67} (+) W_{68} \rangle$$

$$U_9 = \langle W_{69} (+) W_{70} \rangle$$

$$V_1 = \langle W_5 (s) \langle W_6 (m) V_7 \rangle$$

$$V_2 = \langle\langle W_8 (m) W_9 \rangle (s) W_{10} \rangle$$

……

$$V_{10} = \langle (W_{56})^{\left(\frac{1}{W_{57}}\right)} (+) W_{58} \rangle$$

$$V_{11} = \langle W_{60} + W_{61} \rangle$$

$W_k$——七十条评价指标的可能-满意度，$k = 1 \sim 70$；

$V_k$——分项评价指标的可能-满意度，$k = 1 \sim 11$；

$U_k$——大类评价指标的可能-满意度，$k = 1 \sim 9$；

$H_i$——港址评价指标可能-满意度，$i = 1 \sim 4$。

这样，70条评价指标分层次、逐级的并合，得到对于港址评价和选优总的可能-满意度$H$的数学表达式，即数学模型。同样，可画出相应的港址评价指标体系的计算结构如图4-6-2。

## 五、仿　真　计　算

建立数学模型是为了能对各选址方案最终得出定量的描述。对于每个送审的港址方案

的总的可能-满意度值，需要代入200多个数据，解20多个方程才能得出。在完成港区选址数学模型后，编辑程序并在BURROU HS-1955机上进行了仿真计算，最终得出四个选址点总的可能-满意度$H_i$。程序框图如图4-6-3。

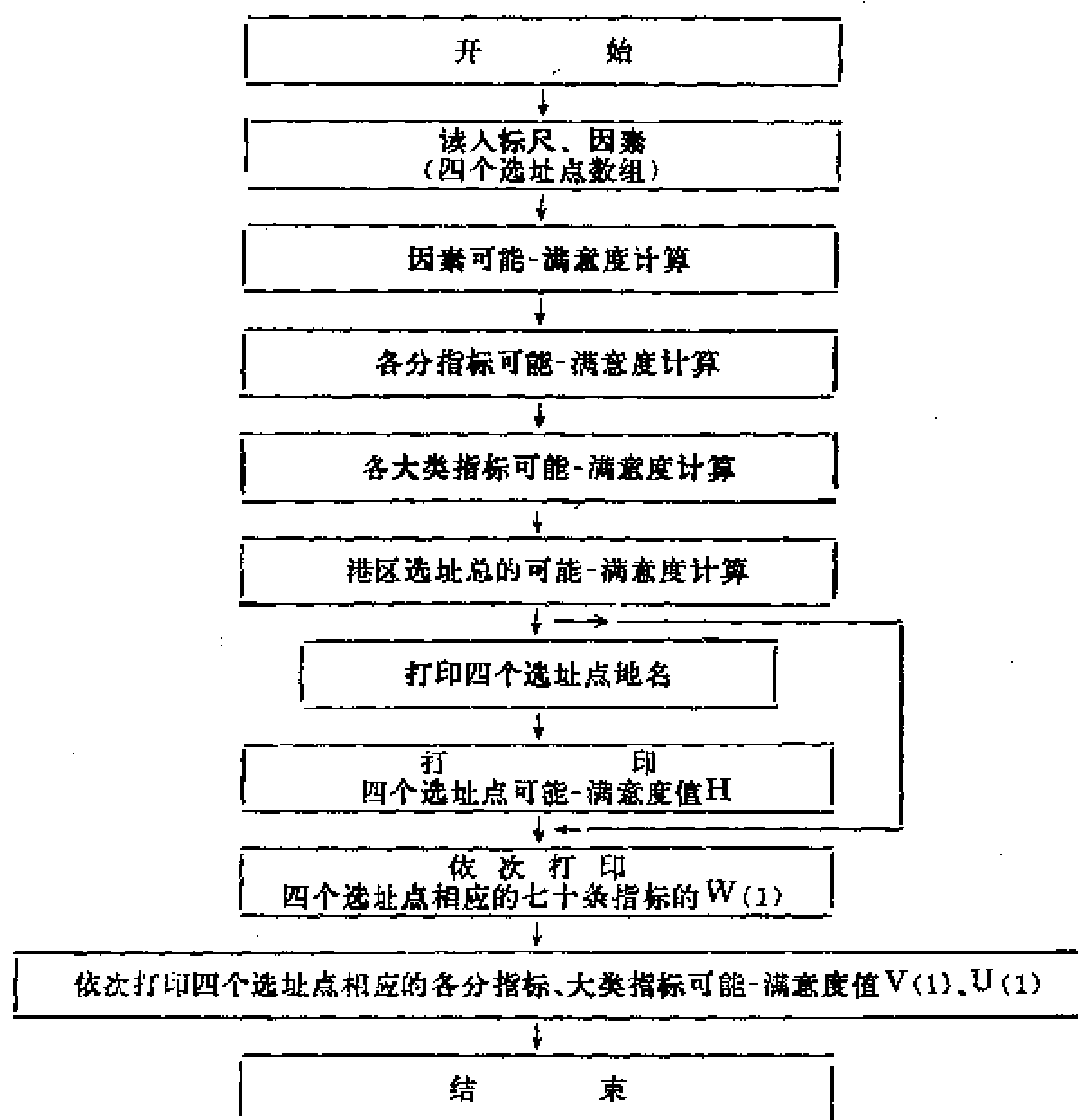



图 4-6-3　求可能-满意度的程序框图

## 六、分　析

经过仿真计算，最后得出四个选址点的总可能-满意度值，按其数值大小依次为：$H_{金山嘴}=0.78767$；$H_{外高桥}=0.782403$；$H_{七丫口}=0.73931$；$H_{罗泾}=0.672645$。

（1）我们从70条指标的可能-满意度值$W_k$的大小，可看出四个选址点各大类指标$U_k$优劣的原因；

（2）我们进一步从九大类各别的可能-满意度值$U_k$来考虑，就可以看出总的可能-满意度值$H_i$。例如，由于金山嘴$U_{1j}$、$U_{4j}$、$U_{8j}$、$U_{9j}$等四项均为最大，$U_{1j}$在九大类中又是属于极重要的等级，至于交通、资源方面虽属最差，但其与另外几个选址点比较起来，差距并不太大，因此，使金山嘴在四个选址点中为最佳方案。

（3）金山嘴与其他三个选址点相比较其$H$值为最大，但其绝对值$H$还未达到优、良等级，其原因是回淤量过大，建设周期过长，再加上征地、环保、交通等项目因素上的缺陷。因此，建议对金山嘴回淤量等作深入研究。

（4）作了灵敏度分析计算，为深入分析提供了更多的信息。

## 七、结　论

通过“评价指标体系”，运用可能-满意度方法建立港址评价和选优的计算结构、数学模型，经计算机计算，可得如下结论：

（1）金山嘴、外高桥、七丫口、罗泾均可作为上海新港区选址点，因为它们的可能-满意度值$H$都大于0.6，即全部及格，建议市政府及有关领导要把四个选址点都作为备用点。

（2）如按可能-满意度值$H$的相对大小排列，则次序为金山嘴、外高桥、七丫口、罗泾，但金山嘴的$H$值小于0.8，属于中等，并非良和优，建议对薄弱的关键因素作深入研究。

（3）经灵敏度分析，上述结论比较稳定。这说明上述结论的可信程度较高。

总之，可归纳为一句话，金山嘴、外高桥、七丫口、罗泾四个新港区选址点全部及格，都不很好，各有千秋，而金山嘴略胜一筹。

# §4-7　用模糊聚类分析自动识别汽车类型

1985年，李月景提出了利用模糊聚类分析自动识别汽车类型的方法，给出了识别系统；并利用$Z$-80微型机设计的识别分类器。列举了汽车类型的分类，编制了识别程序。识别结果可随时显示于荧光屏上或打印输出。实现了交通要塞的自动化管理。

## 一、汽车识别系统

对于公路、城市交通，特别是桥梁、隧道等交通要塞的自动化管理，是一个很重要的课题。如上海浦江隧道，每小时车流量多达800多辆。需投入大量人力进行交通管理，工作繁忙，极需要实现现代化科学管理。自动识别汽车类型、自动监控、记录及积算费用乃是减轻大量劳动强度、提高效率，进行科学管理的主要任务。

汽车类型自动识别分类的识别系统框图如图4-7-1所示。系统由摄像装置、转换器及特征抽取装置和识别分类器组成。摄像装置对待测对象进行测量，转换成“电图像”，送往转换器作消除噪声等预处理，将信息归一化及数字化，再由特征抽取装置抽取反映各类汽车特征的信息，送往识别分类器，按模糊聚类分析进行识别分类。

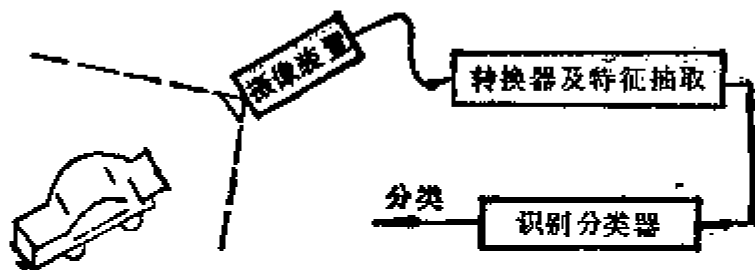



图 4-7-1　汽车识别系统框图

## 二、汽车识别的特征选取

现今的汽车种类繁多、不胜枚举。现选择图4-7-2所示的几种典型汽车作识别分类举例。其它类型汽车可依次类推。

通常的各类汽车，其车身侧视图的区别在于底部长度，顶篷位置、宽度及高度不同，但都可抽象成一个近似矩形（汽车的下部）和一个近似梯形（汽车上部）的叠加，这两种

几何形状的相对位置可以用线段表示（如图4-7-2第一图小汽车中的点划线所示）。该线段成"I"字形，考虑到检查方便，可将上下两边延伸到上下轮廓线上，中间垂直线段为顶线的中垂位置，这样，如图4-7-2所示。可抽取四个长度$A$、$B$、$C$、$D$和垂高$H$ 5个参数表示其特征。实际汽车的具体尺寸如图4-7-2右侧所示。

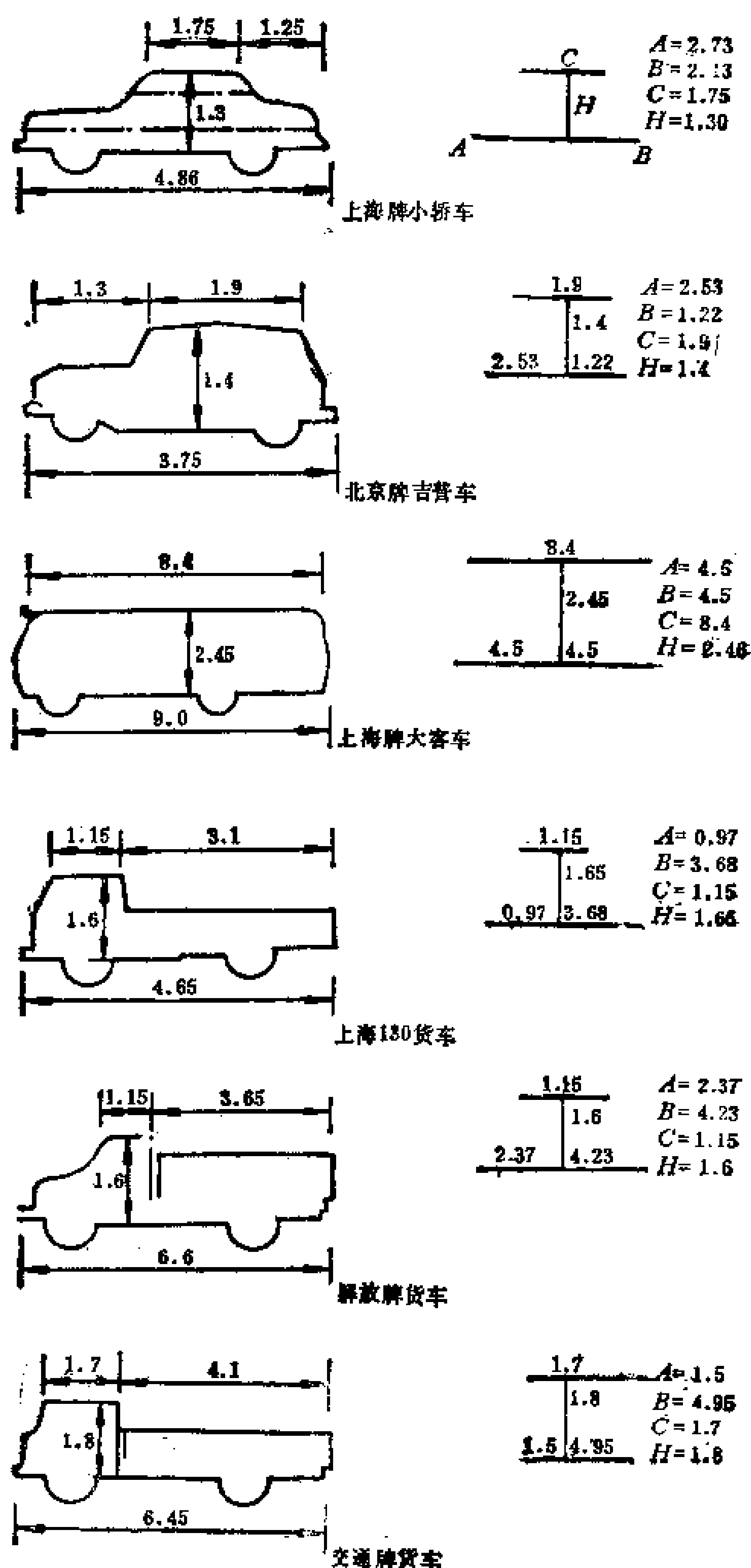



图 4-7-2 几种典型汽车类型

## 三、模糊相似矩阵$\mu_R$的建立及入截集$R_\lambda$的确定

1.模糊相似矩阵$\mu_R$的建立

在具体进行识别时，首先将上述汽车的最典型特征参数全部送入计算机作为识别的标准模式，也就是模糊聚类的聚类中心，再输入被识别对象所抽取的特征参数，然后建立相似矩阵。在建立相似关系时，关键是计算$\mu_i$与$\mu_j$之间的相似程度$r_{ij}$。

$r_{ij}$有各种不同的求法。为了反映各样本之间明显的区别，根据模糊集合理论及描述方法，相似程度取为：

$$r_{ij}=e^{-(|a_i-a_j|+|b_i-b_j|+|c_i-c_j|+|h_i-h_j|)} \tag{4-7-1}$$

式中：$a_i$，$b_i$，$c_i$，$h_i$等为上述抽取的特征参数。计算出各个$r_{ij}$值后，就建立了模糊相似矩阵$\mu_R$。但还得判别是否符合模糊等价关系，即对$\mu_R$矩阵进行合成。

$$\mu_R\circ\mu_R=\mu_R^2 \tag{4-7-2}$$

再判别$\mu_R=\mu_R^2$否，若符合$\mu_R=\mu_R^2$，则$\mu_R$为模糊等价关系；若$\mu_R\neq\mu_R^2$，再计算$\mu_R^2\circ\mu_R^2=\mu_R^4$，如此重复下去，直到

$$\mu_R^m=\mu_R^{2m} \tag{4-7-3}$$

终止，即得模糊等价关系。对于本方案的初始相似矩阵$\mu_R$来说，经过2次循环，即可获得要求的模糊等价关系矩阵。

2.确定$\lambda$截集$R_\lambda$

$R_\lambda$一般根据经验及实际要求由实验确定。通常考虑两点：（1）取定的$\lambda$值能对被测对象进行确切分类；（2）当被测对象与样本发生明显畸变时，应予拒识。

由模糊等价关系矩阵可见，当$\lambda$取为0.3时，就可将上述六个样本很好地分开。但当被识别对象对于样本有很大畸变时，则很可能产生误识，所以还得根据实际应用的具体情况确定。

由实际测量及大量试验和经验总结得出：各个特征抽取参数与最相似样本参数的最大偏差之和$\Delta_s$为0.24m以上时，已发生较明显的畸变，应予拒识。由此算得$\lambda$值为0.8。当然，该值远大于0.3，所以符合上述第一点要求。$\lambda$值确定后，就可以形成普通等价关系矩阵$\mu_{R\lambda}$，当$r_{ij}\geqslant\lambda=0.8$时，（$\Delta_s<0.24$m），$\mu_{R\lambda}$中相应元素取1，若该元素表示的是待测对象与某一样本间的等价关系，则定能得到确切的分类。当$r_{ij}<\lambda=0.8$时（$\Delta_s\geqslant0.24$m），$\mu_{R\lambda}$中相应的元素取零。若表示待识对象与各样本间关系的元素为零，则机器拒识，并打印拒识标志。

由此根据$\mu_{R\lambda}$矩阵的聚类结果，就可以容易地对待测汽车进行识别分类。

## 四、识别所用设备

识别所用设备如图4-7-3所示。其中摄像装置采用SJX型工业摄像机，摄像管靶面为光电导管，成像尺寸为9.6×1.28（mm）²，灰度级≥16级，分辨力为水平≥400线；垂直≥350线；，工作照度为300Lux。

摄像后的信息送往转换器，其任务是将输入的模拟信号转变为计算机接口能识别的，并满足一定要求的数字信号。其中包括模数转换器（$A/D$）、数模转换器（$D/A$）、行列采样发生器和控制器、图像矩阵参数控制等部分。

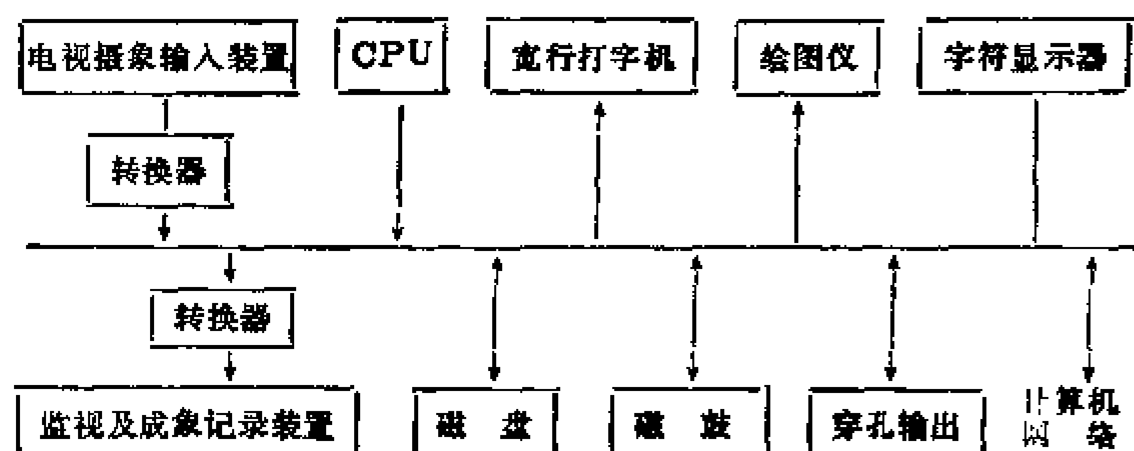



图 4-7-3 小型图像识别系统

模数转换器（$A/D$）是将输入的模拟信号转变为数字信号，当分辨率为50线/毫米时，取20微秒/象点。所以，$A/D$的采样变换频率$f_s=50$千周；若分辨率为25线/毫米时，其$f_s$为25千周。数模转换器（$D/A$）系将数字信号转变为模拟信号，送往低通滤波器，至监视及记录成像装置。转换器框图如图4-7-4所示，其中$A/D$转换器是反馈比较装置。$D/A$系权电阻式转换器。两者的转换精度都达到八位。$A/D$前的滤波器用于滤除各种干扰，提高信噪比。$D/A$后的滤波器用于平滑离散模拟信号。装置中并配有切换开关，借此可进行脱机自检。

## 五、识别程序框图及程序

根据上述所推得的模糊相似矩阵$\mu_R$，即可编制识别程序。汽车类型识别程序框图如图4-7-5所示。用BASIC语言编制的程序如下

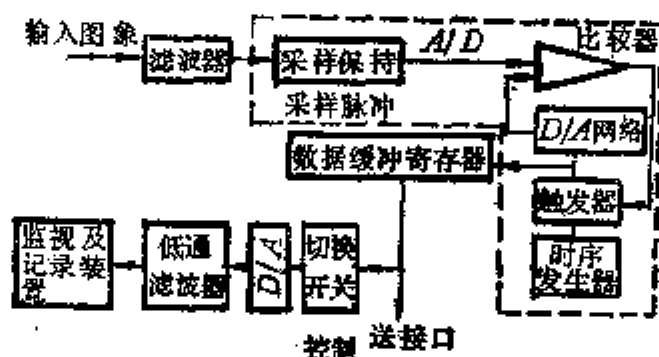



图 4-7-4 转换器框图

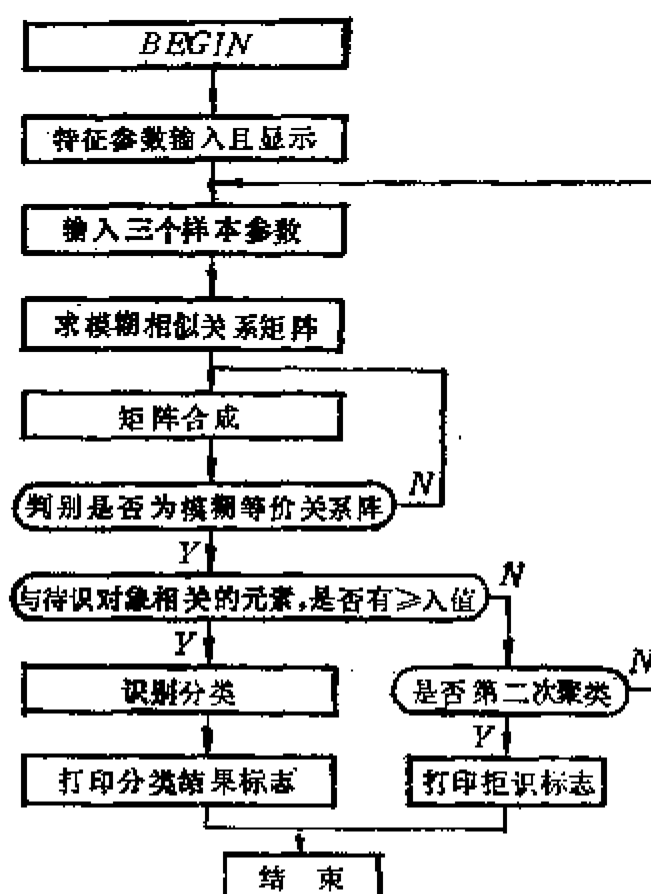



图 4-7-5 识别程序框图

```
10  DATA  2.73, 2.13, 1.75, 1.3, 2.53, 1.22, 1.9, 1.4, 4.5, 4.5, 8.4,2.45
20  DATA  0.97, 3.68, 1.15, 1.65, 2.37, 4.23, 1.15, 1.6, 1.5, 4.95, 1.7,
          1.8
30  DIM   R(4, 4), D(4, 4)
60  G=0
70  @ "A, B, C, D=" ; INPUT A(4), B(4), C(4), H(4)
80  @using "##, ###" , A(4), B(4), C(4), H(4)
90  READ A(1), B(1), C(1), H(1), A(2), B(2), C(2), H(2), A(3), B(3)
```

```
          C(3), H(3)
100  FOR  I=1 TO 4
110  FOR  J=1 TO 4
130  R(I,J)=1/EXP(ABS(A(I)-A(J))+ABS(B(I)-B(J))+ABS(C(I)-
           C(J))+ABS(H(I)-H(J)))
140  R(J, I)=R(I, J)
150  NEXT J
160  NEXT I
170  FOR  I=1 TO 4
180  FOR  J=1 TO 4
190  FOR  L=1 TO 4
200  E(L)=MIN(R(I, L), R(L, J))
210  NEXT  J
220  D(I, I)=Max(E(1), E(2), E(3), E(4))
230  NEXT  J
240  NEXT  I
250  F=0
260  FOR  I=1 TO 4
270  FOR  J=1 TO 4
280  IF  R(I, J)<>R(J, I), THEN  R(I, J)=D(I, J); F=1
310  R(J, I)=D(I, J)
320  NEXT  J
330  NEXT  I
340  IF  F=1  THEN  170
360  FOR  I=1 TO 4
370  IF  D(I, 4)<=0.75  THEN  410
380  IF  G=1  THEN  400
390  ON  I  GOTO  450, 460, 470
400  ON  I  GOTO  480, 490, 500
410  NEXT  I
420  IE  G<>1  THEN  G=G+1  GO TO  90
440  @ "CANNOT DESIDE" ; GO TO  510
450  @ "SHANGHAI CAR" ; GO TO 510
460  @ "BEJING-JEEP" ; GO TO  510
470  @ "SHANGHAI-LIMOUSINE "; GO TO  510
480  @ "130-TRUCK" ; GO TO  510
490  @ "JIEFANG-TRUCK" ; GO TO  510
500  @ "JIAOTONG-TRUCK" ; GO TO  510
510  END
```

计算实例:

```
≫
A,B,C,H=? 2.730,2.130,1.750,1.300   SHANGHAI-CAR***510END***
≫
A,B,C,H=? 2.530,1.220,1.900,1.400   BEIJING-JEEP***510END***
≫
A,B,C,H=? 1.500,4.950,1.700,1.800   JIOTONG-TRUCK***510END***
≫
A,B,C,H=? 2.370,4.230,1.150,1.600   JIEFANG-TRUCK***510END***
≫
A,B,C,H=? 4.500, 4.500, 8.400, 2.450   SHANGHAI-LIMOUSINE***
510END***
≫
A,B,C,H=? 0.970,3.680,1.150,1.650   130-TRUCK***510END***
≫
A,B,C,H=? 0.000,0.000,0.000,0.000   CANNOT DESIDE***510END***
```

## 六、结　论

(1)利用模糊聚类分析自动识别汽车类型无需精密测量仪器，设备。费用较省，并可做到准确快速识别，实际识别一部汽车只需2秒钟，

(2)程序简单，一般微型机即可满足要求，

(3)对上述六类和相近汽车，实际进行识别时无误识、拒识及漏识现象，但对特殊车型如二轮机动车、铲车尚不能做到无误识别。

# §4-8　我国汽车产量的灰色预测[67]

1985年，李良义应用灰色系统理论，以我国汽车历年产量数字为依据、经过累加生成时间序列，用微分拟合建立起灰色动态模型，并用单段函数残差辨识方法，进一步提高了模型精度，从而建立了我国汽车产量的预测模型。用灰色系统理论和方法及传统的回归法对我国汽车产量进行了预测和对比，前者的预测更符合实际。

## 一、引　言

灰色系统理论是邓聚龙教授于1982年首创的一种新型理论，是现代控制论中一个新开辟的领域。包含已知信息的系统称为白色系统，包含未识信息的系统称为黑色系统，而灰色系统是指系统中既包含有已知的信息,又含有未知的或不确切的信息。灰色系统理论已经在大型工程系统、农业系统、生态系统、经济系统、未来系统等领域取得许多可喜的成果，日益显示出它的强大生命力。

现代控制理论中包含有预测的内容，灰色预测是将预测问题看作是一个未来系统进行研究。

汽车是一种量大面广的机械产品，它的产量是国民经济中多种因素的综合体现，是多个因素相互促进、相互影响的结果。从历年的汽车产量统计数字来看，由于统计不全，仅部分数据是已知，从这些信息出发进行灰色预测，为制定汽车工业发展规划的决策提供更多信息。

一般说来，客观世界是物质系统、能量系统、都遵守能量守恒定理，因此都可以用微分方程来描述系统的动态过程。

灰色预测的基本方法是采集数据的时间序列进行生成处理，按微分方程拟合方法建立起灰色动态模型，为了进一步提高预测精度，进行单段函数残差辨别，最后建立修正后的预测模型。

## 二、灰色预测的基本理论

若采集的原始数据时间序列为：

$$\{X_i^{(0)}(k)\},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ h;\ k=1,2,\ \cdots,\ N$$

式中：(0)——表示原始数据；$k$——表示时间序列，$K\in N$；$i$——表示序列数，$i\in h$。

一般说来，由于原始数据的时间序列不可避免地包含有许多随机因素，必须对原始数据加工处理、将随机因素加以弱化，才便于应用微分拟合方法建模。

原始数据经加工处理产生新的数据列，这个加工过程通常称之为"生成"。生成方法有两种：

累加生成$IAGO$是将同数据列的前$K$项元素累加后生成新数列的第$K$项元素，即：

$$X_i^{(r)}(K)=\sum_{m=1}^{K}X_i^{(r-1)}(m) \tag{4-8-1}$$

式中：$(r)$——表示累加生成次数。

例如，第$i$数据列一次累加生成：

$$AGO\{X_i^{(0)}(K)\}=\{X_i^{(1)}(K)\mid K=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$$

$$=\left\{X_i^{(0)}(1),\ X_i^{(0)}(1)+X_i^{(0)}(2),\ \cdots,\ \sum_{m=1}^{N}X_i^{(0)}(m)\right\}$$

$$=\left\{\sum_{m=1}^{K}X_i^{(0)}(m)\right\}$$

累差生成$IAGO$是将同数据列的第$K$项元素减去第$K-1$项元素后生成新数列的第$K$项元素。

一次差记为：

$$a_i^{(1)}(X,K)=X_i^{(0)}(K)-X_i^{(0)}(K-1)$$

依此类推，二次以上的差为：

$$a_i^{(2)}(X,K)=a_i^{(1)}(X,K)-a_i^{(1)}(X,\ K-1)$$

$$a_i^{(r)}(X,K)=a_i^{(r-1)}(X,K)-a_i^{(r-1)}(X,K-1)$$

由此将累差生成的数据列为：

$$\{a_i^{(r)}(X,K)\}=\{a_i^{(r)}(X,1),\ a_i^{(r)}(X,2),\ \cdots,\ a_i^{(r)}(X,N)\} \tag{4-8-2}$$

例如，原始数据列$\{X_i^{(0)}(K)\}$一次累差生成为：

$$IAGO\{X_i^{(0)}(K)\}=\{a_i^{(1)}(X,K)\}$$

$$= \{X_i^{(0)}(1) - X_i^{(0)}(0),\ X_i^{(0)}(2) - X_i^{(0)}(1),\ \cdots,$$
$$X_i^{(0)}(N) - X_i^{(0)}(N-1)\}$$
$$= \{a_i^{(1)}(X,1),\ a_i^{(1)}(X,2),\ \cdots,\ a_i^{(1)}(X,N)\}$$

无论是原始数据列，或者是经过$r$次累加或累差生成所得的新数据列，均可以用“模块”来形象表示。所谓模块就是在数值和时间所构成的二维平面上，由数据列$\{X_i^{(r)}(K)\}$所描述的连续曲线及其相应的时间轴所包围的区域总称。由已知数据或者说白色数据构成的模块为白色模块。由白色模块外推到未来的模块称为预测模块或者说灰色模块。不同类型的白色模块，有相应不同的灰色模块。其典型模块有：

（1）当构成白色模块的函数，随着时间增加出现稳定的趋势，则灰色模块称为极值模块，如图4-8-1所示。




图 4-8-1 极值模块

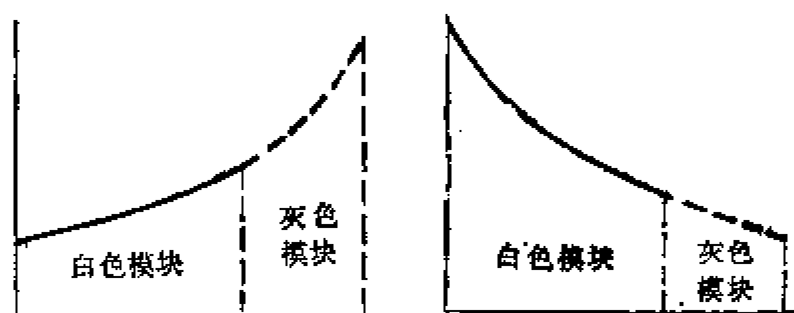



图 4-8-2 延伸模块

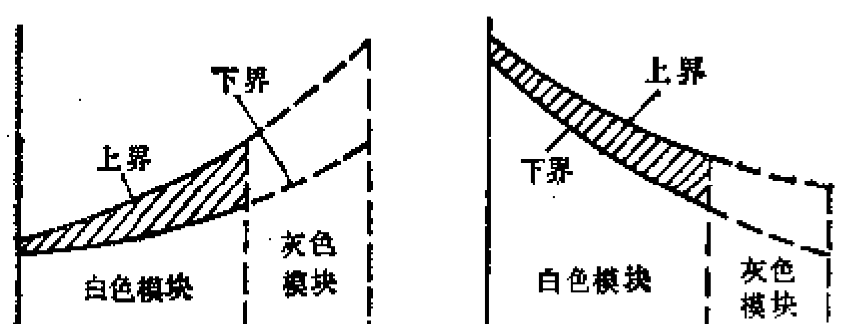



图 4-8-3 边界模块

（2）当构成白色模块的函数，随着时间增加，没有逐渐稳定的趋势，则灰色模块应是该函数直接延伸和外推所构成的模块，称为延伸模块，如图4-8-2所示。

（3）当构成白色模块的函数的数据列是密集型带状分布，灰色模块可以将带状的上、下包络线延伸而得到上下两个边界，称为边界模块，如图4-8-3所示。

模块建立不仅是对数据时间列定形分析，而且为进一步定量研究提供中间数据。对上述时间列所描述的动态过程，需要用微分方程或差分方程去逼近，这就是所谓微分方程拟合。拟合所得到的模型称为灰色动态模型，记为$GM(n,\ h)$，式中$n$——最高阶次，$h$——序列数。其相应的微分方程为：

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{n-i}(X_1^{(1)})}{dt^{n-i}} = \sum_{i=1}^{h-1} b_i X_{i+1}^{(1)} \qquad (4\text{-}8\text{-}3)$$

式中：$a_0 = 1$；$X_i^{(0)} = X_i$，其系数矩阵为

$$\hat{a} = [a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \vdots b_1,\ \cdots,\ b_{h-1}]^T$$
$$= [[A \vdots B]^T \circ [A \vdots B]]^{-1} [A \vdots B]^T \circ y_N] \qquad (4\text{-}8\text{-}4)$$

式中：

$$A=\begin{bmatrix} -a^{(n-1)}(X_1^{(1)},2), & -a^{(n-2)}(X_1^{(1)},2), & \cdots, & -a^{(1)}(X_1^{(1)},2) \\ -a^{(n-1)}(X_1^{(1)},3), & -a^{(n-2)}(X_1^{(1)},3), & \cdots, & -a^{(1)}(X_1^{(1)},3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a^{(n-1)}(X_1^{(1)},N), & -a^{(n-2)}(X_1^{(1)},N), & \cdots, & -a^{(1)}(X_1^{(1)},N) \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(X_1^{(1)}(2)+X_1^{(1)}(1)), & X_2^{(1)}(2), & \cdots, & X_n^{(1)}(2) \\ -\frac{1}{2}(X_1^{(1)}(3)+X_1^{(1)}(2)), & X_2^{(1)}(3), & \cdots, & X_n^{(1)}(3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{2}(X_1^{(1)}(N)+X_1^{(1)}(N-1)), & X_2^{(1)}(N), & \cdots, & X_n^{(1)}(N) \end{bmatrix}$$

$$Y_N=[a^{(n)}(X_1^{(1)},2),\ a^{(n)}(X_1^{(1)},3),\ \cdots,\ a^{(n)}(X_1^{(1)},N)]$$

在灰色预测中，通常采用单序列一阶线性灰色模型$GM(1,1)$。其相应的微分方程为：

$$\frac{dX^{(1)}}{dt}+aX^{(1)}=u \qquad (4\text{-}8\text{-}5)$$

为了对上述微分方程求解，首先要对原始数据列$\{X^{(0)}(K)\}$和一次累加生成数据列$\{X^{(1)}(K)\}$进行以下处理，以确定微分方程的系数。

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(X^{(1)}_{(2)}+X^{(1)}_{(1)} & 1 \\ -\frac{1}{2}(X^{(1)}_{(3)}+X^{(1)}_{(2)} & 1 \\ \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{2}(X^{(1)}_{(N)}+X^{(1)}_{(N-1)} & 1 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}8\text{-}6)$$

$$Y_N=[X^{(0)}_{(2)},\ X^{(0)}_{(3)},\ \cdots,\ X^{(0)}_{(N)}]^T \qquad (4\text{-}8\text{-}7)$$

$$\hat{a}=[B^T\cdot B]^{-1}B^TY_N=[a,u]^T \qquad (4\text{-}8\text{-}8)$$

微分方程式系数确定后可解出：

$$X^{(1)}_{(t)}=\left(X^{(0)}_{(1)}-\frac{u}{a}\right)e^{-a(t-1)}+\frac{u}{a} \qquad (4\text{-}8\text{-}9)$$

这就是经过一次累加生成后的预测模型，还要进一步根据$X^{(1)}_{(t)}$求原始数据列的预测值$\hat{X}^{(0)}_{(t)}$。

$$\hat{X}^{(0)}_{(t)}=X^{(1)}_{(t)}-X^{(1)}_{(t-1)} \qquad (4\text{-}8\text{-}10)$$

原始数据序列的预测值$\hat{X}^{(0)}_{(t)}$和原始数据$\hat{X}^{(0)}_{(t)}$比较就往往会发现精度不够高，为此必须进一步采取单段函数残差辨识。由原始数据列$X^{(0)}_{(t)}$和预测值$\hat{X}^{(0)}_{(t)}$构成零阶残差序列：

$$\varepsilon^{(0)}_{(k)}=X^{(0)}_{(k)}-X^{(0)}_{(k)} \qquad (4\text{-}8\text{-}11)$$

由于残差不是均匀分布的，必须分段进行残差辨识，或者选择残差值较大的一段，因此所选的一段$\varepsilon^{(0)}_{(k')}$的采样起始时刻和原始数据序列$X^{(0)}_{(k)}$的起始时刻是不同的，其中$K'=K-l$，$l$为残差序列的起始时刻与原始数据的起始时刻的残值。

以$\{e_{(k')}^{(0)}\}$为原始残差序列，经过累加生成得$e_{(k')}^{(1)}=\sum_{m=1}^{k'} e_{(m)}^{(0)}$，通过建立灰色动态模型$GM(1.1)$可以得到：

$$\{\hat{e}_{(k)}^{(1)}\}=\{\hat{e}_{(1)}^{(1)},\ \hat{e}_{(2)}^{(1)},\ \cdots,\ \hat{e}_{(k')}^{(1)}\}$$

既可以先找$\hat{e}_{(k')}^{(0)}$，然后和$X_{(K)}^{(0)}$叠加而得修正后的预测数据列$\dot{X}_{(k)}^{(0)}$：

$$\dot{X}_{(k)}^{(0)}=\hat{X}_{(k)}^{(0)}+\hat{e}_{(k')}^{(0)}\cdot\delta(k-l) \qquad (4\text{-}8\text{-}12)$$

式中

$$\delta(K-1)=\begin{cases}1, & K\geqslant l\\ 0, & K<l\end{cases}$$

或者先将$\hat{X}_{(k)}^{(1)}$和$\hat{e}_{(k')}^{(1)}$叠加得：

$$\dot{X}_{(k)}^{(1)}=\hat{X}_{(k)}^{(1)}+\hat{e}_{(k)}^{(1)}\cdot\delta(k-l)$$

再求，

$$\dot{X}_{(k)}^{(0)}=\dot{X}_{(k)}^{(1)}-\dot{X}_{(k-1)}^{(1)} \qquad (4\text{-}8\text{-}13)$$

可以证明上面两种方法所得结果是一致的。

## 三、汽车产量的预测模型

我国历年汽车产量统计数字中唯有从77年至84年间数据是完整的。为此利用这八个数字作原始数据，按$GM(1.1)$建立模型。为了进一步提高精度，按单段函数残差辨识对预测模型进行修正，最后得出我国汽车产量的预测模型为

$$X_{(t)}^{(1)}=69.1e^{0.19846(t-1)}-56.56-(117.57e^{0.11022(t-5)}-108.1)\delta(t-5) \qquad (4\text{-}8\text{-}14)$$

式中，

$$\delta(t-5)=\begin{cases}1 & t\geqslant 5\\ 0 & t<5\end{cases}$$

预测1985年汽车产量：

$$\hat{X}_{(9)}^{(0)}=40.27\text{万辆}$$

预测1986年汽车产量：

$$\hat{X}_{(10)}^{(0)}=50.98\text{万辆}$$

实际产量与灰色预测产量如图4-8-4所示。

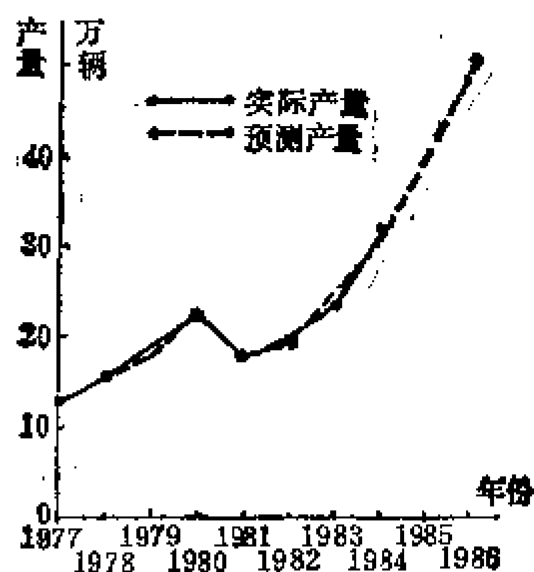



图 4-8-4 实际产量与预测产量

**灰色预测计算表** 表 4-8-1

| 年份 | 实际产量（万辆） | 预测产量（万辆） | 误差（e%） |
|---|---|---|---|
| 1977 | 12.54 | 12.54 | 0% |
| 1978 | 14.91 | 15.00 | 0.6% |
| 1979 | 18.57 | 18.26 | −1.68% |
| 1980 | 22.23 | 22.22 | −0.05% |
| 1981 | 17.56 | 17.56 | 0% |
| 1982 | 19.63 | 19.23 | −2% |
| 1983 | 23.99 | 24.76 | 3.2% |
| 1984 | 32.00 | 31.69 | −0.9% |

## 四、回归分析法进行预测

回归分析法是应用广泛的预测方法之一。为了便于和灰色预测对比，仍用这八个数据，采用回归法进行预测。

根据回归分析法理论，汽车产量的数据时间序列总趋向是属于 $X = AB^t (A,B>0)$ 的指数曲线，是一元非线性曲线，化为一元线性回归法计算。其公式为：

$$X = A \cdot B^t$$

两边取对数：

$$\lg X = \lg A + t \lg B$$

设 $y = \lg X$，$a = \lg A$，$b = \lg B$，则

$$Y = a + bt$$

式中：

$$b = \frac{\sum t y_i - \overline{t} \sum y_i}{\sum t^2 - \overline{t} \sum t} = \frac{\sum t \cdot \lg X_i - \overline{t} \sum \lg X_i}{\sum t^2 - \overline{t} \sum t}$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{t} = \frac{\sum \lg X_i}{n} - b \frac{\sum t}{n}$$

$\overline{Y}$为$Y$的平均值，$\overline{t}$为$t$的平均值。

$n = 8$，$b = 0.04584$，$a = 1.2658$。

$A = 10^a = 18.4417$，$B = 10^b = 1.1113$

预测模型的时间序列为：

$$\hat{X} = 18.4417(1.1113)^t$$

$t = 5$　1985年　31.26（万辆）

$t = 6$　1986年　34.74（万辆）

$t = 10$　1990年　52.99（万辆）

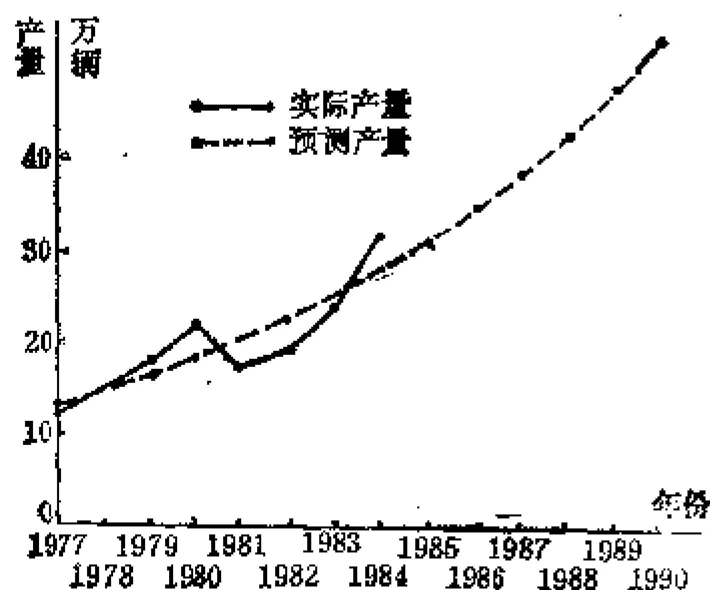



图 4-8-5　实际产量与回归预测产量

1984年汽车产量为32万辆，显然1985年，1986年预测数据是不可信的，1990年产52.99万辆也是偏低的。而且用预测计算公式复算1977～1984年产量，最大误差竟达17%，可见预测精度是很不够的。实际产量与回归预测产量如图4-8-5所示。

回归法预测计算表　　　　表 4-8-2

| 年份 | $t$ | 原始数据 $X_t$（万辆） | $t_2$ | $\lg X_t$ | $\lg X_t$ | 预测值 $\hat{X}_t$（万辆） | 误差 $\frac{X_t - \hat{X}_t}{X_t}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1977 | −3 | 12.54 | 9 | 1.0983 | −3.2940 | 13.44 | −7.2% |
| 1978 | −2 | 14.91 | 4 | 1.1735 | −2.3470 | 14.93 | −0.1% |
| 1979 | −1 | 18.57 | 1 | 1.2638 | −2.2688 | 16.59 | 10.7% |
| 1980 | 0 | 22.23 | 0 | 1.3469 | 0 | 18.44 | 17% |
| 1981 | 1 | 17.56 | 1 | 1.2445 | 1.2445 | 20.49 | −16.7% |
| 1982 | 2 | 19.63 | 4 | 1.2929 | 2.5858 | 22.78 | −16% |
| 1983 | 3 | 23.99 | 9 | 1.3800 | 4.1404 | 25.31 | 5.5% |
| 1984 | 4 | 32.00 | 16 | 1.5051 | 6.0206 | 28.13 | 12.1% |
| Σ | 4 | 161.43 | 44 | 10.31 | 7.0803 | | |

## 五、结　论

（1）灰色系统理论已经成功地应用于未来系统。建立的模型既能较精确地描述过去和现在，也能较好地预测未来。

（2）通过灰色系统理论和回归法分别对我国汽车产量的预测情况来看，灰色系统理论需要的原始数据少，建立的模型误差小（仅3.2%）而回归法需要的原始数据多，建立的模型误差大（达17%）。

（3）对我国汽车产量应用灰色系统理论所建立的模型能较好地描述过去和现在，近期预测也是可信的。汽车产量增长速度高（1984年增长速度高达33.3%），灰色预测反映了这一趋势。全国汽车工业对全国工业、国民经济来说还是一个子系统。它受原材料、机械装备、交通能源、配件供应等等一系列因素影响，还受市场需求，国民经济增长等因素制约。同时我国是一个计划经济国家，汽车生产受有关经济方针政策影响很大。例如，1981年汽车产量是从1980年产量突然下跌21%，就是由于采取对汽车限产，封车节油和以节油定产的做法的结果。因此产量受人为因素影响较大，给预测带来一定的困难。为此要建立汽车产量的长期预测模型还需要应用灰色预测理论对多种因素进行综合考虑。

## §4-9　模糊数学在化纤工艺综合评价中的应用[68]

1983年，徐皞东，王晓波等应用多层次结构综合评判模糊数学模型对两家涤纶纤维厂的工艺流程用计算机进行了计算，取得了良好的效果。

自Fuzzy数学综合评判模型提出后，已在一些专业上得到应用且取得了一定的成果。随着实际应用的深入，发现：（1）问题中的各因素间有的是并列关系，而有的则是因果关系；（2）对于综合评判中的权系数，有的可以给出确切的数值，而有的则很困难，只能说出其重要程度；（3）使用max-min算子运算，尤其是在因素比较多的情况下，往往会失落很多信息，对各因素都要给出一定考虑的描述不能反映出来。鉴于上述情况，我们将过去的单层结构的综合评判模型发展为多层结构的综合评判模型，用Fuzzy子集代替权系数的方法，使提不出准确权系数的困难得到解决，并且提出根据具体情况选用运算子的一些原则。把多层次、多算子、二型Fuzzy综合评判模型应用到对化纤工艺综合评价上，取得了与实际情况相一致的结果。

### 一、数　学　模　型

1.权数分配以数字表示的数学模型

设因素集$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，$u_i$表示被考虑因素，$i=1,2,\cdots,n$；决断集$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，$v_j$表示判断的结果$j=1,2,\cdots,m$；$U$上的Fuzzy集$\underset{\sim}{M}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$叫做权数分配，$\mu_i$叫做$u_i$被考虑的权数。

（1）从$U$到$V$的一个Fuzzy映射$\underset{\sim}{R}$，叫做单因素评判。任给$u_i\in U$有

$$\underset{\sim}{R}(u_i)=(r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{im})\in\mathscr{F}(V) \qquad (4\text{-}9\text{-}1)$$

$\underset{\sim}{R}(u_i)$由经验、推理，从下面的Fuzzy子集表4-9-1查到：

**隶属度** 表 4-9-1

| 评语 | 等 | | | | | 级 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 很好 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.33 | 0.67 |
| 好 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 |
| 较好 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 |
| 一般 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 |
| 较差 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 | 0 |
| 差 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 很差 | 0.67 | 0.33 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

（2）将上述Fuzzy映射$\underset{\sim}{R}$的全体像（向量）并列起来得一个关系矩阵

$$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_{n\times m}\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m。\tag{4-9-2}$$

叫做综合评判的变换矩阵。

（3）给定权数分配$\underset{\sim}{M}$。

（4）对最初一层综合评判进行计算如下：

$$\underset{\sim}{N}=\underset{\sim}{M}\circ\underset{\sim}{R}\tag{4-9-3}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}\circ\underset{\sim}{R}}=\bigvee_{u\in U}{}^{*}(\mu_{\underset{\sim}{M}}(u)\wedge^{*}\mu_{\underset{\sim}{R}}(u,v))\tag{4-9-4}$$

**算子选用表** 表 4-9-2

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\vee^{*}$ | $\vee$<br>$a\vee b=\max(a,b)$ | $\vee$<br>$a\vee b=\max(a,b)$ | $\oplus$<br>$a\oplus b=\min(a+b,1)$ |
| $\wedge^{*}$ | $\wedge$<br>$a\wedge b=\min(a,b)$ | $\cdot$<br>$a\cdot b=a\times b$ | $\cdot$<br>$a\cdot b=a\times b$ |

模糊分析算子根据描述问题的具体要求选用。

（5）将最初一层的综合评判所得$\underset{\sim}{N}$做为下一层综合评判中的相应$\underset{\sim}{R}(u_i)$；

（6）重复1～5步，直至得到最终综合评判。

（7）计算综合评价值

$$W=\underset{\sim}{N}_{\#}\circ C^{T}\tag{4-9-5}$$

式中：$C$——等级矩阵；$C^{T}$——$C$的转置矩阵。

（8）重复1～7步计算出各对比项的评价值。

（9）对不相同算子计算出的$W$值进行比较，最大的即为最佳者。如果既要全面又要兼顾重点的比较，可将不同算子所计算的$W$加权后平均，再进行比较，选出最优者。

2.用Fuzzy子集表示权系数的数学模型

（1）单因素评判，同1，（1）。

（2）做综合评判的变换矩阵，同1，（2）

（3）给定权分配$\underset{\sim}{M}$。由经验、推理、统计等手段，以Fuzzy子集（表4-9-3）的形式给出各权系数。

（4）对最初一层综合评判进行计算同（1）、（4）。

（5）计算$C_{R}\times\underset{\sim}{N}$，归一化后作为下一层的相应$\underset{\sim}{R}(u_i)$。$C_{R}$为权数等级矩阵（0，0.2，0.35，0.50，0.65，0.8，1.0）。

隶属度　　　　表 4-9-3

| 等级 | 评 | | | | | 语 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 特别次要 | 很次要 | 次要 | 一般 | 重要 | 很重要 | 特别重要 |
| 0 | 0.67 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.2 | 0.33 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.35 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 | 0 |
| 0.50 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 |
| 0.65 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 |
| 0.80 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.33 |
| 1.00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0.67 |

（6）重复1～5步，直到得到最终综合评判。

（7）计算综合评价值，$W = C_{权} \times \underset{\sim}{N} \times C^{T}$。

（8）重复1～7步计算出各对比项目的评价值。

（9）选出最佳者，同（1）、（9）。

## 二、两家涤纶短纤维工厂工艺流程评价

1.原始条件

1）流程

$A$厂：熔体输送→纺丝→卷绕→集束→浸油→湿热牵伸→热定型→蒸汽预热→卷曲→冷却输送→切断→打包。

$B$厂：熔体输送→纺丝→上油→卷绕→集束→上油→湿热牵伸→紧张热定型→湿热牵伸→卷曲→松弛热定型→上油→打包。

2)有关数据及情况

熔体输送　　　　表 4-9-4

| 厂家 | 稳定性 | 均匀性 | 衔接方式 | 管道长度 | 停留时间 | 温度及温升 | 压力损失 | 粘度降 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$厂 | 反馈自控调节及自动切片支管 | 设静态混合器 | 平接 | 48.5(m) | 15～20(min) | 275～280°C<br>$\Delta t = 8 \sim 13$°C | $\Delta p =$ 200kg/cm² | 0.006 |
| $B$厂 | 反馈自动调节 | 同上 | 上下接 | | 大于5(min) | >290°C | $\Delta p = 100$ (kg/cm²) | 0.01 |

纺丝和集束　　　　表 4-9-5

| 厂家 | 单台生产能力 | 箱体加热方式 | 纺速 | 孔数 | 吹风方式 | 卷绕方式 | 上油方式 | 运转率 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 50 (t/d) | 联苯锅炉 | 1300 (m/min) | 3653 | 环侧吹 | 小转子 | 鼓形轮双面上油 | 98% (40天) |
| $B$ | 50 (t/d) | 电热棒 | 1300 (m/min) | 875 | 内环侧吹 | 导丝盘 | 喷油 | (28天) |

**后 加 工** 表 4-9-6

| 厂家 | 牵引方式 | 热定型 | 卷曲 | 松弛热定型 | 切断 | 输送方式 | 打包 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 湿热牵伸 | 紧张热定型 | 卧式 | 空气冷却松弛 | ECH-15A | 无输送设备 | 三菱重工打包机 |
| *B* | 湿热牵伸 | 同上 | 卧式有夹角 | 热风隧道式 | EC-15A | 夹心皮带输送 | 同上 |

**公 用 工 程** 表 4-9-7

| 厂家 | 电力 (kWh/t) | 蒸汽 (t/t) | 冷却水(循环) ($m^3$/t) | 冷却水(新水) ($m^3$/t) | 纯水 ($m^3$/t) | 压缩空气 ($Nm^3$/t) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 200 | 1.0 | 28 | 3 | 0.6 | 35 |
| *B* | 600 | 3.5 | 40 | 18 | 1 | 840 |

**短纤维成品质量** 表 4-9-8

| 厂家 | 纤度 (d) | 强度 (g/d) | 伸长 (%) | 干热收缩率 (%) | 卷曲度 (%) | 超倍长纤维 (%) | 成品含油率 (%) | 成品含水率 (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 1.4±0.05 | 6.4±3 | 25±3 | <3 | 12±2 | <5 | 0.13±0.003 | |
| *B* | 1.45～1.55 | 6.1～6.9 | 21～29 | <6 | 13±3 | <6(N/g) | 0.2 | 0.4 |

**对原料质量要求** 表 4-9-9

| 厂家 | 特性粘度 I·V | 凝集粒子 10μ以上 个/mg | 灰分的公差要求 Wt% |
|---|---|---|---|
| *A* | 0.68±0.01 | <40 | |
| *B* | 0.64～0.66±0.005 | <5 | 0.07±0.03 |

**因素的权数分配 $\underset{\sim}{M}$** 表4-9-10

| 稳定性 | 均匀性 | 温升 | 停留时间 | 压降 | 粘度降 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.175 | 0.192 | 0.125 | 0.208 | 0.142 | 0.158 |

**模 糊 关 系** 表 4-9-11

| 隶属度 *U* \ *V* | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 稳定性 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 |
| 均匀性 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 |
| 温升 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 |
| 停留时间 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 |
| 压降 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 0 | 0 |
| 粘度降 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.25 | 0.50 | 0.25 |

2.综合评判计算

1）筛选因素并绘出因素关系图

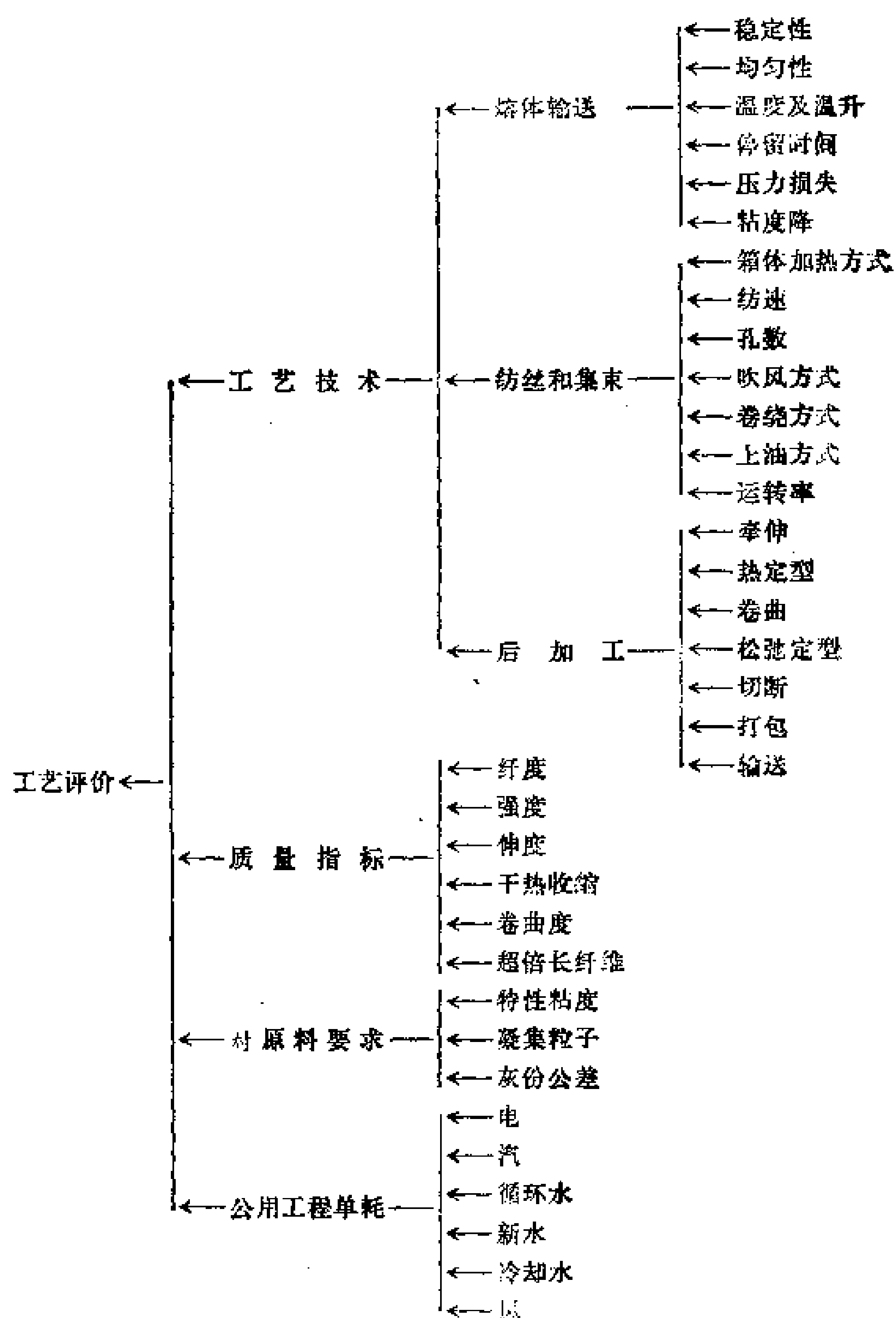



图 4-9-1 因素关系图

2 ）计算：

（ 1 ）权数分配为数字表示时

a.使用算子为"⊕，·"时的计算

A厂：[熔体输送]：

$$\underset{\sim}{N}_{熔A}=\underset{\sim}{M}\circ\underset{\sim}{R}$$

$$=[0.175,0.192,0.125,0.208,0.142,0.158]\circ\begin{bmatrix}0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0.25&0.50&0.25&0&0\\0&0&0.25&0.50&0.25&0&0\\0&0&0.25&0.50&0.25&0&0\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\end{bmatrix}$$

$$=[0,0,0.119,0.238,0.25,0.263,0.131]$$

[纺丝和集束]：

$$\underset{\sim}{N}_{纺}A=[0.141,0.176,0.176,0.211,0.106,0.07,0.12]\circ\begin{bmatrix}0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0&0&0.33&0.67\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0.25&0.50&0.25&0\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0.25&0.50&0.25&0&0\end{bmatrix}$$

$$=[0,0,0.03\ 0.097,0.246,0.386,0.248],$$

[后加工]：

$$\underset{\sim}{N}_{后A}=[0.2,0.186,0.169,0.121,0.113,0.113,0.097]\circ\begin{bmatrix}0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0.25&0.50&0.25&0&0\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0.25&0.50&0.25&0&0\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\end{bmatrix}$$

$$=[0,0,0.069,0.149,0.25,0.342,0.193]$$

[工艺技术]：

$$\underset{\sim}{N}_{工A}=[0.25,0.4,0.35]\circ\begin{bmatrix}0&0&0.119&0.238&0.25&0.263&0.131\\0&0&0.03&0.091&0.243&0.386&0.248\\0&0&0.069&0.149&0.25&0.342&0.193\end{bmatrix}$$

$$=[0,0,0.0691,0.148,0.247,0.341,0.193]$$

[质量指标]：

$$\underset{\sim}{N}_{质A}=[0.18,0.20,0.20,0.16,0.14,0.12]\circ\begin{bmatrix}0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0.25&0.50&0.25&0\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0.25&0.50&0.25&0.00\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\end{bmatrix}$$

$$=[0,0,0,0.085,0.335,0.415,0.163]$$

[对原料质量要求]：

$$\underset{\sim}{N}_{重A}=[0.4,0.3,0.3]\circ\begin{bmatrix}0&0&0&0.25&0.50&0.25&0\\0&0.25&0.50&0.25&0&0&0\\0&0&0.25&0.50&0.25&0&0\end{bmatrix}$$

$$=[0,0.075,0.225,0.325,0.275,0.10,0]$$

[公用工程]：

$$\underset{\sim}{N}_{公用}=[0.25,0.2,0.12,0.15,0.1,0.18]\circ\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0.33&0.67\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\\0&0&0&0&0.25&0.50&0.25\end{bmatrix}$$

$$=[0,0,0,0,0.2,0.467,0.333]$$

[综合评价]：

$$\underset{\sim}{N}_{综A}=[0.3,0.3,0.15,0.25]\circ\begin{bmatrix}0&0&0.069&0.148&0.247&0.341&0.193\\0&0&0&0.085&0.335&0.415&0.165\\0&0.075&0.225&0.325&0.275&0.10&0.00\\0&0&0&0&0.20&0.467&0.333\end{bmatrix}$$

$$=[0,0.011,0.055,0.119,0.266,0.359,0.191$$

[综合评价值]：

$$W=\underset{\sim}{N}\circ C^T=[0,0.011,0.055,0.119,0.266,0.359,0.91]\circ\begin{bmatrix}-3\\-2\\-1\\0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$=1.478$$

$B$厂：方法同上：

$$\underset{\sim}{N}_{环B}=[0,0,0.042,0.13,0.25,0.343,0.23]$$

$$\underset{\sim}{N}_{物B}=[0,0.0968,0.194,0.127,0.183,0.277,0.123]$$

$$\underset{\sim}{N}_{后B}=[0,0.042,0.085,0.10,0.266,0.358,0.149]$$

$$\underset{\sim}{N}_{工B}=[0,0.053,0.117,0.119,0.23,0.321,0.159]$$

$$\underset{\sim}{N}_{质B}=[0,0,0,0.12,0.37,0.38,0.13]$$

$$\underset{\sim}{N}_{熙B} = [0.1, 0.2, 0.175, 0.225, 0.225, 0.075, 0]$$

$$\underset{\sim}{N}_{公B} = [0.145, 0.29, 0.195, 0.155, 0.16, 0.055, 0]$$

$$\underset{\sim}{N}_{综B} = [0.036, 0.104, 0.114, 0.137, 0.254, 0.258, 0.098]$$

$$W_B = 0.634$$

因为，$W_A > W_B$，所以$A$厂比$B$厂好。

*b*．使用算子"∧，∨"时的计算结果

$$\underset{\sim}{N}'_{综A} = [0, 0.113, 0.136, 0.187, 0.187, 0.187, 0.187]$$

$$W'_A = 0.765$$

$$N'_{综B} = [0.124, 0.124, 0.124, 0.157, 0.157, 0.157, 0.157,]$$

$$W'_B = 0.2$$

因为，$W'_A > W'_B$，所以$A$厂比$B$厂好。

*c*．使用算子"∨·"时计算的结果

$$\underset{\sim}{N}''_{综A} = [0, 0.037, 0.075, 0.145, 0.224, 0.224, 0.30]$$

$$W''_A = 1.409$$

$$\underset{\sim}{N}''_{综B} = [0.0737, 0.147, 0.131, 0.118, 0.207, 0.208, 0.116]$$

$$W''_{综B} = 0.323$$

因为，$W''_A > W''_B$，所以$A$厂比$B$厂好

不同算子加权平均后比较：

$$W_{A平} = \frac{1}{2}(1.478 + 1.409) = 1.4435$$

$$W_{B平} = \frac{1}{2}(0.634 + 0.323) = 0.4785$$

所以，$A$厂优于$B$厂。

（2）以Fuzzy集描述权系数的计算

1°．使用算子"⊕，·"计算结果：

$W_A = 1.423$；$W_B = 0.689$，所以$A$厂优于$B$厂。

2°．使用算子"∧，∨"计算结果：

$W'_A = 1.016$，$W'_B = 0.344$，所以$A$厂优于$B$厂。

3°．使用"∨，·"计算结果：

$W''_A = 1.179$，$W''_B = 0.429$，所以$A$厂优于$B$厂。

若对不同算子加权考虑：

$$W_{A平} = 0.5 \times 1.423 + 0.5 \times 1.179 = 1.301$$

$$W_{B平} = 0.5 \times 0.689 + 0.5 \times 0.429 = 0.559$$

所以，仍是$A$厂优于$B$厂。

## 三、说　　明

Fuzzy数学综合评价方法实际是用Fuzzy数学对人脑评价事物的思维模拟。由于人们有不同的考虑原则，因此需针对不同原则选用不同的算子。如果只对重点因素加以考虑就可用"max-min"或"max-product"算子。但"max-min"比较粗糙，且当因素较

多时，每个权系数都较小，因而在变换过程中失去很多信息，不易对单项做出判决。如果是按各因素全面考虑的原则去评价事物，就要选择“add-product”算子。假如既要考虑全面又要兼顾重点，则对“max-product”及“add-product”所得$W$加权比较，找出最优者。多层次多算子二型Fuzzy集的综合评判，是对人们决策思维过程的数学描述，是一种新方法，可广泛应用于各部门。

## §4-10 模糊积分在纺织品评判过程中的应用[69]

1985年，王震源、李法朝先讨论利用Sugeno型Fuzzy积分建立起来的对客体进行主观评判的数学模型，然后再利用Fuzzy积分序列的收敛定理给出近似客观评判的数学模型，并给出了实例。

### 一、客体的品质因素及重要性测度

设$X$为待评判的某一客体，它具有$n$个参加评分的品质因素$x_1, x_2, \cdots, x_n$。其全体$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$称之为因素域。对于因素域$X$的每个子集$A$，都对应地赋于一个$[0, 1]$之间的实数$\mu(A)$，它是凭借$A$中的品质因素所能得分的最高限额，可以描述因素集$A$的重要性。显然，让$X$本身的重要性取值1通常是合理的，而空集$\phi$（不含任何品质因素的集合）的重要性当然应取值为0。此外，若因素集合$A$中的诸因素都包含在因素集合$B$中，则$A$的重要性显然不如$B$，即应有$\mu(A)\leqslant\mu(B)$。因此，集函数$\mu$满足下列条件：

（1）$\mu(X)=1$；（2）$\mu(\phi)=0$；（3）若$A\subset B\subset X$，则$\mu(A)\leqslant\mu(B)$，即$\mu$具有单调性。

注意到我们所考虑的因素域总是只含有有限个品质因素，从而$\mu$的连续性是自然成立的。

这样，$\mu$就是可测空间（$X, \mathscr{P}(X)$）上的一个规范化Fuzzy测度（其中$\mathscr{P}(X)$是$X$的势集），我们称上述$\mu$为$X$上的重要性测度。

重要性测度在评判过程中起着相当关键的作用，它是评判专家们某种经验的数字化。我们把重要性测度作为公认的评判准则，它应在评判实施之前先行确定。

**例 1** 某花布厂评判一种花布，品质因素为“颜色”，“图案”，“质地”三个，可以规定如下重要性测度：$\mu$(颜色)$=0.2$；$\mu$(图案)$=0.4$，$\mu$(质地)$=0.7$；$\mu$(色，图)$=0.5$；$\mu$(色，质)$=0.8$，$\mu$(图，质)$=0.9$；$\mu$(色，图，质)$=1$。

应当注意的是，重要性测度往往不满足经典测度所具有的可加性，例如，$\mu$(色，图)$\neq\mu$(色)$+\mu$(图)。

重要性测度的确定通常是比较困难的，就象在综合评判中确定诸因素着眼点权重分配那样。但是，重要性测度一旦确定后，它就往往一劳永逸地被使用。

### 二、客体品质的主观评判

现在讨论单个评判员对客体品质的评判，这种评判总是摆脱不了评判员的主观性，因而称为主观评判。

评判的具体过程是：先由评判员对客体$X$的每个品质因素$x_i$作出评分$f(x_i)$，$i=1$,

2, …, $n$, 评分$f(x_i)$的取值限于闭区间[0, 1]；然后，将$f(x_i)$, $i=1, 2, \cdots, n$, 按由大至小的顺序排列$f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(n)}$。相对应地，因素集$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$也跟着排列为$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)}$, 记$A^{(i)}=\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(i)}\}$, $i=1, 2, \cdots, n$。计算$f^{(i)}\wedge\mu(A^{(i)})$, $i=1, 2, \cdots, n$, （"∧"为二元运算，取二者中之较小者）；最后，计算对客体$X$的评判值：

$$E=\max_{1\leqslant i\leqslant n}[f^{(i)}\wedge\mu(A^{(i)})]$$

它是属于闭区间[0, 1]的一个实数。评判值$E$是评判员对客体$X$的诸品质的一个综合评价，称为$X$的主观评判值。

**例 2** 某评判员对一种花布进行评判，品质因素和重要性测度如例1中所给，经检验，评判员对诸品质因素给出如下评分：

颜色—0.8；图案—0.6；质地—0.9。

这样，我们有$f^{(1)}=0.9$, $f^{(2)}=0.8$, $f^{(3)}=0.6$, 对应地$x^{(1)}$为"质"，$x^{(2)}$为"色"，$x^{(3)}$为"图"，且$\mu(A^{(1)})=\mu(\text{质})=0.7$；$\mu(A^{(2)})=\mu(\text{色,质})=0.8$；$\mu(A^{(3)})=\mu(\text{色,图,质})=1$，于是

$$E=\max_{1\leqslant i\leqslant n}[f^{(i)}\wedge\mu(A^{(i)})]=\max[0.7, 0.8, 0.6]=0.8。$$

上述诸品质因素的评分$f(x_i)$, $i=1, 2, \cdots, n$, 可以看作可测空间$(X,\mathscr{P}(X))$上一个可测函数，容易证明，对$X$的主观评判值

$$E=\sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha\wedge\mu[F_\alpha)]=\sup_{A\in\mathscr{P}(x)}[\mu(A)\wedge\min_{x_i\in A}f(x_i)]$$

其中，$F_\alpha=\{x_i:f(x_i)\geqslant\alpha\}$, $\alpha\in[0, 1]$。这恰好就是Sugeno所定义的可测函数$f$在$X$上关于Fuzzy测度$\mu$的Fuzzy积分$⨍ f du$，记为$E=⨍ f du$。

## 三、客体品质的近似客观评判

前述所讨论的单个评判员对客体品质的评判，或多或少都带有该评判员的主观性。可以设想，客体$X$的各项品质因素$x_i$都有着它们固有的品质指标$g_i=g(x_i)$, $g_i\in[0, 1]$, $i=1, 2, \cdots, n$。$\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，这是客观存在的。对$X$的最理想的评判应该是可测函数$g$在$X$上关于重要性测度$\mu$的Fuzzy积分$E_0=⨍ g du$。我们当然可以把$E_0$称为对$X$的客观评判值。但是，由于每个评判员个人的认识往往不是十分全面的，再加上评判时的某种随机性（即使是同一评判员对一种布的某项品质的先后两次评分也会不相等），使得他对因素$x_i$的评分往往不能恰好等于$g_i$，而是随机地偏高或偏低，从而主观评判值$E$就偏离客观评判值$E_0$。

如何来消除或减弱评判员个人的主观片面性，从而缩小所得的评判值与客观评判值之间的差距呢？

我们考虑让无倾向性地选定的$m$名评判员来对客体$X$同时进行评判，他们不经商量、各自独立地对$X$的各项品质因素$x_i$作出评分$f_j(x_i)$, $i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, m$。

可以设想，固定了某个$i$，众多的评判员对客体$X$的品质因素$x_i$的无数次评分是具有数学期望$g_i$的一个母体$F_i$，而$m$个评判员对$x_i$的某一次评分$\{f_1(x_i), f_2(x_i), \cdots, f_m(x_i)\}$是母体$F_i$的一个容量为$m$的简单随机子样，即$f_1(x_i)$，$f_2(x_i)$，…，$f_m(x_i)$是相互独立的同分布的随机变量，具有共同的数学期望$g_i$，由概率论中的Kolmogorov强大数定律知，以概率1有：

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f_j(x_i)=g_i$$

注意到品质因素的个数$n$是有限的，我们得：以概率1有

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f_j(x_i)=g,\ \text{对一切}i=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

再利用Fuzzy积分序列的收敛定理，有

$$\lim_{m\to\infty}\oint\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f_j(x_i)=\oint g\,du=E_0$$

以概率1成立，它蕴含着：当$m\to\infty$时，$\oint\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f_j du$依概率收敛于$E_0$。这就是说，只要$m$相当大，由$\widetilde{E}_0=\oint\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f_j du$给出的评判值，一般总是相当接近于客观评判值$E_0$的，参加的评判员越多，所得的评判值$\widetilde{E}_0$就越接近于$E_0$，我们称$\widetilde{E}_0$为对客体$X$的近似客观评判值。

例 3　请四名评判员（甲，乙，丙，丁）来对前面例子中的花布进行评判，对“颜色”，“图案”，“质地”这三个品质因素，他们给出如下表所列的评分。

| 评判员 | 因素 | | |
|---|---|---|---|
| | 颜色 | 图案 | 质地 |
| 甲 | 0.8 | 0.6 | 0.9 |
| 乙 | 0.8 | 0.8 | 0.7 |
| 丙 | 0.6 | 0.9 | 0.8 |
| 丁 | 0.6 | 0.9 | 0.6 |

计算得：

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{4}f_j=(0.7,\ 0.8,\ 0.75)$$

于是：

$$\widetilde{E}_0=\oint\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{4}f_j du=0.75$$

这个分数$\widetilde{E}_0=0.75$可以认为比在例2中给出的单个评判员的主观评判值$E=0.8$更符合该花布的实际品质。

## 四、结　论

（1）用于评判的Sugeno型Fuzzy积分可用别的两个二元运算替代，以获得更切合

实际的数学模型。例如可用N-Fuzzy积分，它用普通实数的乘法“·”来代替Sugeno型Fuzzy积分中的二元运算“∧”。

（2）给出的评判法，其评判值是[0，1]中的一个实数，易于直接比较各评判对象的优劣，因而需对排名次的场合（例如劳动竞赛，提职提干等）尤为适用。

（3）为了尽可能避免评分过程中的舞弊行为和反常的片面性，对给出评分中的最高分和最低分除掉，再平均，则评判值更公正合理。

## §4-11 低合金钢铸件蠕变性能的灰色预测[71]

1985年，马咸尧、郑萍应用灰色系统理论对Cr-mo-V系低合金钢铸件的蠕变性能进行研究。建立了500℃高温下，不同载荷与断裂时间之间的生成函数。通过生成函数进行低载荷断裂时间预报，效果较好。

蠕变是材料在高温下的一个重要性能。处于高温状态下的材料长期受到载荷作用时，即使其载荷较低，并且在短时间的高温拉伸试验中材料不发生变形，但在此情况下仍会有极微小的蠕变，极端的情况下，甚至会使材料发生破坏。高温材料多应用于各种车辆的发动机及冶金厂中各种设备上，如果因蠕变引起破坏，可能造成很大的事故。

为了保证设备的安全可靠，在某一使用温度下，预先知道该材料对不同载荷应力下断裂的时间是很重要的。过去，人们都是通过蠕变实验测量断裂时间。而做蠕变试验时，需要很长时间，才能得到结果。即使通过实验得出来的数据，也只是对某几个具体试样而言。存在着很大的偶然性，不能代表普通的规律。如果将实测的数据，用灰色系统理论来处理，可以预测在某一温度下的任何载荷应力的断裂时间。

我们对Cr-mo-0.25V低合金钢铸件高温蠕变情况，利用灰色系统理论进行研究。在500℃的高温下，已测得此铸件在载荷分别为37，36，35，34，33（$kg/mm^2$）情况下的蠕变断裂时间（见表4-11-1）。

**铸件的蠕变断裂时间** 表4-11-1

| 数列 | 序数 $K$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 载荷应力($kg/mm^2$) | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 |
| 断裂时间($\times 100 X^{(0)}(K)$小时) | 2.38 | 2.8 | 4.25 | 6.85 | 11.3 |
| 一次累加数列$X^{(1)}(K)$ | 2.38 | 5.18 | 9.43 | 16.28 | 27.58 |

### 一、数据处理

累加生成，五步建模等，是灰色系统理论的基本原理，按照这些原理，进行以下工作：

1.建立$GM$（1，1）模型

表4-11-1中一次累加数列$X^{(1)}(k)$是根据断裂时间数列$X^{(0)}(k)$，由公式

$$X^{(1)}(k)=\sum_{n=1}^{k}X^{(0)}(n) \quad (4\text{-}11\text{-}1)$$

而得到的。例如，$X^{(1)}(3)=\sum_{n=1}^{3}X^{(0)}(n)=X^{(0)}(1)+X^{(0)}(2)+X^{(0)}(3)\doteq 2.38+2.8+4.25=4.93$。

按照灰色系统理论的建模方法，视$X^{(1)}(k)$的一阶线性微分方程为：

$$\frac{dX^{(1)}(t)}{dt}+aX^{(1)}(t)=u \quad (4\text{-}11\text{-}2)$$

首先必须求出（4-11-2）中的常数$a$和$u$。

构造$B$矩阵：

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(X^{(1)}(1)+X^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(X^{(1)}(2)+X^{(1)}(3)) & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ -\frac{1}{2}(X^{(1)}(N-1)+X^{(1)}(N) & 1 \end{bmatrix} \quad (4\text{-}11\text{-}3)$$

构造$Y_N$向量：

$$Y_N=[X^{(0)}(2),\ X^{(0)}(3),\ \cdots,\ X^{(0)}(N)]^T \quad (4\text{-}11\text{-}4)$$

根据最小二乘法辨识参数向量为

$$\hat{a}=\begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix}\doteq(B^TB)^{-1}B^TY_N \quad (4\text{-}11\text{-}5)$$

由表4-11-1中数据代入式（4-19-3）可得矩阵$B$，进而可得$B$的转置矩阵$B^T$和逆矩阵$(B^TB)^{-1}$。

$$B=\begin{bmatrix} -3.78 & 1 \\ -7.30 & 1 \\ -12.8 & 1 \\ -21.9 & 1 \end{bmatrix};\quad B^TB=\begin{bmatrix} 711 & -45.8 \\ -45.8 & 4 \end{bmatrix};\quad (B^TB)^{-1}=\begin{bmatrix} 0.00536 & 0.0614 \\ 0.0614 & 0.953 \end{bmatrix}$$

$$(B^TB)^{-1}\cdot B^T=\begin{bmatrix} 0.041 & 0.022 & -0.0076 & -0.056 \\ 0.72 & 0.505 & 0.169 & -0.386 \end{bmatrix}$$

由$Y_N=[2.8\ \ 4.25\ \ 6.85\ \ 11.3]^T$和上述矩阵代入（4-11-5）式可得

$$\hat{a}=\begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.97 \end{bmatrix}$$，即$a=-0.5$，$u=0.97$。

（4-11-2）式的解为：

$$X^{(1)}(t)=ce^{-at}+\frac{u}{a}$$

其中，$c=X^{(0)}(1)-\frac{u}{a}$，得

$$X^{(1)}(t)=(X^{(0)}(1)-\frac{u}{a})\,e^{-at}+\frac{u}{a} \quad (4\text{-}11\text{-}6)$$

因而得到：

$$X^{(1)}(t)=4.4e^{0.5t}-2.2 \quad (4\text{-}11\text{-}7)$$

取$t$为应力序数$k$时，由

$$X^{(1)}(k+1)=4.4e^{0.5k}-2.2 \quad (4\text{-}11\text{-}8)$$

即可得到生成累加数列$\hat{X}^{(1)}(k+1)$，($k=1$，2，…)。

2.检验

当$k=1$，2，3，4时，由（4-11-8）式得出

$$X^{(1)}(k+1)=[5.05,\ 9.76,\ 17.52,\ 30.3]$$

由表4-11-1得出$X^{(1)}(k+1)=[5.18, 9.43, 16.28, 27.58]$，计算出平均相对误差为0.04，这一精度是相当理想的。

## 二、预　　测

由（4-11-8）式得到的一次累加生成数列与实际一次累加生成数列很接近。因而可以（4-11-8）式估计原始一次累加生成数列中的各个数据。特别是估计序数 5 以后的数据，就更有实际意义了。

轻载荷的蠕变实验所需要的时间是相当长的，少则几天，多则几年。在重载荷的基础上减轻 1 公斤，试验时间将相应增加几百甚至几千小时。根据已有重载荷试验数据，预报减轻重载后的断裂时间就显得需要了。

下面，我们根据（4-11-8）式来预测载荷32kg/mm$^2$的断裂时间。32kg/mm$^2$所对应的序数为 6，也就是我们要求出$X^{(1)}(6)$和$X^{(0)}(6)$。由(4-11-8)式得$X^{(1)}(6)=51.4$从表4-11-1查得$X^{(1)}(5)=27.58$，再由$X^{(0)}(6)=X^{(1)}(5)$得到$X^{(0)}(6)=23.82$。上面数据说明，在32kg/mm$^2$的载荷下，此种材料经过大约2382小时断裂。

同样，我们计算出31kg/mm$^2$载荷下，材料经过大约3500小时将会发生断裂。

## 三、结　　论

邓聚龙教授创立的灰色系统理论已在经营、生态、未来、农业等领域被广泛采用，我们在此把这一理论引入材料科学研究上来了。我们对断裂时间的预报与日本钢铁协会《铸铁与铸钢》中的数据极为相近。这说明，可以根据重载荷试验值，预算出轻载荷的数据。也就是说，通过灰色生成函数，可以在极短的时间里把需要几个月或几年才能得到的结果估计出来。这一方法还可用于其他预测上。灰色系统理论是可以被工程技术领域广泛采用的。

# §4-12　工程材料力学性能的模糊聚类分析[74]

1986年，李华、沈大荣应用模糊聚类原理，从材料的综合力学性能出发，提出几个有较强分辨力和一定普遍意义的统计指标，对工程实际中常见的十种材料进行聚类分析，合理地评价了它们在力学性能方面亲疏关系，从而为工程中具体材料的选择决策提出了一个新方法。

工程实际中，为在一组材料里从力学的综合性能方面确定其中某种材料，而描述它们之间材料力学性能的亲疏关系时，选择标准本身时常具有模糊性。因此，我们若把模糊数

学理论中的模糊聚类方法应用于工程材料力学性能的分型划类，就可确定在规定水平下的材料聚类状态，使分类更符合实际情况，能更合理地选择材料。

这里我们特取十种常见工程材料为样本，即甲类钢（$A_3$）、灰口铸铁（HT30～54）、钝铝（99～99.5%）、黄铜（H62，软质）、黄铜(H62，硬质)、传统陶瓷（长石质瓷）、木材（黄杉）、环氧树脂（E-42浇铸体）、E玻璃纤维和玻璃钢（增强材料为E玻璃纤维、基体是环氧树脂、1:1双向布）。由于合理选取样本的统计指标是产生理想聚类效果的关键，因此，建议选取对于材料力学性能较为敏感，有较强分辨力和一定普遍意义的力学性能指标作为统计指标。即拉伸强度（$\sigma_b$）、弹性极限（$\sigma_e$）、延伸效（$\delta$），冲击韧性（$\alpha_k$）、压缩强度（$\sigma_{-b}$）和硬度值（HB）。

## 一、样本统计指标分析

通常对每种材料不一定都作上述的六种试验，有些项目的测试值不易获得。因此，我们采取聘请专家评分，做补充性试验或分析材性的应力-应变关系等方式，对某些项目的测试值进行补充和修正，以满足模糊聚类分析的要求。为了便于分析比较，还将各样本统计指标的原始数据标准化。

表4-12-1中标有 * 号的数据是利用上述各方法，经过补充修正后的估计值。

样本统计指标的力学性能　　表 4-12-1

| 材料名称 | 力学性能指标 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\sigma_b$ (kg/cm²) | $\sigma_e$ (kg/cm²) | $\delta$ (%) | $\alpha_k$ (kg-m/cm²) | $\sigma_{-b}$ (kg/cm²) | HB (kg/mm²) |
| $A_3$ 钢 | 3800 | 2300 | 25 | 8.2 | 4560* | 114* |
| 灰口铸铁 | 2400 | 2400* | 0.5 | 0.75 | 9750 | 221 |
| 黄铜(软) | 3300 | 800 | 49 | 14 | 4950* | 56 |
| 黄铜(硬) | 6000 | 4200 | 3 | 7* | 5500* | 164 |
| 纯铝 | 1050 | 350 | 21.5 | 20* | 175* | 27.5 |
| E玻纤 | 20000 | 20000* | 3 | 0.1* | 10300 | 850* |
| 环氧树脂 | 850 | 580 | 1.7 | 0.0013 | 1100 | 70* |
| 玻璃钢 | 3000 | 1100 | 2 | 1.8 | 2500 | 88 |
| 黄杉木 | 1266 | 1266* | 0.7 | 0.308 | 506 | 5.02 |
| 长石质瓷 | 420 | 420* | 0.0006 | 0.021 | 3500 | 850* |

统计指标的数据标准化是把以上各样本的同类测试项目的原始数据按下式标准化（见表4-12-2）。

$$X' = \frac{X'' - \overline{X''}}{C}$$

式中：$X''$——样本的原始数据；$\overline{X''}$——各样本同类统计指标的原始数据平均值；$C$——各样本同类统计指标原始数据标准差。

然后再按极值标准化式将标准数据压缩到[0，1]区间内：$X = X' - X'_{min}/X'_{max} - X'_{min}$。

**样本统计指标的标准化** 表 4-12-2

| 指标编号 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 样本编号 | 材料名称 | $\sigma_b$ | $\sigma_s$ | $\delta$ | $a_k$ | $\sigma_{-b}$ | HB |
| 1 | $A_3$ 钢 | 0.1726 | 0.0992 | 0.5102 | 0.4100 | 0.4330 | 0.1290 |
| 2 | 灰口铸铁 | 0.1011 | 0.1043 | 0.0102 | 0.0369 | 0.9457 | 0.2556 |
| 3 | 黄铜(软) | 0.1471 | 0.0229 | 1 | 0.6998 | 0.4716 | 0.0603 |
| 4 | 黄铜(硬) | 0.2350 | 0.1959 | 0.0612 | 0.3496 | 0.5259 | 0.1882 |
| 5 | 纯　铝 | 0.0320 | 0 | 0.4388 | 1 | 0 | 0.0266 |
| 6 | E 玻 纤 | 1 | 1 | 0.0612 | 0.044 | 1 | 1 |
| 7 | 环氧树脂 | 0.0220 | 0.0117 | 0.0347 | 0 | 0.0910 | 0.0769 |
| 8 | 玻 璃 钢 | 0.1318 | 0.0362 | 0.0408 | 0.0894 | 0.2296 | 0.0982 |
| 9 | 黄 杉 木 | 0.0430 | 0.0466 | 0.0143 | 0.0148 | 0.0327 | 0 |
| 10 | 长石质瓷 | 0 | 0.0036 | 0 | 0.0004 | 0.3234 | 1 |

## 二、模糊聚类分析

确定论域$U$上的模糊相似关系（只满足自反性和对称性），是模糊聚类分析的基础，模糊关系 $\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_{n\times n}$中的统计量$r_{ij}$，是对各样本之间亲疏关系作数学上的定量描述。统计量$r_{ij}$的计算方法曾提出过各种计算模型，以解决不同的实际问题。这里选用数量积法：

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ \dfrac{1}{M}\sum_{k=1}^{6}X_{ik}\cdot X_{jk} & i\neq j\end{cases}$$

式中：$M$——某一适当选定的正数；$X_{ik}$——表4-12-2中样本编号$i$，统计指标编号为$k$的样本统计指标的标准化数据。

这里，取$M=2$，则可建立模糊相似关系矩阵。

用标定方法构成的模糊矩阵通常只满足自反性和对称性，不一定满足传递性。为此，需要对这样的模糊相似关系进行改造。

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}1 & & & & & & & & & \\ 0.2468 & 1 & & & & \text{对称} & & & & \\ 0.5213 & 0.2604 & 1 & & & & & & & \\ 0.2476 & 0.3040 & 0.3053 & 1 & & & & & & \\ 0.3213 & 0.0257 & 0.5725 & 0.1953 & 1 & & & & & \\ 0.4368 & 0.7040 & 0.3862 & 0.6002 & 0.0450 & 1 & & & & \\ 0.0430 & 0.0692 & 0.0504 & 0.0365 & 0.0090 & 0.1171 & 1 & & & \\ 0.1008 & 0.1360 & 0.1213 & 0.1090 & 0.0571 & 0.2543 & 0.0207 & 1 & & \\ 0.0224 & 0.0258 & 0.0265 & 0.0223 & 0.0112 & 0.0673 & 0.0037 & 0.0099 & 1 & \\ 0.1387 & 0.2871 & 0.1107 & 0.1809 & 0.0135 & 0.6700 & 0.0589 & 0.0893 & 0.0075 & 1\end{bmatrix}$$

我们用矩阵理论的传递闭包方法将模糊相似矩阵改造成模糊等价矩阵。对于改造过程中的模糊相似关系的合成，用min～max运算法则。这样，就有模糊等价关系。

$$
\underset{\sim}{R}^4=\begin{bmatrix}
1 \\
0.4368 & 1 \\
0.5213 & 0.4368 & 1 \\
0.4368 & 0.6002 & 0.4368 & 1 \\
0.5213 & 0.4368 & 0.5725 & 0.4368 & 1 \\
0.4368 & 0.7040 & 0.4368 & 0.6002 & 0.4368 & 1 \\
0.1171 & 0.1171 & 0.1171 & 0.1171 & 0.1171 & 0.1171 & 1 \\
0.2548 & 0.2548 & 0.2548 & 0.2548 & 0.2548 & 0.2548 & 0.1171 & 1 \\
0.0673 & 0.0673 & 0.0673 & 0.0673 & 0.0673 & 0.0673 & 0.0673 & 0.0673 & 1 \\
0.4368 & 0.6700 & 0.4368 & 0.6002 & 0.4368 & 0.6700 & 0.1171 & 0.2548 & 0.0673 & 1
\end{bmatrix}
$$

从模糊等价关系$\underset{\sim}{R}^4$出发，取不同$\lambda$水平即可对所列样本的聚类状态进行分析(用$X_i$表示样本编号为$i$的样本）。仅以$\lambda=0.5213$水平为例（其它聚类结果见样本动态聚类图）。$\underset{\sim}{R}^4$的$\lambda$截矩阵为：

$$
R_{0.5213}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

这时，十个样本聚成五类，即$\{X_1,X_3,X_5\}$；$\{X_2,X_4,X_6,X_{10}\}$；$\{X_7\}$；$\{X_8\}$；$\{X_9\}$。

## 三、讨 论 与 结 论

综上所述，绘出动态聚类图如图4-12-1所示。所得结果符合实际，令人满意。

考虑水平$\lambda$的实际意义可知，它是权数均等地综合反映了六个统计指标。在$\lambda=0.5213$水平下，$A_3$钢，黄铜（H62软）和纯铝的综合力学性能是列样本中最亲近的，它们的塑性指标高于其他材料。灰口铸铁、黄铜（H62，硬）、玻纤和长石质瓷的综合力学性能是10个样本中最相似的，是常见的典型脆性材料，此外，动态聚类图显示杉木力学性能的综合评价与其它样本相差最大。

值得注意的是模糊相似关系的$r_{ij}$关于统计指标原始数据的稳定性。我们曾做过试算，将$X_7$第六指标原始数据放大近六倍，结果数据标准化后，所有样本指标数据在$10^{-4}$误差精度范围内没有变化，聚类结果当然也无改变。从环氧树脂$\alpha_k=0.013\text{kg-m/cm}^2$，玻璃钢$\alpha_k=1.8\text{kg-m/cm}^2$来看：玻璃纤维估计值$\alpha_k^*=0.1\text{kg-m/cm}^2$是不太合理的。但由上述可知，对其适当调整，并不会改变最后的聚结果。

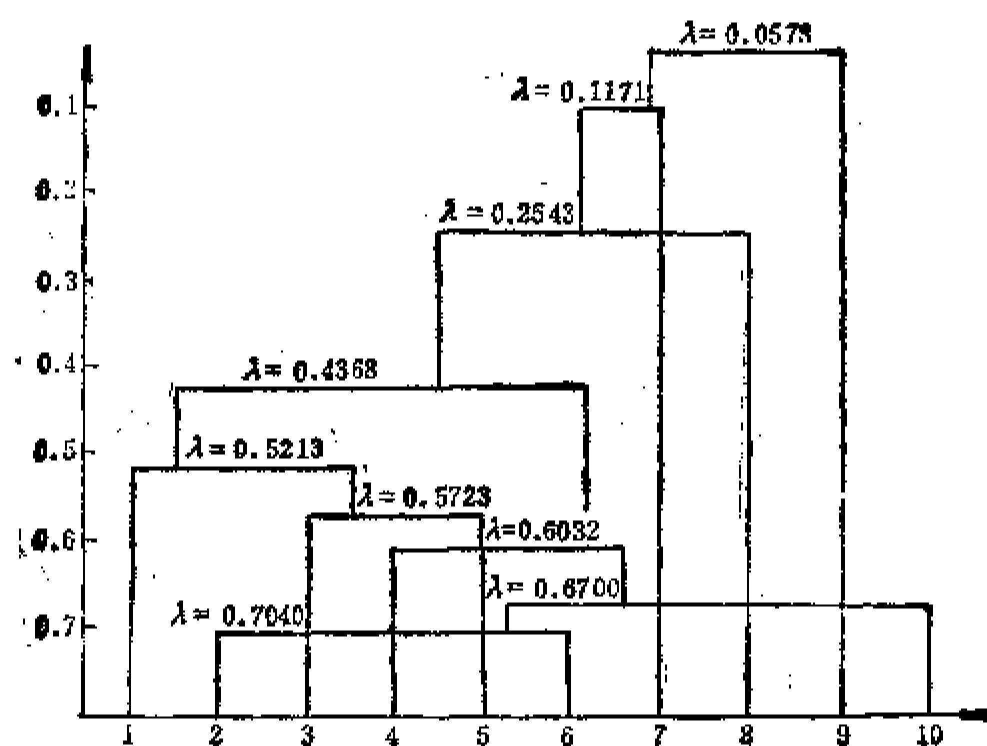



图 4-12-1 样本动态聚类图

1—A3钢；2—灰口铸铁；3—黄铜（软）；4—黄铜（硬）；5—纯铝；6—E玻纤；7—环氧树脂；8—玻璃钢；9—黄杉木；10—长石质瓷

因此，在工程材料力学性能的模糊聚类分析中，对某些材料无法测定或通常认为意义不大的试验数据，可以采用各种方法对其合理估计评价，若赋予这样的估计值以适当的权数，模糊聚类结果是不会受影响的，尤其是在样本个数和统计指标个数都较大时，影响就更小。由此我们可以看到模糊数学理论在聚类分析中的优越性。模糊聚类方法无论是对未知材料综合力学性能的判断还是对已知材料更合理地选择，均有实际意义。

## §4-13 模糊聚类分析法在成组技术（GT）中的应用[78]

1986年，谢素卿、黄泽堃利用模糊聚类分析法应用于成组技术（GT）。可刻画零件之间的差别，使待分类零件自动进行动态聚类，可一次完成很多零件的分类归组，并按各相似零件组的加工工艺要求去组织生产。提高了企业的劳动生产率和经济效益及适应能力，竞争能力。

### 一、分类归组方法

成组技术（Group Technology）就是把多品种、中小批量生产的企业中，不同的产品，不同零件，按其几何形状、结构和工艺的相似性分类归组。然后按各相似零件组的加工工艺要求去组织生产。这样就能提高中心批量生产企业的劳动生产率和经济效益，提高企业的适应能力和竞争能力，

从国内外的实践表明，应用成组技术的关键，是如何对零件进行分类归组。目前国内外采用分类归组的方法很多，归纳起来有编码系统法和无编码系统法两大类。

1.编码系统法

它是“以数代形”、“以数代工艺特征”来描述零件特征。即将数字和符号按一定顺序排列代替零件的几何形状、结构和工艺特征。然后对数字组进行处理，以达到分类归组

的目的。如西德的Opitz分类编码系统，我国的JLBM编码系统等。这是目前普遍采用的一种分类编码方法，但在使用中不很理想，存在许多不足：

（1）此法都是在分析总结一定范围内若干零件的基础上制定的，都有其自身的适用范围超出这一范围就不再适用了。

（2）此法受到码位的限制。码位过多则工作量过大，码位过少则同一码位所代表的特征范围过宽，分组后同组零件相似性差。

（3）此法受到特征号的限制。在同一码位上有多个特征号，表示不同的特征。若零件同时具有几个特征时，只能选最主要的特征编码；而忽略其他特征，这就会影响分组后零件的相似性。

（4）此法要求编码者必须熟悉编码法则，故需要进行人员的专门培训，而且编码所花的时间和费用的支出相当大。

2.无编码系统法

如成组技术初期出现的视检法、生产流程分析法、近年来又提出有影响的特征标志法和聚类分析法。

特征标志法是在整理零件特征的基础上，利用数学模型来计算某零件与特定的参考零件各特征的距离，利用这组距离值来决定该零件是否归属参考零件所指定的类。例如有$M$个零件需要分类，用$N$个特征来描述，就可以建立特征矩阵，如表4-13-1。

特　征　矩　阵　　表 4-13-1

| 特征 / 零件 | 1　2 ……… $N$ | 说　明 |
|---|---|---|
| 1 | $u_{11}$　$u_{12}$ ……… $u_{1n}$ | $u_{ij}=\begin{cases}0\\1\end{cases}$ |
| 2<br>⋮<br>$M$ | $u_{21}$　$u_{22}$ ……… $u_{2n}$<br>⋮　⋮　⋮　⋮<br>$u_{M1}$　$u_{M2}$ …… $u_{MN}$ | 1零件$i$具有$j$个特征<br>0零件$i$不具有$j$个特征 |

表中“1”为特定参考件，然后计算距离$\rho(u_{11},u_{21})$，$\rho(u_{12},u_{22})$，…，从而决定2号零件能否纳入“1”号零件所指的类。

聚类分析法与特征标志法基本相同，只是在计算距离时不是逐次比较每个特征，而是一次完成，即综合各特征的影响计算分类对象的距离，它比特征标志法快。

这两种无编码系统的分类方法共同的优点是不用对零件逐个编码，从而避开了数字编码的不足之处。但其使用效果直接取决于零件特征划分的合理与否，而在实践中，零件特征的划分不可能无限多，因此，在有限的情况下，如何既精炼又概括，既不重复又不遗漏地划分零件可能具有的特征问题，仍然没有解决。例如图4-13-1中$a$、$b$、$c$三个零件是否具有矩形截面这一特征，就很难做出“是”或“非”两种截然不同的结论。只能说“有点像”，“似有非有”等模糊概念。

如果在特征中增加“矩形缺一角”等特殊说明，就会使特征无限增多，加大分类工作量。为了解决这一问题，我们运用模糊数学中隶属度的概念，就可使特征中这些模糊概念清晰化，又不增加特征项目，还可获得很好的结果。例如，$a$，$b$，$c$三零件用[0,1]之间数值来表示它的符合矩形特征的程度，$a$符合矩形的程度高于$b$，$c$，则可定$a$属于矩形截面的

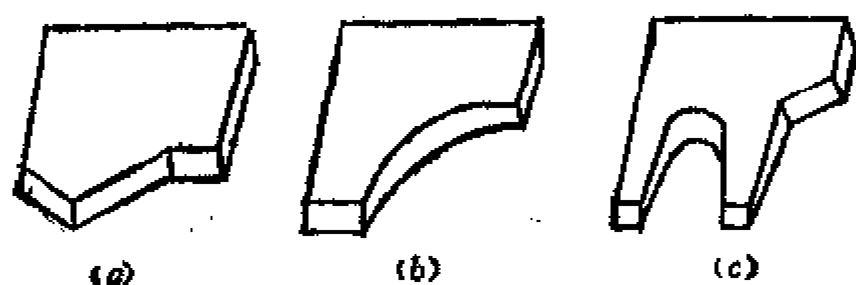



图 4-13-1 难于划分特征的零件

隶属度为0.85，$b$为0.75，$c$为0.65等。这样就可将原来的聚类分析法中的特征矩阵，改为用模糊聚类分析法中的隶属度建立的模糊特征矩阵来划分零件组，就更合理，更切合实际。

## 二、模糊聚类的数学模型

模糊聚类就是利用模糊等价关系，将给定的对象分成等价类。具体步骤如下：

步骤 1：确定分类对象的特征指标。用隶属度将特征数量化，建立模糊特征矩阵。

步骤 2：计算分类对象间的模糊相似关系矩阵$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_{m\times m}$。$r_{ij}$表示分类对象 $x_i$ 与 $x_j$的相似程度。采用夹角余弦法，即

$$r_{ij}=\frac{\sum\limits_{l=1}^{n}(u_{il}\cdot u_{jl})}{\sqrt{\sum\limits_{l=1}^{n}u_{il}^2\cdot\sum\limits_{l=1}^{n}u_{jl}^2}}$$

步骤 3：建立$\underset{\sim}{R}$的传递闭包$\hat{\underset{\sim}{R}}$。$\underset{\sim}{R}_{m\times m}$的传递闭包$\hat{\underset{\sim}{R}}=\underset{\sim}{R}^{m-1}$。只要通过 $m-1$ 次的模糊矩“自乘”运算就可求得$\hat{\underset{\sim}{R}}=(r'_{ij})_{m\times m}$。

步骤 4：取阈值$\lambda$进行分类归组。

## 三、应用实例与计算机程序

1.确定分类零件的几何和工艺特征

待分类零件的几何和工艺特征，应根据企业或部门的零件统计分析后的具体情况来确定。如某厂生产回转体零件，按本厂所有产品零件的有关特征，可用30个特征来描述其几何和工艺特征就足够了，如表4-13-2。

2.建立特征矩阵

为了说明问题现从五种产品（CW6140车床，CY920机床、CA9220机床、CY720机床、HE-11A变速箱）中取出20个零件有轴、齿轮、手柄、销子、螺杆、齿轮、法兰盘等分别以$x_1,x_2,\cdots x_{20}$为零件代号。将每个零件用30个特征来描述 其隶属度如表4-13-4。

根据表4-13-4中$\mu(x)$的确定数据，可得出20个零件的特征矩阵，见表4-13-5

3.利用计算机进行聚类分析

在IBM-PC机上，采用FORTRAN$_{77}$语言编制程序，通过并运行。

程序说明：

某厂回转体零件的几何、工艺特征　　表 4-13-2

| 特征代号 | | 特征说明 | 特征代号 | | 特征说明 |
|---|---|---|---|---|---|
| 基本形状 | $Y_1$ | 长径比$L/D$ | 平面辅助表面 | $Y_{17}$ | 端面有齿形 |
| | | | | $Y_{18}$ | 其他形状和轮廓 |
| 外形要素 | $Y_2$ | 光滑、单向、双向台阶的圆柱体 | 辅助孔 | $Y_{19}$ | 有分度的轴向孔 |
| | $Y_3$ | 直径变化的圆柱体 | | $Y_{20}$ | 有分度的径向孔 |
| | $Y_4$ | 有槽、功能槽 | | $Y_{21}$ | 有任意方向和斜度的孔 |
| | $Y_5$ | 有螺纹 | | $Y_{22}$ | 孔内有螺纹 |
| | $Y_6$ | 有齿形 | | $Y_{23}$ | 孔内有台阶 |
| | $Y_7$ | 其他形状和轮廓 | | | |
| 内部形状 | $Y_8$ | 无孔、盲孔、通孔、台阶孔 | 尺寸 | $Y_{24}$ | 最大尺寸 |
| | $Y_9$ | 直径变化的孔 | 精度 | $Y_{25}$ | 最高精度 |
| | $Y_{10}$ | 孔内有螺纹（紧固螺纹，传动螺纹） | 材料 | $Y_{26}$ | 黑色金属 |
| | $Y_{11}$ | 孔内有孔 | | $Y_{27}$ | 有色金属 |
| | $Y_{12}$ | 槽或功能槽 | | $Y_{28}$ | 非金属材料 |
| | $Y_{13}$ | 其他形状和轮廓 | | | |
| 平面辅助表面 | $Y_{14}$ | 有多个加工平面 | 毛坯形式 | $Y_{29}$ | 型材 |
| | $Y_{15}$ | 径向槽或轴向槽 | | $Y_{30}$ | 铸件、锻件、焊接件、其他 |
| | $Y_{16}$ | 有多个加工端面、台阶面 | | | |

```
PROGRAM FCA
IDMENSION R(20, 20), U(20, 30), UI(20), RS(20, 20),
          IRS(20, 20), E(60)
READ( *, * )M. N. K
FORMAT(I2)
READ( *, * ) ((U(I, J), T=1, M),J=1, N)
READ( *, * ) (E(L), L=1, K)
DO 20 I=1, M
UI(I)=0.0
DO 20 L=1, N
20  UI(I)=UI(I)+U(I, L)*U(I, L)
    DO 30 I=1, M
    DO 30 J=1, M
    R(I, J)=0.0
    DO 25 L=1, N
25  R(I, J)=R(I, J)+U(I, L)*U(J, L)
30  R(I, J)=R(I, J)/SQRT(UI(I)*UI(J))
35  DO 40 I=1, M
    DO 40 J=1, M
    RS(I, J)=-1.0
    DO 40 L=1, M
40  RS(I, J)=AMAX1(RS(I, J), AMIN1(R(I, L), R(L, J)))
```

回转体零件特征的隶属度 $\mu(x)$ 表 4-13-3

| 特征 | $\mu(x)$ 说明 |
|---|---|
| $Y_1$ | $L/D\leqslant0.5$, $0.5\sim1$, $1\sim1.5$, $1.2\sim2$, $2\sim2.5$, $2.5\sim3$, $>3$<br>1 0.8 0.6 0.4 0.2 0.1 0 |
| $Y_2$ | 无台阶(0)，单向台阶(0.5)，双向台阶(1) |
| $Y_3$ | 无变径(0)，锥面(0.5)，双能锥面(0.8)，其他(1) |
| $Y_4$ | 无　槽(0)，一般槽(0.5)，功能槽(1) |
| $Y_5$ | 无螺纹(0)，紧固螺纹(0.5)，传动螺纹(1) |
| $Y_6$ | 无齿形(0)，有齿形(1) |
| $Y_7$ | 无其他形状和轮廓(0)，有(1) |
| $Y_8$ | 无　孔(0)，通孔(0.2)，盲孔(0.4)，单言(0.6)，双向(1) |
| $Y_9$ | 无变径(0)，锥孔(0.5)，功能锥孔(0.8)，其他(1) |
| $Y_{10}$ | 无螺纹(0)，紧固螺纹(0.5)，传动螺纹(1) |
| $Y_{11}$ | 无齿形(0)，有齿形(1) |
| $Y_{12}$ | 无　槽(0)，一般槽(0.5)，功能槽(1) |
| $Y_{13}$ | 无其他形状和轮廓(0)，有(1) |
| $Y_{14}$ | 无平面加工(0)，有1个(0.4)，有2个(0.6)，3个以上(1) |
| $Y_{15}$ | 无(0)，有(1) |
| $Y_{16}$ | 无(0)，有1个(0.2)，有2个(0.6)，3个以上(1) |
| $Y_{17}$ | 无(0)，有(1) |
| $Y_{18}$ | 无(0)，有(1) |
| $Y_{19}$ | 无(0)，有(1) |
| $Y_{20}$ | 无(0)，有(1) |
| $Y_{21}$ | 无(0)，有(1) |
| $Y_{22}$ | 无(0)，有(1) |
| $Y_{23}$ | 无(0)，单向台阶(0.5)，双向台阶(1) |
| $Y_{24}$ | <50 50～250，250～500，500～1000，>1000<br>(0.2) (0.4) (0.6) (0.8) (1) |
| $Y_{25}$ | 低精度，1T16-12 (0.4)　1T11-8 中等精度 (0.7)，高精度 1T4-7 (1) |
| $Y_{26}$ | 灰铸铁，球墨铸铁，其他铸铁，低炭钢，中炭钢，高炭钢，合金钢<br>(0.3) (0.4) (0.5) (0.6) (0.8) (0.9) (1) |
| $Y_{27}$ | 铝(0.6)，铜(0.8)，其他(1) |
| $Y_{28}$ | 粉末冶金(0.5)，陶瓷(0.6)，塑料(0.8)，其他(1) |
| $Y_{29}$ | 棒料(0.2)，管材(0.4)，板材(0.6)，异形棒料(1) |
| $Y_{30}$ | 铸件(0.4)，锻件(0.6)，焊接件(0.8)，其他(1) |

```
      DO 50 I=1, M
      DO 50 J=1, M
         IF(R(I, J). NE. RS(I, J)) GOTO
   50 CONTINUE
      GOTO 80
   55 DO 60 I=1, M
      DO 60 J=1, M
   60 R(I, J)=RS(I, J)
      GOTO 35
   80 GO 100 L=1, K
```

**待分类零件特征矩阵** 表 4-13-4

| 零件 \ 特征 | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ | $Y_4$ | $Y_5$ | $Y_6$ | $Y_7$ | $Y_8$ | $Y_9$ | $Y_{10}$ | $Y_{11}$ | $Y_{12}$ | $Y_{13}$ | $Y_{14}$ | … | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.4 | 0.5 | | | 1 | | | 0.6 | | | | | | | | |
| $x_2$ | 0.6 | 0.5 | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | |
| $x_3$ | 1 | 0.5 | | 0.5 | | | | 0.2 | | | | | | | | |
| $x_4$ | 0.1 | 0.5 | | | | | | 0.6 | | 0.5 | 1 | | | | | |
| $x_5$ | 1 | 0.5 | | 1 | | | | 0.6 | | 0.5 | | | | | | |
| $x_6$ | 0.6 | 0.5 | 0.5 | 1 | | | | 0.6 | | | | | | | | |
| $x_7$ | | 1 | | 0.5 | | | | | | | | | | | | |
| $x_8$ | | 1 | | 0.5 | | | | | | | | | | | | |
| $x_9$ | | 1 | 0.5 | 0.5 | 1 | | | | | | | | | | | |
| $x_{10}$ | | 1 | 0.5 | 0.5 | 1 | | | | | | | | | | | |
| $x_{11}$ | | 0.8 | 0.5 | | 1 | 1 | | 0.2 | | | | | | | | |
| $x_{12}$ | 1 | 0.5 | | 0.5 | | 1 | | 0.2 | | | | | | | | |
| $x_{13}$ | 0.8 | 1 | | 1 | | 1 | | 0.6 | | | | | | | | |
| $x_{14}$ | 1 | | | | | 1 | | | | | | | | | | |
| $x_{15}$ | 1 | 1 | 1 | | | 1 | | 0.6 | | | | | | | | |
| $x_{16}$ | 1 | | | | | | | 0.2 | | | 1 | | | | | |
| $x_{17}$ | 0.8 | 0.5 | | 0.5 | | 1 | | 0.6 | | 0.5 | | | | | | |
| $x_{18}$ | 1 | | | 1 | | | | 0.2 | | | | | | | | |
| $x_{19}$ | 0.8 | 1 | | 0.5 | | | | 1 | | 1 | | | | 0.6 | | |
| $x_{20}$ | 0.8 | 1 | | 0.5 | | | | 0.5 | | 0.5 | 1 | | | 0.4 | | |

```
      DO 90 I=1, M
      DO 90 J=1, M
      RS(I, J)=1.0
      IF(E(L). GT. R(I, J)) RS(I, J)=0.0
      IRS(I, J)=RS(I, J)
90    CONTINUE
      WRITE( *, 91) E(L)
      WRITE( *, 92)  ((IRS(I, J), I=1, M), J=1, M)
91    FORMAT(////1X, E(L)=', F7.3)
92    FORMAT(20(2X, I1))
100   CONTINUE
      STOP
      END
```

输入数据：M——零件数；

N——特征数；

K——阈值 λ 的个数；

E(L) = λ 阈值；L = 1,…,K

U(I,J)——特征矩阵

输出结果：E(L)，IRS(I,J)——聚类矩阵

利用键盘输入以下数据：M = 20，N = 30，K = 8，U(20,30)，E(L) = (0.875，0.85，

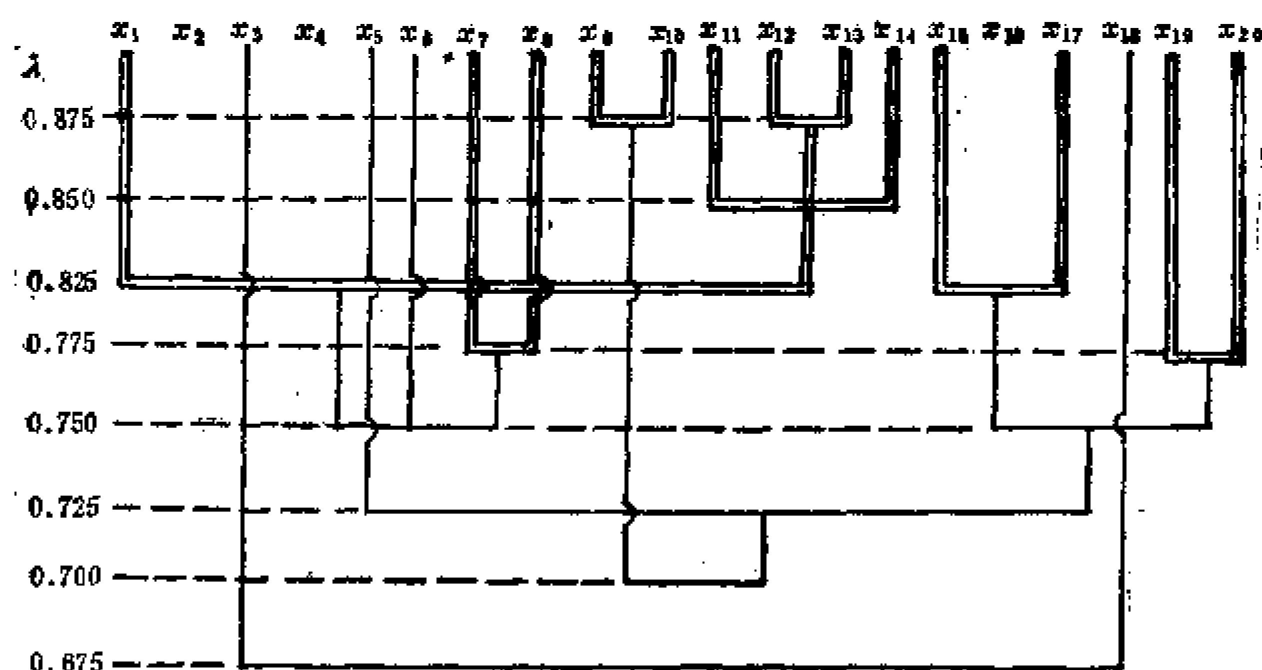



图 4-13-2 动态聚类图(双线为最后选择聚类)

0.825, 0.775, 0.75, 0.725, 0.7, 0.675）得动态聚类矩阵IRS（I, J）。再作出动态聚类图，如图4-13-2所示。

4.选择最佳的分类结果

参考以下两个因素决定选择结果：

（1）组内零件的相似程度；

（2）组内零件个数的多少。

根据1、2两因素，此20个零件聚类的最佳结果为阈值 $\lambda=0.775$ 时的分类归组结果。即：

$\{x_7, x_8\}$属轴类零件，$\{x_9, x_{10}\}$也属轴类，但结构较前类轴复杂，特征要素多；

$\{x_1, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}$为盘类（齿轮）零件；

$\{x_{16}, x_{17}\}$为结构复杂的盘类零件；

$\{x_{19}, x_{20}\}$材料为铸铁的法兰盘。

其他零件多属标准件，特殊件自成类组，它们不是实施成组技术的对象。

从实例可以看出：这一分类归组结果是切合实际的，模糊聚类用于成组技术是可行的。

## 四、三种分类归组方法对比

1.势函数分类归组

根据南斯拉夫J.PEKLENIK著《成组工艺中零件分类法的新发展》一文，零件用72个特征描述，采用普通聚类分析法（势函数法）对四个零件进行分类，其结果如图4-13-3所示。

图中1号零件代表某特定类零件的参考件，其他零件通过势函数与参考件比较决定是否归入此类，这是势函数法的基本思路。用于零件分类的72个特征用72个方格表示。某零件若具有指定特征，则相应方格涂黑，否则为白，这样每个零件都对应一个二进制矩阵。将参考件及待分类的零件的二进制特征输入计算机，计算出待分类零件的势值，此值反映了待分类零件与参考件的相似程度。从图4-13-3中可看出3号件的势值为0.8948，6号件的势值为0.837，可以与1号零件归为一类。而19号件的势值为0.587，表明与1号件相似程度差，故不能归入1号零件的类组。

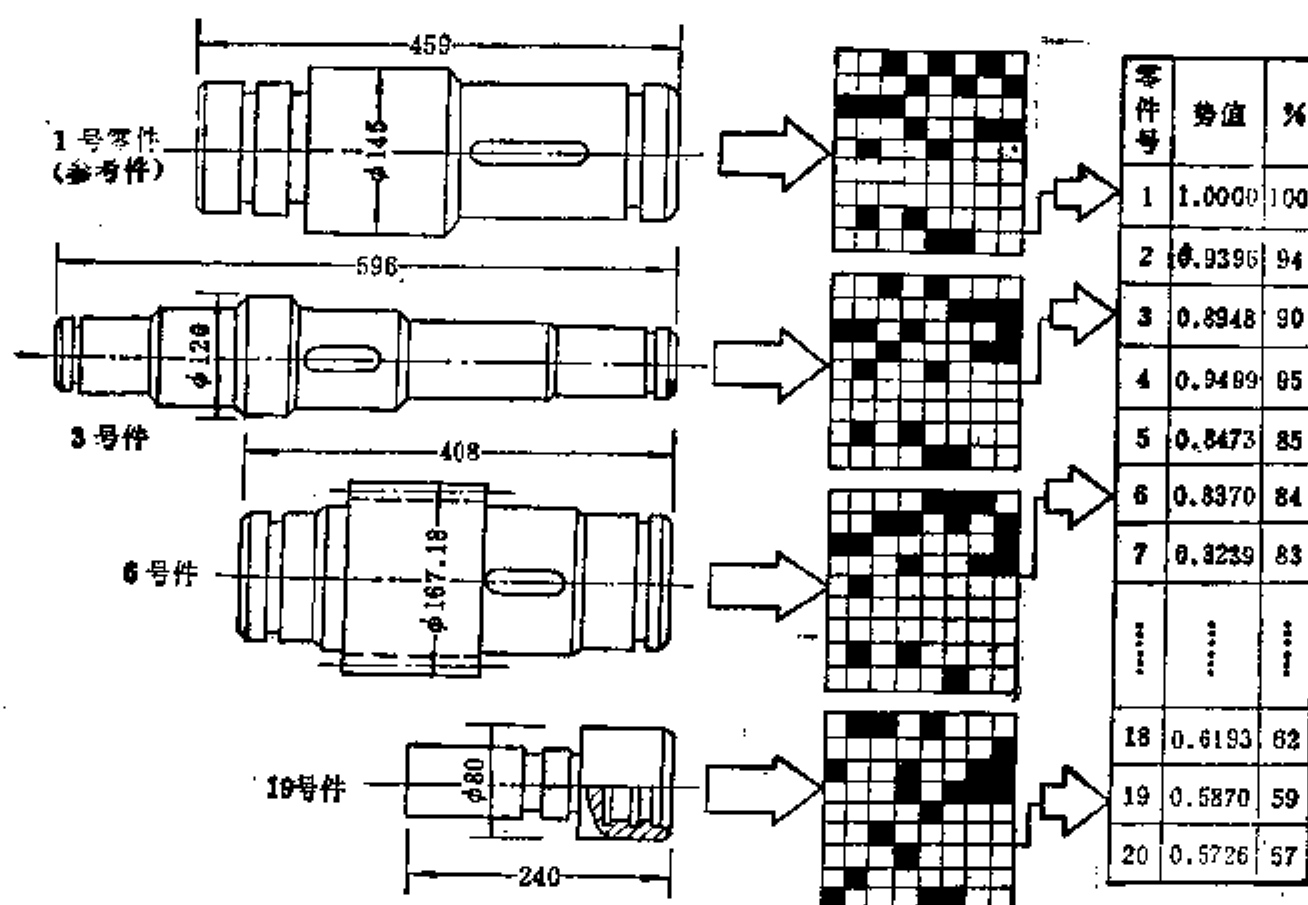



图 4-13-3　零件及分类计算结果

2. 利用编码法分类归组

采用我国JCB法则对上面四个零件进行编码（只编前五位主码）如下：

1号零件的编码：24030；

3号零件的编码：24330；

6号零件的编码：24034；

19号零件的编码：20641。

从码位中可看出，前面三个零件相似程度高，可以归属为同一组；而19号相似程度太低，故不能归于一组。

3. 用模糊聚类法分类归组

（1）选择分类零件所涉及的特征，做为分类用特征，建立特征矩阵如表4-13-5。

（2）利用夹角余弦公式计算相似矩阵 $\underset{\sim}{R}$

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0.89 & 0.83 & 0.34 \\ 0.89 & 1 & 0.74 & 0.53 \\ 0.83 & 0.74 & 1 & 0.31 \\ 0.34 & 0.53 & 0.31 & 1 \end{bmatrix}$$

（3）通过求传递闭包计算 $\hat{\underset{\sim}{R}}$。

$$\hat{\underset{\sim}{R}}=\begin{bmatrix} 1 & 0.89 & 0.83 & 0.53 \\ 0.89 & 1 & 0.83 & 0.53 \\ 0.83 & 0.83 & 1 & 0.53 \\ 0.53 & 0.53 & 0.53 & 1 \end{bmatrix}$$

（4）利用模糊等价关系归组。取阈值 $\lambda=0.8$，则1、3、6号零件可归为一组，19号相似程度差属另组。

零件特征矩阵　　　　表 4-13-5

| 特征 | | 1号件 | 3号件 | 6号件 | 19号件 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 回转体$L/D$ | | | 0.2 | |
| 2 | 多向台阶的圆柱体 | 1 | 1 | 1 | |
| 3 | 一般槽 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | |
| 4 | 有齿形 | | | 1 | |
| 5 | 盲孔，台阶孔 | | | 0.4 | 1 |
| 6 | 孔内有螺纹 | | 1 | | 1 |
| 7 | 孔内有槽 | | | | 1 |
| 8 | 表面有多个加工平面 | | | | 1 |
| 9 | 沿径向或轴向有槽 | 1 | 1 | 1 | |
| 10 | 端面，台阶面有加工要求 | | | 1 | |
| 11 | 有分度的轴向孔 | | | | 1 |
| 12 | 最大尺寸 | 0.6 | 0.8 | 0.6 | 0.4 |
| 13 | 最高精度 | 0.7 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 棒料 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 |
| | $\sum_{i=1}^{n}\mu_{i}^{2}$ | 3.14 | 5.09 | 5.69 | 7.20 |

通过三种分类归组方法得到同样的结果，这充分说明模糊聚类对零件分类归组是完全可行的，而且还具有下列优点：

（1）用隶属度建立的模糊特征矩阵更合理，特征数从72个减少到30个或更少，这是其他分类归组方法无法相比的；在[0,1]中取任意值，不同的隶属度能详尽地刻画出零件之间的差别；

（2）可不用事先寻找参考件，可用待分类零件自动进行动态聚类，只要计算机容量允许，可以一次完成很多零件的分类归组；

（3）不用专门培训人员，只要具备一般的机械制造专业知识，就可以熟练运用。

综上所述，模糊聚类分析法，可节省人力、物力、财力，可作为GT分类归组的新途径而推动成组技术的发展。

## §4-14　模糊数学在新产品开发决策中的应用[76]

1986年，谢素卿，张亚岑等给出了将Fuzzy数学用于新产品开发决策的新方法。它能将参加决策的专家们的意见条理化、定量化、使最后决策时速度快，可靠性好。

新产品开发一般要经过调研、筛选及决策三个步骤。经过广泛而深入的调研，得到了关于新产品的大量信息，如该项新产品对国民经济发展的意义、技术先进性、经济效益、市场需求量以及竞争能力等。其次，要综合上述各方面的情况作出筛选，初步确定出一批具有可比性的新产品，最后再经过决策专家们的讨论决定取舍，并排出几种新产品上马的先后顺序。在决策的讨论过程中，与会者在发言时已经在头脑中作了一番综合评判，但由于每个人对新产品的各个侧面的考虑不尽相同，因此常出现意见分歧，往往争论不休，迟迟

不能决策。

为解决这个矛盾，我们将每位专家头脑中的"综合评判"建立为模糊数学的综合评判模型，它能把专家们的意见条理化、定量化及准确化。只要参加决策的每位专家各填写两种统计表，再由程序员将表上数据输入计算机，便可在极短的时间内排出几种不同的新产品的开发顺序。应用这种方法进行决策不仅速度快，而且由于程序简单，又能综合反映专家们的思维判断能力，所以结果的可靠性也比一般的加权平均法要高得多。

我们应用这种方法在某公司开发1985年的新产品项目中起了有效地决策作用。尤其是在决策其中20个实施项目时，应用模糊决策方法确定的最先上马的项目是引进$DS$生产线，这和专家们的决策意见完全吻合，符合实际情况。可是，用同样的统计数据，采用通常的加权平均方法排序，则$DS$生产线，就被排在第三位，而不是最先上马的项目了。这一实践证实，模糊数学在新产品开发的决策中是大有可为的

## 一、综合决策的数学模型

综合决策数学模型归结为：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}$$

式中：$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_{n\times m}$为一个模糊关系矩阵；$\underset{\sim}{A}$—权数矩阵或加权矩阵；"$\circ$"算子可采用（$\wedge$，$\vee$），（$+$，$\cdot$），（$\cdot$，$\vee$）等；$\underset{\sim}{B}$—综合决策。
我们在某公司的新产品开发中采用了（$\cdot$，$\vee$）算子。

对已求出的综合决断向量$\underset{\sim}{B}=(b_1, b_2, \cdots, b_m)$先按最大隶属度原则确定等级，然后再作适当调整。调整工作主要是在$\{b_k\}$中出现有相等的最大值时进行。调整方法的基本思想是兼顾"左邻"、"右舍"。例如{0.250, 0.282, 0.186, 0.282}中出现了两个最大值0.282,对最后一个0.282因只有"左邻"而无"右舍"，且"左邻"的总和≫0.282，故往左靠一级。而前一个0.282，"右舍"之和>0.282，而"左邻"0.252<0.282，故"右舍"引力大，应向右靠一级，这样正好应评为第三个等级。

一般有，设$b_{k_0}$为$\{b_k\}$中之最大者。若有$\sum\limits_{k=1}^{k_0-1} b_k\geqslant a\cdot b_{k_0}>\sum\limits_{k=k_0+1}^{m} b_k$时，则将等级向左移动一级。

若有$\sum\limits_{k=k_0+1}^{m} b_k\geqslant a\cdot b_{k_0}>\sum\limits_{k=1}^{k_0-1} b_k$时，则应将等级向右移动一级（$a$为适当选取之正实数，如例中$a=1$）。

最后在同一等级中，再进一步排序。排序时采用加权平均法，平均值大者排在前面。

## 二、新产品开发的决策程序

1.如何选取因素$U=\{u_1, u_2, \cdots u_n\}$

在新产品开发中，一般应考虑的因素很多。在大量调研的基础上，应抓住五个主要的因素，即新产品的经济效益，技术先进性，市场需求量，竞争能力以及其对国民经济发展的意义。将上述各因素制定为一个统计表格（见表4-14-1），由熟悉这项工作的专家加以评分。这种评分不同于常用的数理统计方法，是填写一个分数范围，同时对打此分数时的自信度如何，再填写一个百分数范围。

因素评分表（分数为0-10分，自信度为0～100%）　　表 4-14-1

| 项目 | | 经济效益 | | 技术先进性 | | 市场需求量 | | 竞争能力 | | 对国民经济发展的意义 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 序号 | 名称 | 分数 | 自信度 | 分数 | 自信度 | 分数 | 自信度 | 分数 | 自信度 | 分数 | 自信度 |
| 1 | DS | 8～9 | 70～80 | 8～9 | 80～90 | 8～9 | 80～90 | 7～8 | 80～90 | 6～7 | 50～60 |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| ⋮ | | | | | | | | | | | |
| N | | | | | | | | | | | |

例如对于项目1-$DS$生产线，如认为经济效益大，可以打 8 ～ 9 分，而对这一打分的把握程度只有七、八成时，自信度为70%～80%。这种评分的理由很简单，因为获得的信息模糊性较大，如果把本来模糊的事物，勉强加以精确化而填写一个"准确"的数字，则这种"准确"却适得其反，倒不如还事物的本来面目，采用模糊统计的办法，似乎"模糊"而实则精确。

2.怎样确定决断集$V=\{v_1, v_2\cdots, v_m\}$

在新产品开发中，常用四个等级来决定决断的程度。即：优先、适宜、延迟、取消。故取$V$={优先、适宜、延迟、取消}。

3.确定单因素评判矩阵$\underset{\sim}{R}_{n\times m}$

在上述五个因素、四个等级的条件下，单因素评判矩阵为$\underset{\sim}{R}_{5\times 4}$。　　令

$$t_{ij}^{(k)}=\frac{a_{ij}^{(k1)}+a_{ij}^{(k2)}}{2}\cdot\frac{p_{ij}^{(k1)}+p_{ij}^{(k2)}}{2}$$

式中：$k$为填表人的编号；$i$为产品的序号；$j$为该产品的第$j$个因素，所以，

$t_{ij}^{(k)}$表示：第$k$个填表人对第$i$个项目的第$j$个因素的评价值；

$a_{ij}^{(k1)}$表示：第$k$个填表人对第$i$个项目的第$j$个因素评分的下界值；

$a_{ij}^{(k2)}$表示：第$k$个填表人对第$i$个项目的第$j$个因素评分的上界值；

$p_{ij}^{(k1)}$表示：第$k$个填表人对第$i$个项目的第$j$个因素所评分数自信度的下界值；

$p_{ij}^{(k2)}$表示：第$k$个填表人对第$i$个项目的第$j$个因素所评分数自信度的上界值。

根据以往的经验可规定一个划分标准如下：

当$t_{ij}\geqslant 5$时，定为"优先"；当$5>t_{ij}\geqslant 3$时，定为"适宜"；当$3>t_{ij}\geqslant 2$时，定为延迟，当$t_{ij}<2$时，定为"取消"。

这种划分标准的规定是基于下述事实的，因为一项新产品的开发中，决定其评价因素是十分复杂的，而我们只是考虑了其中最主要的几种因素，而这几种因素又往往牵扯到其它各个方面，所以一项新产品的评价值，只要有七、八成的把握就属于可以优先考虑的范围了。一定要求有"十拿九稳"的把握再上马，不仅是不现实的，而且很有可能是时间效益较短的"短命产品"，不久就会被淘汰。

现仍以$DS$生产线为例，进行单因素评定。按前面划分的标准，单因素评价值$t$的取值区间[0，10]被分为四个子区间[0，2]，[2，3][3，5]，[5，10]在七位填表的

专家中，有一位对因素的评分为7～8分，自信度为70%～80%，则：$t=\frac{7+8}{2}\cdot\frac{0.7+0.8}{2}=5.625$，如果七位专家对该因素的评分均落在[5，10]区间内，则可得出从该因素考虑时，$DS$生产线单因素评价矩阵$\underset{\sim}{R}$中优先上马的隶属度为7/7＝1。再从其它因素考虑，"优先"上马的隶属度为6/7＝0.857属"适宜"上马的隶属度为1/7＝0.143，属"延迟"及"取消"等级的隶属度为零。由此便可得到$DS$生产线单因素评价矩阵中两行的数值。对其它因素也进行类似的计算，最后可得$DS$生产线单因素评价矩阵$\underset{\sim}{R}$如下：

$$\underset{\sim}{R}_{5\times4}=\begin{bmatrix}0.857 & 0.143 & 0 & 0\\ 0.857 & 0.143 & 0 & 0\\ 1.000 & 0 & 0 & 0\\ 0.857 & 0.143 & 0 & 0\\ 0.286 & 0.286 & 0 & 0.428\end{bmatrix}$$

4.确定各因素加权矩阵$\underset{\sim}{A}$

如何确定综合评判中的"权数"，是一个至关重要的问题。我们在确定"权数"的过程中，借用了"价值工程"中对功能的加权平均法，如0～4评分法。实践证明这是行之有效的解决办法。这次探索说明，将"价值工程"中的方法与模糊综合评判相结合，在实践中收到的较好的结果。

具体进行0～4评分法时，是用表4-14-2进行的。在表4-14-2中为便于比较各因素，将各因素分别对应列为行与列的一项。如需比较第$i$与第$j$个因素时，可按评分办法打分。如认为两个因素同等重要时，则在第$i$行第$j$列处打上2分；同时在第$j$行第$i$列处也打2分。如认为第$i$个因素较第$j$个因素重要，可在第$i$行第$j$列打3分，而在第$j$行第$i$列处打1分。如认为第$i$个因素比第$j$个因素重要得多时，可在第$i$行第$j$列处打4分，而在第$j$行第$i$列处打0分。这样，若将第$i$行$j$列的得分记为$a_{ij}$，则表中的数据应满足：$a_{ij}+a_{ji}=4$（$j\neq i$），而在$i=j$处不打分。

因素权重（0～4）评分表　　　　表4-14-2

| | 经济效益 | 技术先进性 | 市场需求量 | 竞争能力 | 对发展国民经济的意义 |
|---|---|---|---|---|---|
| 经济效益 | × | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 技术先进性 | 2 | × | 3 | 3 | 2 |
| 市场需求量 | 1 | 1 | × | 2 | 3 |
| 竞争能力 | 1 | 1 | 2 | × | 1 |
| 对发展国民经济的意义 | 2 | 2 | 1 | 3 | × |

然后，将各行所得分数相加，算出该行得分占总得分数的百分比为该行因素的权重，再将所有填表人所填的关于同一项目的权数合计、平均，便可得出该项目的权数矩阵$\underset{\sim}{A}$。

例如，由七位专家填写的关于$DS$生产线的权数矩阵为：$\underset{\sim}{A}=(0.289, 0.239, 0.164, 0.139, 0.171)$。

5.计算综合评判矩阵$\underset{\sim}{B}$

由$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}$，设$\underset{\sim}{B}=(b_1, b_2, b_3, b_4)$，则

$$b_i=\bigcup_{k=1}^{5} a_k \cdot r_{ki} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

归一化：$b_i^*=b_i \Big/ \sum_{i=1}^{4} b_i \quad (i=1, 2, 3, 4)$，得

$$\underset{\sim}{B}^*=(b_1^*, b_2^*, b_3^*, b_4^*)$$

例如对$DS$生产线的综合评判矩阵计算如下：

$$\underset{\sim}{B}=(0.289, 0.239, 0.164, 0.139, 0.171)\circ\begin{bmatrix} 0.857 & 0.143 & 0 & 0 \\ 0.857 & 0.143 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.857 & 0.143 & 0 & 0 \\ 0.286 & 0.286 & 0 & 0.428 \end{bmatrix}$$

$$=(0.248, 0.049, 0, 0.073)$$

进行归一化得：

$$\underset{\sim}{B}^*=(0.6703, 0.1324, 0, 0.1973)$$

按最大隶属度原则，$DS$生产线应优先上马。

6.项目排序

在新产品开发中，在分成的四个等级中，“优先”与“适宜”属于“上马”的项目，“延迟”和“取消”属于“下马”的项目。在排序时，即使同属“上马”的项目，也不能只看“优先”的隶属度，还要兼顾“适宜”的隶属度。为此，排序时又需加“权”，即在$\underset{\sim}{B}^*=(b_1^*, b_2^*, b_3^*, b_4^*)$中与$b_i^*$相应的加权数用$a_i$表示时：

“优先”项目排序时，取$a_1 \gg a_2$，例如可取$a_1=0.8$，$a_2=0.2$；也可取$a_1=0.7$，$a_2=0.3$。

“适宜”项目排序时，取$a_1 \ll a_2$，如取$a_1=0.2$，$a_2=0.8$，在上述两种情况下，$a_3=a_4=0$。

“延迟”项目排序时，取$a_1=a_2=0$；$a_3 \gg a_4$，

“取消”项目排序时，取$a_1=a_2=0$；$a_3 \ll a_4$。

按照上述办法得出的数据，按大小顺序排列，就可得到各项目“上马”的先后次序，即根据$N=(a_1b_1^*+a_2b_2^*+a_3b_3^*+a_4b_4^*)/2$的大小排序。下面列出了由PC-1500计算机上输出的排序结果（项目均为代号，结果数据只取到小数点后四位。

因所列的20项，均已初选为“上马”项目，故输出结果就没有“延迟”及“取消”的项目，这又一次有力地证明用模糊数学模式与实际的一致性。

优先项目：

（1）DS生产线　$N=0.2823$

（2）GN装置　$N=0.2796$

（3）SF机　$N=0.2292$

（4）340机　$N=0.2191$

(5) ZB机　$N=0.2186$
(6) CN机　$N=0.2074$
(7) JG机　$N=0.2039$
(8) DZ秤　$N=0.2016$
(9) ZA机　$N=0.1917$

适宜项目：

(10) FN机　$N=0.2154$
(11) GO机　$N=0.2097$
(12) XU机　$N=0.2003$
(13) XB机　$N=0.1984$
(14) YU机　$N=0.1905$
(15) SA机　$N=0.1796$
(16) DB机　$N=0.1789$
(17) DN机　$N=0.1783$
(18) AN机　$N=0.1661$
(19) CD机　$N=0.1661$
(20) VS机　$N=0.1616$

## 三、本算法的BASIC语言程序

考虑到目前PC-1500单板机在各企业中已得到较普遍的应用，故用BASIC语言编制了计算机的通用程序。使用时只需将表4-14-1和4-14-2的数据输入，便可打印出综合评价矩阵及同级项目的排序。此程序还可使用于大容量的计算机

# 第五章

## 模糊控制系统、模糊控制器及模糊诊断模型

模糊控制系统、模糊控制器及模糊诊断模型是模糊数学应用最广泛、取得成效最显著的领域之一。

古典控制理论和现代控制理论在许多领域中获得了成功的应用。它们的一个基本的共同特点是控制器的设计都要建立在被控制对象精确数学模型的基础之上。但是在现实世界中，多数系统极其复杂，具有高度非线性、时变、带有噪声、强耦联、不对称增益、时滞等特征。系统本身构成了所谓大系统或所谓人-机系统。使人们难于用传统的数学方法为其建立精确的数学模型。对这类系统如何实现自动控制是一个极为重要的研究课题。复杂系统的模糊性和人在处理模糊信息方面所表现的能力和经验，使人们试图吸取人脑对复杂现象进行识别和判决的特点，形成简捷灵活的描述手段和处理方法。

Zadeh, Mamdani等控制论专家，应用模糊集合理论于复杂系统，建立了模糊控制系统的理论和方法，构造了模糊控制器，为处理和解决复杂系统的最佳化控制提供了新的途径。

近几年来，我国控制论研究工作者，在模糊控制系统理论与方法、设计新型模糊控制器、模糊诊断模型及其在复杂生产工艺过程中的应用方面，作了大量的具有理论和实际意义的工作，开拓、发展了这一新领域。

### §5-1　模糊语义推理的自学习算法及应用[80]

1984年，李太航、沈祖梁等提出了 Fuzzy 语义推理的自学习算法。因为对一些复杂的非线性系统的控制，Fuzzy 语义推理有其巨大的优越性。但由于客观过程的高度复杂，条件语义与结论语义的对应关系很难由人预先较为确切地给定，在实际应用中，这种对应关系最好能由控制系统自我调整和生成。因而提出模糊语义推理自学习算法很有必要。

由于多因素推理结果对最终结论影响的权重是随机变化的，在大的复杂系统中，人难以掌握权重的变化规律，因此，他们还给出了解决权重变化规律的自产生算法。

此算法应用于高炉冶炼，大大提高了命中率。

#### 一、问题的提出

一个复杂过程的 Fuzzy 测辨系统，它的最终测辨将是形如$\dfrac{P', P\to Q}{Q'}$的 Fuzzy 变换的复合，其中任一Fuzzy变换均可以Fuzzy条件语句为其约束。Fuzzy条件语句表述的是人对该复杂系统一些基本规律的大致总结。

对于Fuzzy测辨系统，人的经验只应是 Fuzzy条件语句的初态，系统必须在实际应用过程中予以随机调整。可能的话，由系统自生成一些人事先没有觉察或没法给出的经验，也只有这样，该测辨系统才有可能获得实际应用。

此外，一个多因素作用下的大的复杂系统，存在着各因素对过程影响的权重。难点在于这种权重是不固定的、变化的，情况不同权重也不同。人很难觉察出由于情况变化各因素的权重的变化情况，从而即使利用了单因素作用下的人为经验，其综合作用效应仍会显得难以琢磨。鉴于此，在各种不同情况下的单因素权重的自产生，在复杂系统测辨中也就显得至关重要。

## 二、条件语义区间的自修正

设某单因素条件语义区间的划分为：

$$(a_0, a_1), (a_1, a_2), \cdots, (a_{n-1}, a_n)$$

结论语义区间的划分为：

$$(b_0, b_1), (b_1, b_2), \in\cdots, (b_{m-1}, b_m)$$

各区间分别对应语义名$A_1$，$A_2$，…，$A_n$及$B_1$，$B_2$，…，$B_m$ 辅以时间序列，条件语句的形式为：

$$\text{If } a\in A_i \text{ and } b_{t-1}\in B_j \text{ then } b_t\in B_K \quad (5\text{-}1\ 1)$$

由于$a$的归属有$n$种可能性，$b_{t-1}$有$m$种可能，所以这样的条件语句当有$n\cdot m$种。这是单因素作用下粗略的因果规律，然后通过条件语义区间的修正来完善与调整该条规律。

1.修正方向

设$b_{t-1}\in B_j$给条件语句以表格形式，见表5-1-1。

条 件 语 句 表　　　　表 5-1-1

| $a$ \ $b_{t-1}$ | $A_1$ | $A_2$ | ……… | $A_i$ | $A_{i+1}$ | ……… | $A_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_j$ | $B_{j,1}$ | $B_{j,2}$ | ……… | $B_{j,i}$ | $B_{j,i+1}$ | ……… | $B_{j,m}$ |

如果当前输入$a$属于语义$A_i$，则在$b_{t-1}$属$b_j$语义时，可得预测范围为$B_{j,i}$，若实测值$b_t\notin B_{j,i}$则意味着预测产生错误。错误原因显然是引用条件语句的不正确。如果实测$b_t\in B_{j,i+1}$，由语句表不难发现，应该引用的条件语句为：

$$\text{If } a\in A_{i+1} \text{ and } b_{t-1}\in B_j \text{ then } b_t\in B_{j,i+1} \quad (5\text{-}1\text{-}2)$$

也即倘若$a\in$语义$A_{i+1}$，则预测语句与实测语义吻合。鉴于此，如果将$A_i$的右端点$a_i$适当左移（减值），$a\in A_i$语义的可能性将会减小，而$a\in A_{i+1}$语义的可能性将会增大。如果实测$b_t\in B_{j,i-1}$，应将$A_i$的左端点适当右移，从而缩小$A_i$的语义范围。

2.修正值

因$a\in A_i$导出预测错误，并不意味着必须立即把$[a_{i-1}, a]$或$[a, a_i]$排除出$A_i$的语义区间，而仅说明将其排除的可信度增加。设该可信度值为$\overline{\mu}$，若$\overline{\mu}=1$，当然理应将其全部排除；当$\overline{\mu}<1$，排除部分可为$\overline{\mu}\,|a-a_{i-1}|$（或$\overline{\mu}\,|a_i-a|$）。

现不妨假定待修改的为左端点$a_{i-1}$。由于$[a_{i-1}, a]\notin A_i$的可信度即为$[a_{i-1}, a]\in A_i$的可疑度，单因素作用时，$[a_{i-1}, a]\in A_i$的可疑度递推生成公式为：

$$\eta_{A_i}^{(N)}([a_{i-1}, a]) = G(N)/F(N)+G(N) \tag{5-1-3}$$

式中：$G(N)=\sum_{r=1}^{N} g(\lambda_r^-)$；$\lambda_r^-$为第$r$次预测的错误程度；$g$为该错误的评价函数；$N$为当前预测的次数；$F(N)=\sum_{r=1}^{N} f(\lambda_r^+)$；$\lambda_r^+$为第$r$次预测的正确程度；$f$为该正确的评价函数。

若把整个条件论域作$M$个细小分划，落在$A_i$语义区间($[a_{i-1},a]$)共有$M_i$个分划$a_i^{(1)}$，$a_i^{(2)}$，…，$a_i^{(M_i)}$（其中$a_i^{(1)}=a_{i-1}$，$a_i^{(M_i)}=a_i$），于是，通过实践可以生成$M_i$个正负效果评价累积$\sum f(\lambda_{r,h}^+)$与$\sum g(\lambda_{r,h}^-)$，$(h=1, 2, \cdots, M_i)$

今设$a_i^{(S)}<a\leqslant a_i^{(S+1)}$，则有

$$\overline{\eta}_{A_i}^{(N)}[(a_{i-1},a)] = \frac{\sum_{r=1}^{N} g(\lambda_r^-)}{\sum_{r=1}^{N} f(\lambda_r^+)+\sum_{r=1}^{N} g(\lambda_r^-)} = \frac{\sum_{r=1}^{N}\sum_{r=1}^{S} g(\lambda_{r,h}^-)}{\sum_{r=1}^{N}\sum_{r=1}^{S} f(\lambda_{r,h}^+)+\sum_{r=1}^{N}\sum_{h=1}^{S} g(\lambda_{r,h}^-)} \tag{5-1-4}$$

故修正步长：

$$\begin{aligned}\Delta_i &= |a-a_{i-1}|\cdot\overline{\eta}_{A_i}^{(N)}([a_{i-1}, a]) \\ &= |a-a_{i-1}|\cdot\frac{\sum_{r=1}^{N}\sum_{h=1}^{S} g(\lambda_{r,h}^-)}{\sum_{r=1}^{N}\sum_{h=1}^{S} f(\lambda_{r,h}^+)+\sum_{r=1}^{N}\sum_{h=1}^{S} g(\lambda_{r,h}^-)}\end{aligned} \tag{5-1-5}$$

不难推得右修点的修正步长公式，除标号的一些变动之外，亦与（5-1-5）式相仿佛。实际应用中，令

$$\lambda_{r,h}^- = \begin{cases} 2 & \text{语义不符且误差大于允许值，} \\ 1 & \text{语义相符，但误差大于允许值，或语义不符但误差小于允许值，} \\ 0 & \text{语义相符，且误差小于允许值或}(a\notin(a_i^{(h)}, a_i^{(h+1)})\text{。} \end{cases}$$

$$\lambda_{r,h}^+ = \begin{cases} 2 & \text{语义相符，且误差小于允许值；} \\ 0 & \text{语义不符或误差大于允许值或}a\notin(a_i^{(h)}, a_i^{(h+1)}) \end{cases}$$

并且，$f(\lambda_{r,h}^+)=\lambda_{r,h}^+$，$g(\lambda_{r,h}^-)=\lambda_{r,h}^-$

显然，修正后$(a_{i-1}, a_{i-1}+\Delta_i)$归入新语义区间，由此划分的正、负效果评价累积均置初态。

由修正步长公式不难看出，如正效果评价累积相对很大，修正值将会很小，而且，如果纯属偶然的出错，由于此时$\sum_{r=1}^{N}\sum_{h=1}^{S} f(\lambda_{r,h}^+)\gg\sum_{r=1}^{N}\sum_{h=1}^{S} g(\lambda_{r,h}^-)$，修正值近似于零。相反，当负效评价累积相对很大时，修正值也相应增大，以期迅速摆脱语义区间的错误部分。

由于规律本身的动荡性和多变性，只要求使修正能不断追综规律的变化，而没有必要强求修正必然稳定趋向于某固定值。

## 三、条件语句的自产生

在引用条件语句 If $a\in A_i$ and $b_{t-1}\in B_j$ then $B_t\in B_{j,i}$时，如果实测 $b_t'\notin B_{j,i}$ 同时又$b_t'\notin B_{j,i}$（$i=1,2,\cdots,n$），于是需要修改的当是$A_1$的左端点$a_0$，但$a_0$的右移至$a_0'$，将使条件论域上出现新的语义区间$[a_0,a_0']$，如果把$[b_t',b_0)$视作为新的结论语义区间，于是构成了新的条件语句。如$A_1$语义为"慢"，经左端点修改后，即可产生新的条件语义"很慢"，当然还可进一步产生"非常慢"，"慢极了"…等等。同样，$A_n$端点$a_n$的左移，也可以产生新的语义。这样，系统等于是在修改，并扩充着人预先给定但并不完备的经验。

## 四、多因素协同作用的权重自生成

设$K$个因素的输入值分别$a^{(1)}$，$a^{(2)}$，…，$a^{(K)}$，所属条件语义为$A_i^{(1)}$，$A_i^{(2)}$，…，$A_i^{(K)}$，各因素对结论的预测值分别为$b_t^{(1)}$，$b_t^{(2)}$，…，$b_t^{(K)}$，结论语义为$B_{j,i}^{(1)}$，$B_{j,i}^{(2)}$，…，$B_{j,i}^{(K)}$。

由于在修改条件语义区间时，语义规则本身被认为是正确的，也即当$b_{t-1}\in B_j$时，由$A_i^{(l)}\Rightarrow b_t\in B_{j,i}^{(l)}$的可信度为1（$i=1,2,\cdots,K$），该可信度当为：

$$\overline{\mu}B_{j,i}^{(l)}(a_i^{(l)},\ A_i^{(l)})=\overline{\mu}B_{j,i}^{(l)}(A_i^{(l)})\overline{\mu}A_i^{(l)}(a^{(l)})=\overline{\mu}A_i^{(l)}(a^{(l)})\qquad(5\text{-}1\text{-}6)$$

不妨设$a^{(l)}$落入$A_i^{(l)}$上的分划$a_i^{(l,s)}$与$a_i^{(l,s+1)}$之间，并设当前为第$N$次预测，因此，可信度递推生成公式当有：

$$\overline{\mu}^{(N)}A_i^{(l)}(a^{(l)})=\frac{F(N)}{F(N)+G(N)}=\frac{\sum_{r=1}^{N}f(\lambda_{r,ls}^{+})}{\sum_{r=1}^{N}f(\lambda_{r,ls}^{+})+\sum_{r=1}^{N}g(\lambda_{r,ls}^{-})}\qquad(5\text{-}1\text{-}7)$$

也即由$a^{(l)}\Rightarrow b_t\in B_{j,i}^{(l)}$的可信度

$$\overline{\mu}^{(N)}B_{j,i}^{(l)}(a^{(l)},A_i^{(l)})=\frac{\sum_{r=1}^{N}f(\lambda_{r,ls}^{+})}{\sum_{r=1}^{N}f(\lambda_{r,ls}^{+})+\sum_{r=1}^{N}g(\lambda_{r,ls}^{-})}\qquad(5\text{-}1\ 8)$$

此即为多因素协同作用时各因素的相对权重，而实际预测值$b_t$当为

$$b_t=\sum_{l=1}^{K}\frac{\dfrac{\sum_{r=1}^{N}f(\lambda_{r,ls}^{+})}{\sum_{r=1}^{N}f(\lambda_{r,ls}^{+})+\sum_{r=1}^{N}g(\lambda_{r,ls}^{-})}b_t^{(l)}}{\sum_{l=1}^{K}\dfrac{\sum_{r=1}^{N}f(\lambda_{r,ls}^{+})}{\sum_{r=1}^{N}f(\lambda_{r,ls}^{+})+\sum_{r=1}^{N}g(\lambda_{r,ls}^{-})}}\qquad(5\text{-}1\text{-}9)$$

不难看出，若由输入$a^{(l)}$导致的预测与实际相符，必然导致$\sum_{r=1}^{N}f(\lambda_{r,ls}^{+})$的递增，从而该因素的相对权重增大；相反，则$\sum_{r=1}^{N}g(\lambda_{r,ls}^{-})$递增，从而该因素的相对权重减小。

一个实用的预测系统当是个多因素多环节系统，此时应把后一环节对输入的期望语义看作前一环节的实测语义值，从而上述语义自修正与权重的自生成方法均可被整个系统递归采用。

## 五、应　　用

上述方法曾应用于高炉炼铁水含[Si]量的预测系统，离线实验结果表明，通过若干炉次的自学习，系统对后续炉次铁水含[Si]量预测的命中率有了显著提高，一般可由60%提高到85%以上。显然，如果冶炼条件相同，学习炉次越多，预测命中率越高。

图5-1-1为经过26炉自学习后系统预测误差情况与单纯模糊预测以及工长经验预测情况的对照。不难看出，无论是误差小于0.5的命中情况，还是与实际值的接近和跟踪程度，前者比后两者好得多。

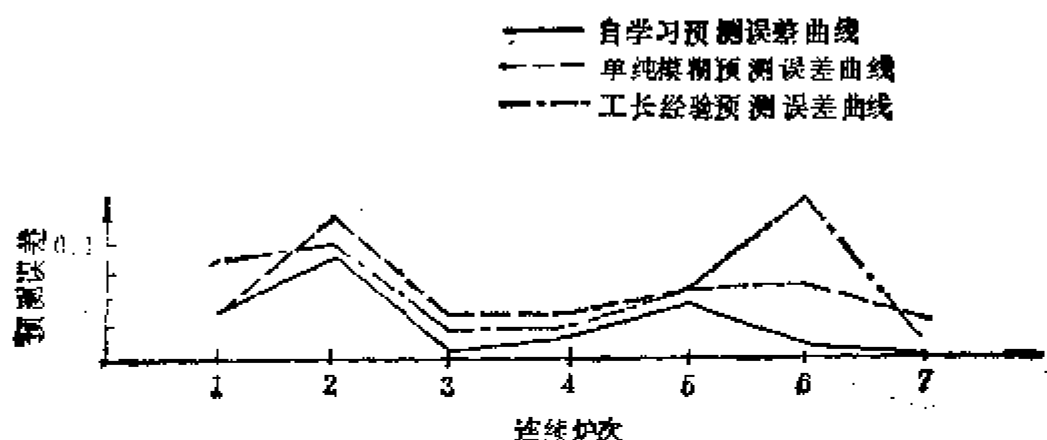



图 5-1-1　自学习系统预测情况

## §5-2　模糊控制的稳定性问题

1983年，邓聚龙为了对系统的动态过程实行Fuzzy控制，提高稳定性，利用Fuzzy数定义了Fuzzy控制律与六种典型控制过程，在此基础上提出了Fuzzy控制的稳定性条件，并给出了计算示例和实验结果。

### 一、Fuzzy控制的动态

系统的动态过程，一般是指控制信息输入后，从出现响应到暂态分量完全消失的全过程。经典控制的稳定性概念及分析方法是不适合Fuzzy控制的。因为Fuzzy控制是分阶段进行的多级控制，每一级的时间间隔与时间常数最大的暂态分量的消失时间比较足够短，因此，不能从每一个控制间隔的暂态分量是否消失作为衡量动态品质好坏的标准；或者说用衡量系统特征根的大小，考察特征根的分布的办法来评价Fuzzy控制的动态过程是不妥当的。事实上，一个特征根位于右半根平面的Fuzzy控制系统，完全有可能得到良好的动态品质。关键在于控制间隔（采样区间）$\Delta$的大小，控制信息$u$的强度及极性是否适当。而采样区间$\Delta$与控制信息$u$又与响应过程的预期形式有关。

下面我们将研究：

（1）几种典型的响应过程动态特征的描述；

（2）采样间隔$\Delta$及控制信息$u$的合理选择。

### 二、Fuzzy数与Fuzzy控制律

D. Dubois, H. Prade 提出了Fuzzy数和Fuzzy数运算的概念。对于真值为$y_i$

的Fuzzy数$\widetilde{y}_i$，可表为：

$$\widetilde{y}_i=(m(y_i),\ \alpha_i,\ \beta_i)_{L_i,R_i}$$

式中，$m(y_i)$，$\alpha_i$，$\beta_i$的几何意义见图5-2-1。

一般记$m(y_i)=y_i$或$m(y_i)=m_i$，$L_i$，$R_i$为Fuzzy数$\widetilde{y}_i$的左右枝函数。$L_i$在$[m_i-\alpha_i,\ C_i]$上单调升，$R_i$在$[d_i,m_i+\beta_i]$上单调降。记$L_i^{-1}$及$R_i^{-1}$为$L_i$与$R_i$的反函数，则$C_i=\min L_i^{-1}(1)$，$d_i=\max R_i^{-1}(1)$。若用$(\widetilde{y}_i)$表示Fuzzy数$\widetilde{y}_i$的零截集，则其闭包

$$B(\widetilde{y}_i)=[m_i-\alpha_i,\ m_i+\beta_i]$$

称为$\widetilde{y}_i$的底。

对于闭包$B(\widetilde{y}_i)$有下述关系：若$m_i>m_j$，且，$B(\widetilde{y}_i)\cap B(\widetilde{y}_j)=\phi$，$i\neq j$，则，$\widetilde{y}_i\underset{\sim}{\vee}\widetilde{y}_j\triangleq(m_i,\ \alpha_i,\ \beta_i)_{L_i,R_i}$；$\widetilde{y}_i\widetilde{\vee}\widetilde{y}_j\triangleq(m_j,\alpha_j,\beta_j)_{L_j,R_j}$。

对于一个$n$阶系统，若按图5-4-2给定$t=t_K(K=1,2,\cdots,)$时刻的输出（或状态）$\widetilde{y}_1^*$（“$*$”表示优化量或容许量，设计量），及其各阶导数$\dot{\widetilde{y}}_K^*$，$\widetilde{y}_K^{(2)*}$，$\widetilde{y}_K^{(3)*}$，$\cdots$，$\widetilde{y}_K^{(K-1)*}$，要求寻求一个合适的控制序列$\widetilde{u}_K^*$，称为Fuzzy控制问题。

序列$\{\widetilde{u}_1^*,\widetilde{u}_2^*,\cdots,\ \widetilde{u}_m^*\}$称为Fuzzy控制律。其中，

$$\widetilde{y}_K^{(\alpha)*}=(m_K^{(\alpha)},\ \alpha_K^{(\alpha)},\ \beta_K^{(\alpha)})_{L_K^{(\alpha)},R_K^{(\alpha)}},\quad K=1,2,\cdots,m,\quad \alpha=0,1,\cdots,n-1,$$

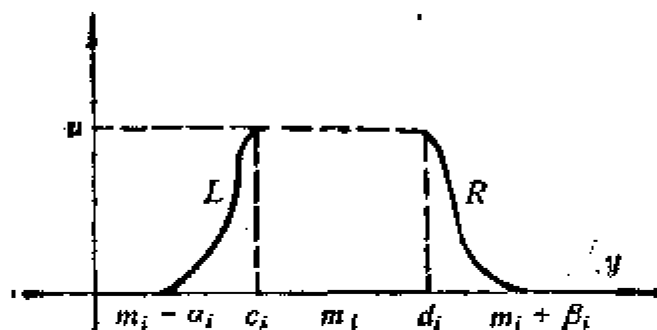



图 5-2-1　$m(y_i)$、$\alpha_i$、$\beta_i$几何意义

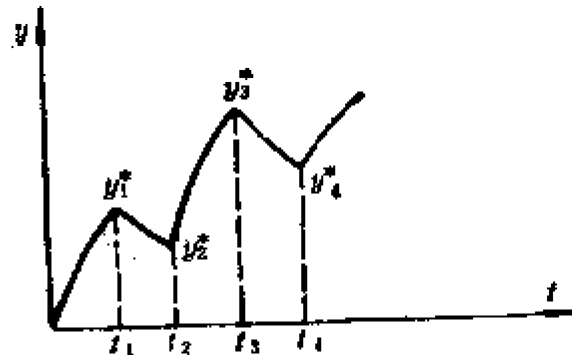



图 5-2-2　$n$阶系统

$$\widetilde{u}_K^*=(m(u_K^*),\ \alpha_K^{(*)},\ \beta_K^{(*)})_{L_K^{(*)},R_K^{(*)}}\qquad K=1,2,\cdots,m。$$

并且记（在没有必要添加标记$*$记时，将不加），

$$m(u_K)=u_K\text{或}m(u_K)=m_K^{(*)},$$

$$u_K^{(t)}=\text{const},\quad t\in[t_j,t_{j-1}],\quad j=1,2,\cdots。$$

并且假定：

$$B(\widetilde{y}_i)\cap B(\widetilde{y}_j)=\phi,\quad i\neq j;\quad B(\widetilde{y}_i^{(\alpha)})\cap B(\widetilde{y}_j^{(\alpha)})=\Phi,\quad i\neq j。$$

将上述关系列成下表

| | $\widetilde{y}_1\cdots\cdots\cdots\widetilde{y}_m$ |
|---|---|
| $t_1$: $\widetilde{y}_1\cdots\cdots\cdots\widetilde{y}_1^{(n-1)}$ | $\widetilde{u}_1\cdots\cdots\cdots *$ |
| ⋮ | ⋮　　⋮ |
| $t_m$: $\widetilde{y}_m\cdots\cdots\cdots\widetilde{y}_m^{(n-1)}$ | ⊛$\cdots\cdots\cdots\widetilde{u}_m$ |

⊛为未定量（灰色量），此表称为Fuzzy控制表。这是计算机的运动依据。

## 三、典型控制过程

**定义** 若认为分段控制区间$\Delta$为常数，即

$$\Delta=\Delta_K=t_K-t_{K-1},\quad K=1,2,\cdots,$$

并记区间$i$的输出（或状态）为$y_i(t)$，$t\in[t_i,t_{i-1}]$。$y_i(t)$的斜率为$\rho_i$，区间的输出量$\Delta y_i$，$\Delta Z_i$为：

$$\Delta y_i=y_i-y_{i-1},\qquad \Delta z_i=-\Delta y_i=y_{i-1}-y_i$$

则各分段间$\rho_i$与$\Delta y_i$，$\Delta z_i$满足某种关系的控制过程，称典型控制过程。下面定义 6 种典型过程。

**定义 5-2-1** 图5-2-3所示过程，若满足

$1^\circ$. $\rho_i\geqslant 0\quad i=1,2,\cdots,$ (5-2-1)

$2^\circ$. $\Delta\tilde{y}_K\underset{\sim}{\vee}\Delta\tilde{y}_{K-1}=\Delta\tilde{y}_{K-1}$ (5-2-2)

$\;\;- \;\;\Delta y_K<\Delta y_{K-1}$

称为典型控制 1 。

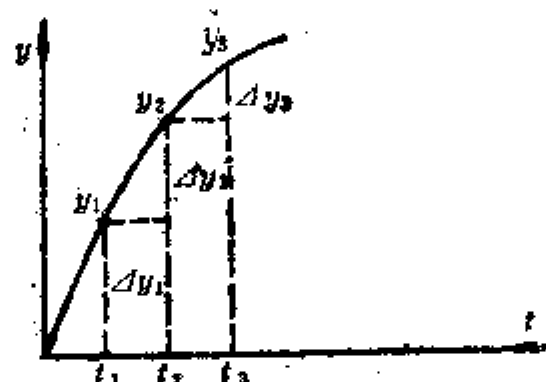



图 5-2-3 典型控制 1

式中：$\tilde{y}_K=(y_K,\alpha_K,\beta_K)_{L_K,R_K}$；

$\tilde{y}_{K-1}=(y_{K-1},\alpha_{K-1},\beta_K)_{L_{K-1},R_{K-1}}$；

$\Delta y_K=y_K-y_{K-1}$；$\Delta y_{K-1}=y_{K-1}-y_{K-2}$；

$\Delta\tilde{y}_K=(y_K-y_{K-1},\ \alpha_{\Delta K},\ \beta_{\Delta K})_{L_{\Delta K},R_{\Delta K}}=(m(\Delta y_K),\alpha_{\Delta K},\beta_{\Delta K})_{L_{\Delta K},R_{\Delta K}}$；

$\Delta\tilde{y}_{K-1}=(y_{K-1}-y_{K-2},\alpha_{\Delta(K-1)},\beta_{\Delta(K-1)})_{L_{\Delta(K-1)},R_{\Delta(K-1)}}$

$\quad=(m(\Delta y_{K-1}),\alpha_{\Delta(K-1)},\beta_{\Delta(K-1)})_{L_{\Delta(K-1)},R_{\Delta(K-1)}}$

**定义 5-2-2** 图5-2-4所示过程，若满足

$1^\circ$. 偶数区段$[\Delta_{2N}]$或$[\Delta_{even}]$，

$[\Delta_{2N}]=[t_{2N},\ t_{2N-1}]\quad N=1,2,\cdots,$

的斜率$\rho_{even}$或$\rho_{2N}$符合 $\rho_{even}=\rho_{2N}\leqslant 0$； (5-2-3)

$2^\circ$. 奇数区段$[\Delta 2_{N-1}]$或$[\Delta_{odd}]$，$N=1,2,\cdots,$

$[\Delta_{2N-1}]=[t_{2N-1},t_{2N-2}]$的斜率$\rho_{odd}$或$\rho_{2N-1}$符合

$\rho_{odd}=\rho_{2N-1}\geqslant 0$ (5-2-4)

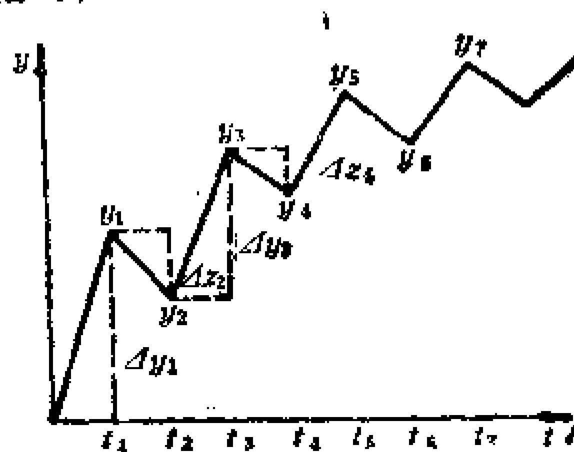



图 5-2-4 典型控制 2

$3^\circ$. 输出差$\Delta\tilde{z}_{2N}$·$\Delta\tilde{y}_{2N-1}$满足：

$$\Delta\tilde{z}_{2N}\underset{\sim}{\vee}\Delta\tilde{y}_{2N-1}=\Delta\tilde{y}_{2N-1},\qquad \Delta z_{2N}\leqslant\Delta y_{2N-1}\qquad (5\text{-}2\text{-}5)$$

$4^\circ$. 输出差$\Delta\tilde{y}_{2N+1}$ · $\Delta\tilde{y}_{2N-1}$满足

$$\Delta\tilde{y}_{2N+1}\underset{\sim}{\vee}\Delta\tilde{y}_{2N-1}=\Delta\tilde{y}_{2N-1}\qquad \Delta\tilde{y}_{2N+1}\leqslant\Delta y_{2N-1}\qquad (5\text{-}2\text{-}6)$$

并且记$\Delta z_{2N}=(\Delta z_{2N},\ \alpha_{2N},\ \beta_{2N})_{L_{2N},R_{2N}}$，其余记号类似定义5-2-1，称为典型控制 2 。

**定义 5-2-3** 图5-2-5所示过程，若满足：

1°. $\rho_{even}=\rho_{2N}\leqslant 0$；

2°. $\rho_{odd}=\rho_{2N-1}\geqslant 0$；

3°. $\Delta\tilde{z}_{2N}\underset{\sim}{\vee}\Delta\tilde{y}_{2N-1}=\Delta\tilde{y}_{2N-1}$，$\Delta z_{2N}<\Delta y_{2N-1}$；

4°. $\Delta\tilde{y}_{2N+1}\underset{\sim}{\vee}\Delta\tilde{y}_{2N-1}=\Delta\tilde{y}_{2N+1}$，$\Delta y_{2N+1}\geqslant\Delta y_{2N-1}$

称为典型控制 3。

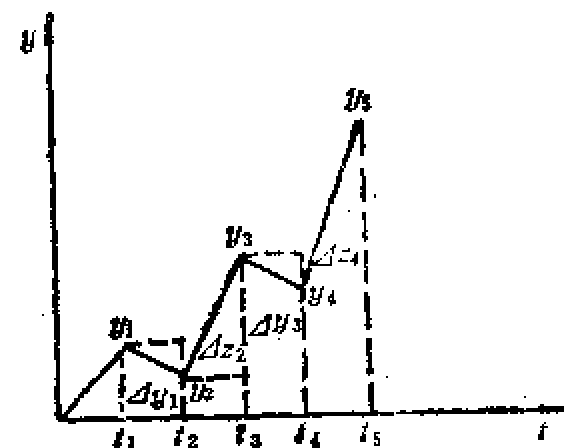


图 5-2-5 典型控制 3

**定义 5-2-4** 图5-2-6所示系统，若满足：

1°. $\rho_K(t)\geqslant 0$，$t\in I_K$，$I_K=[t_p, t_K]$

$P<K$，$P,K\in R^1$；

2°. $\rho_N(t)\leqslant 0$，$t\in I_N$，$I_N=[t_K, t_q]$

$K<q$，$K,q\in R^1$；

3°. 对于区段$I_K$，有$\Delta\tilde{y}_K\underset{\sim}{\vee}\Delta\tilde{y}_{K-1}=\Delta\tilde{y}_{K-1}$，

$\Delta y_K\leqslant\Delta y_{K-1}$；

4°. 对于区段$I_N$，有$\Delta\tilde{z}_{N+1}\underset{\sim}{\vee}\Delta\tilde{z}_N=\Delta\tilde{z}_{N+1}$，

$\Delta z_{N+1}\geqslant\Delta z_N$

称典型控制 4。

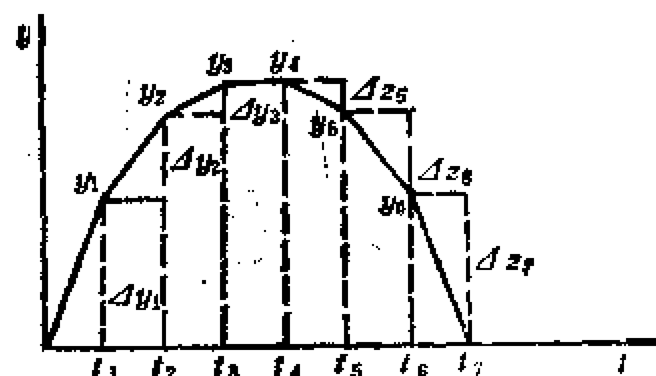


图 5-2-6 典型控制 4

**定义 5-2-5** 图5-2-7所示系统，若满足，

1°. $\rho_i\geqslant 0$　$i=1,2,\cdots$，

2°. $\Delta\tilde{y}_K\underset{\sim}{\vee}\Delta\tilde{y}_{K-1}=\tilde{y}_K$，$\Delta y_K\geqslant\Delta y_{K-1}$

称为典型控制 5。

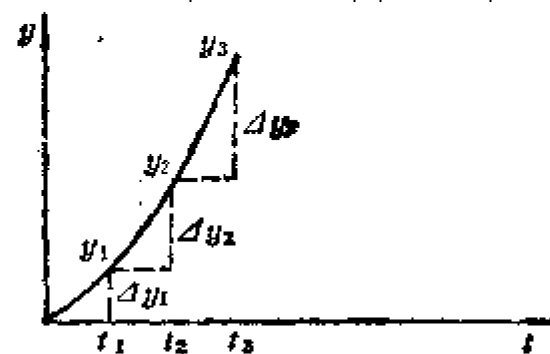


图 5-2-7 典型控制 5

**定义 5-2-6** 图5-2-8所示系统若满足：

1°. $\rho_{odd}=\rho_{2N-1}\geqslant 0$；

2.° $\rho_{even}=\rho_{2N}\leqslant 0$；

3°. $\Delta\tilde{y}_{2N-1}\underset{\sim}{\vee}\Delta\tilde{z}_{2N}=\Delta\tilde{z}_{2N}$

$\Delta y_{2N-1}\leqslant\Delta z_{2N}$；

4°. $\Delta\tilde{z}_{2N}\underset{\sim}{\vee}\Delta\tilde{z}_{2N-2}=\Delta\tilde{z}_{2N}$

$\Delta z_{2N}\geqslant\Delta z_{2N-2}$

称为典型控制 6。

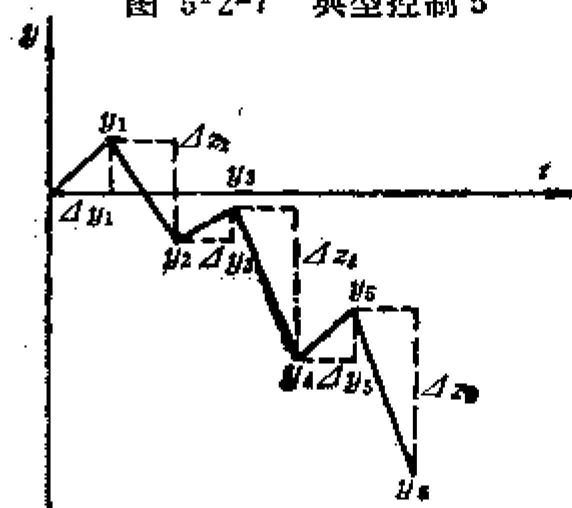


图 5-2-8 典型控制 6

## 四、典型过程稳定性分析

**定义 5-2-7** 作为Fuzzy控制，若状态（输出）与控制的语言变量论域的分划不当，采样间隔过大，以致控制过程偏离了预定的形式，称为不稳定。

下面讨论线性常系数系统的稳定性问题。

1.常系数线性系统的分段控制模型

对于下述常系数线性系统

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n y=u$$

系统第$k+1$段的控制模型为下述差分方程组：

$$\begin{aligned}
y_{k+1}^{(m)}(t-t_k)=&e^{(m)}(t-t_k)u_{k+1}+S^{(m)}(t-t_k)\zeta_1(t_k-t_{k-1})u_k\\
&+S^{(m)}(t-t_k)\zeta_2(t_k-t_{k-1})\zeta_1(t_{k-1}-t_{k-2})u_{k-1}\\
&+S^{(m)}(t-t_k)\zeta_2(t_k-t_{k-1})\zeta_2(t_{k-1}-t_{k-2})\zeta_1(t_{k-2}-t_{k-3})u_{k-2}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+S^{(m)}(t-t_k)\zeta_2(t_k-t_{k-1})\cdots\zeta_2(t_2-t_1)\zeta_1(t_1-t_0)u_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_k(t_k-t_{k-1})=&\zeta_1(t_k-t_{k-1})u_k+\zeta_2(t_k-t_{k-1})\zeta_1(t_{k-1}-t_{k-2})u_{k-1}\\
&+\zeta_2(t_k-t_{k-1})\zeta_2(t_{k-1}-t_{k-2})\zeta_1(t_{k-2}-t_{k-3})u_{k-2}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\zeta_2(t_k-t_{k-1})\zeta_2(t_{k-1}-t_{k-2})\cdots\zeta_2(t_2-t_1)\zeta_1(t_1-t_0)u_1
\end{aligned}$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots n-1,\quad k=1,\ 2,\ 3\cdots$$

$$y_{k+1}^{(0)}=y_{k+1},\quad u_k(t)=\text{const},\quad t\in[t_k-t_{k-1}]$$

若$n$阶系统有$r$个特征根彼此相等，即$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r$，而其余$\lambda_{r+1}$，$\lambda_{r+2}$，…，$\lambda_n$不等，则有

$$e^{(m)}(t-t_k)=e^{(m)}(\delta,\ \lambda_1,\ \lambda_{r+1}\cdots\lambda_n,\ t-t_n)=e^{(m)}(0,\ t-t_k)$$

$$e^{(m)}(t-t_k)=d(e^{(m-1)}(t-t_k))/dt$$

$\delta$为函数$e^{(m)}$中，除$\lambda_i$及$t$以外未予显示的其他常数的有序排列，简称常数列，又有

$$S^{(m)}(t-t_k)=[S_1^{(m)}(t-t_k),\ S_2^{(m)}(t-t_k),\ \cdots S_{n-1}^{(m-1)}(t-t_k)]$$

$$S_i^{(m)}(t-t_k)=S_i^{(m)}(\delta_i,\ \lambda_1,\ \lambda_{v+1}\cdots\lambda_n,\ t-t_k)=S_i^{(m)}(0,\ t-t_k)$$

$$S_i^{(m)}(t-t_k)=d(S_i^{(m-1)}(t-t_k))/dt$$

$\delta_i$为函数$S_i^{(m)}$中常数列，又有

$$\zeta_1^T(t_i-t_{i-1})=[e^{(0)}(t_i-t_{i-1}),\ e^{(1)}(t_i-t_{i-1})\cdots e^{(n-1)}(t_i-t_{i-1})]$$

$$\zeta_2(t_i-t_{i-1})=\begin{bmatrix}S^{(0)}(t_i-t_{i-1})\\ S^{(1)}(t_i-t_{i-1})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ S^{(n-1)}(t_i-t_{i-1})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}S_1^{(0)}(t_i-t_{i-1}) & S_2^{(0)}(t_i-t_{i-1}) & \cdots & S_{n-1}^{(0)}(t_i-t_{i-1})\\ S_1^{(1)}(t_i-t_{i-1}) & S_2^{(1)}(t_i-t_{i-1}) & \cdots & S_{n-1}^{(1)}(t_i-t_{i-1})\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots\\ S_1^{(n-1)}(t_i-t_{i-1}) & S_2^{(n-1)}(t_i-t_{i-1}) & \cdots & S_{n-1}^{(n-1)}(t_i-t_{i-1})\end{bmatrix}$$

$$y_k^T(t_k-t_{k-1})=[y_k(t_k-t_{k-1}),\quad \dot{y}_k(t_k-t_{k-1}),\ \cdots,\ y_k^{(n-1)}(t_k-t_{k-1})]$$

并认为：

$$y_1^T(t_1-t_0)=0$$

2.典型控制过程分析

**定义 5-2-8** 对于论域$U$及$Y$的控制序列$\{\widetilde{u}_k\}$与状态变量序列$\{\widetilde{y}_k\}$为：

$$\{\widetilde{u}_k\}=\{\widetilde{u}_1,\ \widetilde{u}_2\cdots,\widetilde{u}_k\}\to\{u_k\}=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_k\}$$

$$\{\widetilde{y}_k\}=\{\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\cdots,\widetilde{y}_k\}\to\{y_k\}=\{\widetilde{y}_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_k\}$$

其中$k\in N$（自然数集），$u_i$，$y_i$，为$t=t_i$时的变量，则由一定的$N$及一定的闭包$B(\widetilde{y}_i)$，$B(\widetilde{u}_i)$，$i=1, 2, \cdots, k$所代表的$\{\widetilde{y}_i\}$，$\{\widetilde{u}_i\}$或$\{y_k\}$，$\{u_k\}$称为一种分划。

**命题 5-2-1** 对典型控制 1，若具有等采样时间间隔$\Delta_i=t_i-t_{i-1}=\Delta_{i+1}=\Delta$，$i=1, 2, \cdots$，则采样间隔$\Delta$，分划$\{u_k\}$及系统参数必须满足：

1°. $\Phi_{k+1}(e^{(0)}, S^{(0)}, \zeta_2, \zeta_1, \Delta)[\Delta u_{k+1}]<0$

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1}(\bullet)=[&e^{(0)}(\Delta),\ S^{(0)}(\Delta)\zeta_1(\Delta)-e^{(0)}(\Delta),\\ &S^{(0)}(\Delta)\zeta_2(\Delta)\zeta_1(\Delta)-S^{(0)}(\Delta)\zeta_1(\Delta),\ \cdots\cdots\\ &S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{k-1}(\Delta)\zeta_1(\Delta)-S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{k-2}(\Delta)\zeta_1(\Delta)]\end{aligned}$$

$$[\Delta u_{k+1}]=[u_{k+1}-u_k,\ u_k-u_{k-1},\ \cdots,\ u_2-u_1,\ u_1]$$

2°. $\varphi_{k+1}(e^{(1)}, S^{(1)}, \zeta_2, \zeta_1, \Delta)[u_{k+1}]\geqslant 0$

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1}(\bullet)=[&e^{(1)}(\Delta),\ S^{(1)}(\Delta)\zeta_1(\Delta),\ S^{(1)}(\Delta)\zeta_2(\Delta)\zeta_1(\Delta),\ \cdots\\ &S^{(1)}(\Delta)\zeta_2^{(k-1)}(\Delta)\zeta_1(\Delta)]\end{aligned}$$

$$[u_{k+1}]^T=[u_{k+1},\ u_k,\ \cdots,\ u_2,\ u_1]$$

**命题 5-2-2** 在下述分划下典型控制 1 的条件 2 为

1°. 若分划为 $u_i-u_{i-1}=\Delta u$，$i=1, 2, \cdots, k+1$，

则条件为 $S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{(k-1)}(\Delta)\zeta_1(\Delta)u<0$；

2°. 若分划为 $u_{i+1}-u_i=\Delta u \quad i=1, 2, \cdots, k$

则条件为
$$\frac{u_2}{u_1}<\frac{S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{(k-2)}(\Delta)[2I-\zeta_2(\Delta)\zeta_1(\Delta)]}{S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{(k-2)}(\Delta)\zeta_1(\Delta)}；$$

3°. 若分划为 $u_{k+1}-u_k=\Delta u$，$u_i-u_{i-1}=\Delta u$，$i=1, 2, \cdots k$，

则条件为
$$\frac{u_{k+1}-u_k}{\Delta u}<\frac{e^{(0)}(\Delta)-S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{(k-1)}\zeta_1(\Delta)}{e^{(0)}(\Delta)}；$$

4°. 若分划为 $u_{k+1}-u_k=\Delta u$，$u_i-u_{i-1}=0$，$i=2, 3, \cdots k$，

则条件为
$$\frac{u_{k+1}-u_k}{u_1}<\frac{S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{(k-1)}(\Delta)[I-\zeta_2(\Delta)]\zeta_1(\Delta)}{e^{(0)}}$$

**命题 5-2-3** 典型控制 2 的条件是

1°. $\varphi_{2N}(e^{(1)}, S^{(1)}, \zeta_2, \zeta_1, \Delta)[u_{2N}]\leqslant 0$

$$\begin{aligned}\varphi_{2N}(\bullet)=[&e^{(1)}(\Delta),\ S^{(1)}(\Delta)\zeta_1(\Delta),\ S^{(1)}(\Delta)\zeta_2(\Delta)\zeta_1(\Delta)\cdots\\ &S^{(1)}(\Delta)\zeta_2^{2N-2}(\Delta)\zeta_1(\Delta)]\end{aligned}$$

$$[u_{2N}]^T=[u_{2N},\ u_{2N-1},\ \cdots,\ u_1]；$$

2°. $\varphi_{2N-1}(e^{(1)}, S^{(1)}, \zeta_2, \zeta_1, \Delta)[u_{2N-1}]\geqslant 0$

$$\varphi_{2N-1}(\bullet)=[e^{(1)}(\Delta),\ S^{(1)}(\Delta)\zeta_1(\Delta),\ \cdots,\ S^{(1)}(\Delta)\zeta_2^{2N-3}(\Delta)\zeta_1(\Delta)]$$

$$[u_{2N-1}]^T=[u_{2N-1},\ u_{2N-2},\ \cdots,\ u_1]$$

3°. $Q_{2N}(e^{(0)}, S^{(0)}, \zeta_2, \zeta_1, \Delta)[\Delta u_{2N}]>0$

$$\begin{aligned}Q_{2N}(\bullet)=[&e^{(0)}(\Delta)S^{(0)}(\Delta)\zeta_1(\Delta)+e^{(0)}(\Delta)\zeta_2(\Delta)\zeta_1(\Delta)+S^{(0)}(\Delta)\zeta_1(\Delta)\cdots\\ &S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{2N-1}(\Delta)\zeta_1(\Delta)+S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{2N-3}(\Delta)\zeta_1(\Delta)]\end{aligned}$$

4°. $P_{2N+1}(e^{(0)}, S^{(0)}, \zeta_2, \zeta_1, \Delta)[\Delta u_{2N+1}]\leqslant 0$

$$\begin{aligned}P_{2N+1}(\bullet)=[&e^{(0)}(\Delta),\ S^{(0)}(\Delta)\zeta_1(\Delta),\ S^{(0)}(\Delta)\zeta_2(\Delta)\zeta_1(\Delta)-e^{(0)}(\Delta),\\ &S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^2(\Delta)\zeta_1(\Delta)-S^{(0)}(\Delta)\zeta_1(\Delta),\ \cdots,\end{aligned}$$

$$S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{2N-1}(\Delta)-S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{2N-3}(\Delta)\zeta_1(\Delta)]$$

$$[\Delta u_{2N+1}]^T=[u_{2N+1}-u_{2N},\ u_{2N-2N-1},\ \cdots,\ u_2-u_1,\ u_1]$$

其余典型控制的条件，可参考前述命题获得。为了统一称呼，上述各种有关典型控制的命题统称为典型控制条件。

**定理 5-2-1** 典型控制条件中，序列$\{\varphi_i\}$，$\{\Phi_i\}$，$\{Q_i\}$，$\{P_i\}$，收敛到零的充要条件是矩阵范数

$$\|\zeta_2(\Delta)\|<1$$

**证** 按命题5-2-1证序列$\{\Phi_{i+1}\}$。

$$\{\Phi_{i+1}\}=\{e^{(0)}(\Delta),S^{(0)}(\Delta)\zeta_1(\Delta)-e^{(0)}(\Delta),S^{(0)}(\Delta)\zeta_2(\Delta)\zeta_1(\Delta)-S^{(0)}(\Delta)\zeta_1(\Delta)\cdots$$
$$S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{i-2}(\Delta)\zeta_1(\Delta)-\delta^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{i-2}(\Delta)\zeta_1(\Delta)\}$$

$$S_{i-1}=S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{i-1}(\Delta)\zeta_1(\Delta)-S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{i-2}(\Delta)\zeta_1(\Delta)$$
$$=S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{i-2}(\Delta)[\mathrm{I}-\zeta_2(\Delta)]\zeta_1(\Delta)$$

取范数：

$$\|S_{i-1}\|=\|S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{i-2}(\Delta)[\mathrm{I}-\zeta_2(\Delta)]\zeta_1(\Delta)\|$$
$$\leqslant\|S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^{i-2}(\Delta)\|\bullet\|(\mathrm{I}-\zeta_2(\Delta))\zeta_1(\Delta)\|$$
$$\leqslant\|S^{(0)}(\Delta)\|\bullet\|\zeta_2(\Delta\|^{i-2}\bullet\|(\mathrm{II}-\zeta_2(\Delta))\zeta_1(\Delta)\|$$

因为$\|\zeta_2(\Delta)\|<1$，故

$$\lim_{i\to\infty}\|\zeta_2(\Delta)\|^{i-2}\longrightarrow0\Longrightarrow\lim_{i\to\infty}\|S_{i-1}\|\longrightarrow0$$

仿此可证其它序列。

## 五、计 算 示 例

**例 5-2-1** 有下述1阶系统

$$\dot{y}(t)+a_1y(t)=u$$

若已知$a_1=1$，试分析其典型控制1。

**解**：上式的解为

$$y_1(t-t_0)=\frac{u_1}{a_1}(1-e^{-a_1(t-t_0)})+e^{-a_1(t-t_0)}y_1(t_0)$$

从上式知，只要满足$u_i\geqslant a_1y_{i-1}(t_{i-1}-t_{i-2})$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$，则命题5-2-1条件2°必满足

$$e^{(0)}(t-t_i)=\frac{1}{a_1}(1-e^{-a_1(t_1-t_i)})$$

$$S^{(0)}(t-t_i)=e^{-a_1(t-t_i)}$$

$$\zeta_1(t-t_i)=\begin{bmatrix}e^{(0)}(t-t_i)\\ \vdots\end{bmatrix}=e^{(0)}(t-t_i)=\frac{1}{a_1}(1-e^{-a_1(t-t_i)})$$

$$\zeta_2(t-t_i)=\begin{bmatrix}S^{(0)}(t-t_i)\\ \vdots\end{bmatrix}=S^{(0)}(t-t_i)=e^{-a_1(t-t_i)}$$

（1）若$\Delta=t_i-t_{i-1}=0.1$，则$e^{(0)}(\Delta)=0.1,S^{(0)}(\Delta)=0.9,\zeta_1(\Delta)=0.1,\ \zeta_2(\Delta)=0.9$。

$$\Phi_{4+1}(\cdot)=[e^{(0)}(\Delta),\ S^{(0)}(\Delta)\zeta_1(\Delta)-e^{(0)}(\Delta),\ S^{(0)}(\Delta)\zeta_2(\Delta)\zeta_1(\Delta)$$

$-S^{(0)}(\Delta)\zeta_1(\Delta),\ S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^2(\Delta)\zeta_1(\Delta)-S^{(0)}(\Delta)\zeta_2(\Delta)\zeta_1(\Delta),$

$S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^4(\Delta)\zeta_1(\Delta)-S^{(0)}(\Delta)\zeta_2^3(\Delta)\zeta_1(\Delta)]$

$=[0.1,\ 0.9\times0.1-0.1,\ 0.9\times0.9\times0.1-0.9\times0.1,$

$0.9\times0.9\times0.9\times0.1-0.9\times0.9\times0.1,\ (0.9)^4\times0.1$

$-(0.9)^3\times0.1]$

$=[0.1,\ -0.01,\ -0.009,\ -0.0081,\ -0.00729]$

若给定$u_5=11$，$u_4=10$，$u_3=6$，$u_2=4$，$u_1=1$

$$[\Delta u_{4+1}]^T=[11-10,\ 10-6,\ 6-4,\ 4-1,\ 1]=[1,\ 4,\ 2,\ 3,\ 1]$$

$$\Phi_{4+1}(\circ)[\Delta u_{4+1}]=[0.1,\ -0.01,\ -0.009,\ -0.0081,-0.00729]\circ\begin{bmatrix}1\\4\\2\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$=[0.1-0.04-0.018-0.0243-0.00729]$$

$$=0.01041>0$$

则命题5-2-1，条件1°不满足，系统不是稳定的Fuzzy控制。

（2）若$\Delta=t_i-t_{i-1}=0.4$，则$\varepsilon^{(0)}(\Delta)=0.32968$，$S^{(0)}(\Delta)=0.67032$，$\zeta_1(\Delta)=0.32968$，$\zeta_2(\Delta)=0.67032$

$$\Phi_{4+1}(\cdot)=[0.32968,\ -0.1,\ -0.072,\ -0.049,\ -0.0325]$$

给定：$[\Delta u_{4+1}]=[1,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1]$

$\Phi_{4+1}(\cdot)[\Delta u_{4+1}]=0.39032$，条件1°满足。

例 5-2-2　考虑图5-2-9的系统，试按典型控制1分析采样间隔$\Delta$，时间常数$\tau$与电压比$u_2/u_1$的关系。

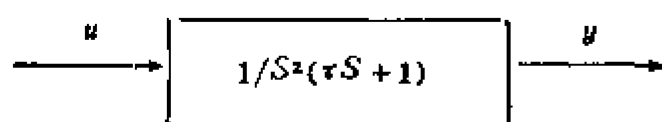



图 5-2-9　系统之一

**解**：系统的响应函数分别为：

$$y_1(t)=\left(\tau^2-\tau t-\frac{1}{2}t^2-\tau^2e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)u_1+[1,t,\tau t-\tau t-\tau^2+\tau^2e^{-\frac{1}{\tau}t}]$$

$$*[y_1(0),\ \dot{y}_1(0),\ddot{y}_1(0)]^T$$

$$\dot{y}_1(t)=(-\tau+t+\tau e^{-\frac{1}{\tau}t})u_1+[0,1,\tau(1-e^{-\frac{1}{\tau}t})]*[y_1(0),\ \dot{y}_1(0),\ \ddot{y}_1(0)]^T$$

$$\ddot{y}_1(t)=(1-e^{-\frac{1}{\tau}t})u_1+[0,0,e^{-\frac{1}{\tau}t}]*[y_1(0),\ \dot{y}_1(0),\ \ddot{y}_1(0)]^T$$

因此有：

$$\varepsilon^{(0)}(\Delta)=\left(\tau^2-\tau\Delta+\frac{1}{2}\Delta^2-\tau^2e^{-\frac{1}{\tau}\Delta}\right)$$

$$\varepsilon^{(1)}(\Delta)=(-\tau+\Delta+\tau e^{-\frac{1}{\tau}\Delta})$$

$$e^{(1)}(\Delta)=(1-e^{-\frac{1}{\tau}\Delta})$$

$$S^{(0)}(\Delta)=[1,\ \Delta,\ \tau\Delta-\tau^2+\tau^2e]$$

$$S^{(1)}(\Delta)=[0,\ 1,\ \tau(1-e^{-\frac{1}{\tau}\Delta})$$

$$S^{(2)}(\Delta)=[0,0,e^{-\frac{1}{\tau}\Delta}]$$

$$\zeta_1(\Delta)=\begin{bmatrix} e^{(0)}(\Delta)\\ e^{(1)}(\Delta)\\ e^{(2)}(\Delta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tau^2-\tau\Delta+\frac{1}{2}\Delta^2-\tau^2e^{-\frac{1}{\tau}\Delta}\\ -\tau-\Delta+\tau e^{-\frac{1}{\tau}\Delta}\\ 1-e^{-\frac{1}{\tau}\Delta}\end{bmatrix}$$

$$\zeta_2(\Delta)=\begin{bmatrix} S^{(0)}(\Delta)\\ S^{(1)}(\Delta)\\ S^{(2)}(\Delta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \Delta & \tau\Delta-\tau^2+\tau^2e^{-\frac{1}{\tau}\Delta}\\ 0 & 1 & \tau(1-e^{-\frac{1}{\tau}\Delta})\\ 0 & 0 & e^{-\frac{1}{\tau}\Delta}\end{bmatrix}$$

按典型控制1的条件知：

$$\dot{y}_2(t-t_1)\geqslant 0$$

$$\dot{y}_2(t-t_1)=e^{(1)}(t-t_1)u_2+S^{(1)}(t-t_1)\zeta_1(t_1-t_0)u_1$$

记 $\Delta_t=(t-t_1),\ \Delta=t_1-t_0$

有 $$\frac{u_2}{u_1}\geqslant\frac{-S^{(1)}(\Delta_t)\zeta_1(\Delta)}{e^{(1)}(\Delta_t)}$$

以$S^{(1)}$，$\zeta_1$，$e^{(1)}$的表达式代入上式，并考虑

$$e^{-\frac{1}{\tau}\Delta_t}=1-\frac{1}{\tau}\Delta_t+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}\right)^2(\Delta_t)^2$$

$$e^{-\frac{1}{\tau}\Delta}=1-\frac{1}{\tau}\Delta$$

得 $$\frac{u_2}{u_1}\geqslant\frac{-\frac{1}{\tau}\Delta\left[\Delta_t-\frac{1}{2\tau}\Delta_t^2\right]}{\frac{1}{2\tau}\Delta_t^2}$$

令$\Delta_t=\Delta$，$u_2/u_1=\theta$，得采样间隔$\Delta$，时间常数$\tau$，电压比$\theta$的关系为

$$\Delta\leqslant\tau(2+\theta)$$

**例 5-2-3** 考虑图5-2-10的系统，若特征根为$\lambda_1$，$\lambda_2$。

$$\lambda_1,\lambda_2=\omega_n(\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-1})$$

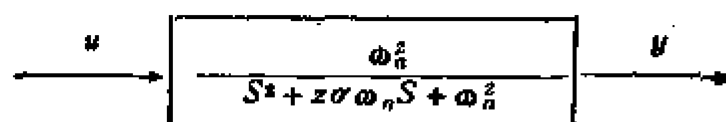



图 5-2-10 系统之二

试按典型控制1分析系统的稳定性条件。

**解**：按条件 $$\dot{y}_2(t-t_1)\geqslant 0$$

$$u^2/u_1\geqslant -S^{(1)}(t-t_1)\zeta_1(t_1-t_0)/e^{(1)}(t-t_1)$$

$$S^{(1)}(t-t_1)=\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_1 e^{\lambda_1(t-t_1)}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2 e^{\lambda_2(t-t_1)}\right.,$$

$$\left.\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1(t-t_1)}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2(t-t_1)}\right]$$

$$\zeta_1(t_1-t_0)=\begin{bmatrix}1-\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1(t-t_0)}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2(t_1-t_0)}\\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2 e^{\lambda_2(t_1-t_0)}-\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_1 e^{\lambda_1(t_1-t_0)}\end{bmatrix}$$

$$e^{(1)}(t_1-t_0)=\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2 e^{\lambda_2(t_1-t_0)}-\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_1 e^{\lambda_1(t_1-t_0)}\right]$$

作适当处理后得：$(1+0.5\theta)(\lambda_2+\lambda_1)\Delta+1+\theta\geqslant 0$
或认为$\lambda_1$，$\lambda_2$为负，有

$$\leqslant 1+\theta/(1+0.5\theta)(|\lambda_2|+|\lambda_1|)$$

若$\theta=1$，$|\lambda_2|+|\lambda_1|=20$，则$\Delta\leqslant 0.07$

## 六、实验结果

对例5-2-2与例5-2-3的系统仿真实验，得结果如图5-2-11，和图5-2-12。

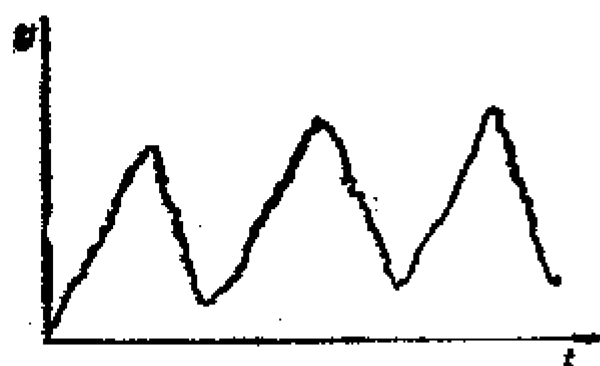


图 5-2-11 系统一的仿真试验结果



图 5-2-12 系统二的仿真试验结果

图5-2-11是例5-2-2在$\Delta=0.1$，$\tau=0.1$，满足典型控制1的实验结果。图5-2-12是例5-2-3在$\Delta=0.1$，$\omega_n=5$，$\sigma<1$不满足典型控制1的实验结果。

## §5-3 模糊控制器的数学模型和算法分析[84]

1983年，宋大鹏针对Fuzzy控制器是近年来出现的新型控制器，优点突出，但算法存在缺陷的情况，以Fuzzy映射为工具给出了Fuzzy控制器的数学模型，提出了Fuzzy控制器的新算法，并证明了新算法优于通常的算法。

Fuzzy逻辑控制器（Fuzzy控制器）是近年来出现的新型控制器。它应用于消除被控对象输出误差的系统中。

Fuzzy控制器的控制规则是根据操作人员的实践经验提出的，它一般是以自然语言表达的一组条件语句。例如，若误差为负大且误差变化为负小，则控制量的变化为正大等等。

设$E$，$EC$分别表示误差和误差变化（即现时误差与前一时刻误差之差），$U$表示控制

作用的变化，Fuzzy控制器的控制规则可表为一组Fuzzy条件语句：

$$\text{If } E=A_i \text{ then if } EC=B_j \text{ then } U=C_{ij},\ i\in I,\ j\in J \tag{5-3-1}$$

这里，$I$、$J$是指标集，$A_i$、$B_j$、$C_{ij}$分别为论域$X$、$Y$和$Z$上的Fuzzy集，它们代表诸如正大、正中、负大之类的一些词。（图5-3-1）式一般用一个$X\times Y$到$Z$的Fuzzy关系$R$来描述：

$$\mu_R(x,y,z)=\bigvee_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\mu_{A_i}(x)\wedge\mu_{B_j}(y)\wedge\mu_{C_{ij}}(z) \tag{5-3-2}$$

若被控对象的输出误差和误差变化分别为Fuzzy集$A$和$B$，则Fuzzy控制器给出的控制作用的变化由Fuzzy推理合成规则算出：$U=(A\times B)\circ R$，即

$$\mu_U(z)=\bigvee_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}\mu_R(x,y,z)\wedge\mu_A(x),\ \mu_B(y) \tag{5-3-3}$$

（5-3-2）和（5-3-3）式就是Fuzzy控制器的算法（称为算法Ⅰ）。

按上述算法进行控制的Fuzzy控制器获得了较好的效果。但应指出，算法Ⅰ是有缺陷的。从理论上说，用（5-3-2）式描述条件语句（5-3-1）及根据（5-3-3）式（即Fuzzy推理规则）计算控制器的输出是人为的，缺乏数学上的根据。此外，若取$E=A_{i_0}$，$EC=B_{j_0}$，$i_0\in I$，$j_0\in J$。按控制规则（5-3-1），控制器输出应为$U=C_{i_0j_0}$，而若按算法Ⅰ，即根据（5-3-3）式，则$U=(A_{i_0}\times B_{j_0})\circ R$。不难看出，一般情况下$(A_{i_0}\times B_{j_0})\circ R\neq C_{i_0j_0}$，这说明了以（5-3-2）和（5-3-3）式作为控制算法不够合理。

在实用上，算法Ⅰ用于控制系统时，要把实际量测的误差和误差变化（都是非模糊的值）变为Fuzzy集。（5-3-3）式计算的结果也是Fuzzy集，必须把它变成一个确切量（这个过程称之为判决），才能用于实际被控对象。为了使判决得以实现，要避免在控制器输出中出现隶属曲线为双峰或隶属度值都很小的那种Fuzzy集，即要求控制器算法应保证其结果是正规的凸Fuzzy，但（5-3-3）式不能保证这一点，这使得Fuzzy控制器在实用中出现困难。

我们将给出Fuzzy控制器的数学模型，提出一个新的算法。分析表明，这个新算法没有上述缺陷，在实用上这个新算法优于算法Ⅰ。

## 一、Fuzzy控制器的数学模型

模糊控制器以Fuzzy集作为其输入和输出。我们将利用Fuzzy映射为工具来建立Fuzzy控制器的数学模型。

1. Fuzzy映射

设论域$X$、$Y$、$Z$为实数集合，$I$、$J$为指标集，把由$X$上的全体Fuzzy集组成的集合称为$X$的Fuzzy集类，记为$\mathscr{F}(X)$。

**定义 5-3-1** 设$\mathscr{A}(X)\subseteq\mathscr{F}(X)$，$\mathscr{B}(Y)\subseteq\mathscr{F}(Y)$，称集合

$$\mathscr{A}(X)\times\mathscr{B}(Y)\triangleq\{A\times B\mid A\in\mathscr{A}(X),\ B\in\mathscr{B}(Y)\}$$

为$\mathscr{A}(X)$与$\mathscr{B}(Y)$的笛卡儿乘积，其中$A\times B$是Fuzzy集$A$与$B$的笛卡儿乘积。即

$$\mu_{A\times B}(x,\ y)=(\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)),\ \forall x\in X,\ \forall y\in Y$$

**定义 5-3-2** 设$\mathscr{A}(X)$，$\mathscr{B}(Y)$，$\mathscr{C}(Z)$为Fuzzy集类，称映射

$$T:\ \mathscr{A}(X)\times\mathscr{B}(Y)\to\mathscr{C}(Z)$$

为$\mathscr{A}(X)\times\mathscr{B}(Y)$到$\mathscr{C}(Z)$的Fuzzy映射。对任意的$A\in\mathscr{A}(X)$，$B\in\mathscr{B}(Y)$，$A\times B$在映射$T$下的象记作$T(A, B)$。

Fuzzy映射可用来描述一组Fuzzy条件语句。事实上，给出一组条件语句（5-3-1）就等于给出一个Fuzzy映射$T$，使得$T(A_i, B_j)=C_{ij}$。下面讨论关于Fuzzy映射的一个问题，即用Fuzzy集的运算来表达一个Fuzzy映射的象和原象之间的关系的问题。这是我们在建立Fuzzy控制器的数学模型时要遇到的。

**定义 5-3-3** 设$\mathscr{A}(X)$为$X$上的Fuzzy集类，若

$$\sup_{\substack{A,\ B\in\mathscr{A}(X)\\ A\neq B,\ x\in X}}\{\mu_A(x)\wedge\mu_B(x)=\lambda<1$$

且$\mathscr{A}(X)$中的Fuzzy集都是正规的，则称$\mathscr{A}(X)$是正规的。记$\lambda=[\mathscr{A}(X)]$，若$\mathscr{A}(X)$中的每个Fuzzy集又是凸的，则称$\mathscr{A}(X)$为正规凸Fuzzy集类。

**定义 5-3-4** 设$\mathscr{A}(X)$为正规凸Fuzzy集类，$\lambda=[\mathscr{A}(X)]$，$\varphi_\lambda$是$\mathscr{A}(X)$上的一个算子，对任意的$A\in\mathscr{A}(X)$，$\varphi_\lambda(A)$是$X$上的一个Fuzzy集，定义为：

$$\mu_{\varphi_\lambda(A)}(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu_A(x)-\lambda}{1-\lambda}, & \text{当}\mu_A(x)\geqslant\lambda\\ 0, & \text{当}\mu_A(x)<\lambda\end{cases}$$

**定理 5-3-1** 设$\mathscr{A}(X)=\{A_i|i\in I, A_i\in\mathscr{F}(X)\}$，$\mathscr{B}(Y)=\{B_j|j\in J, B_j\in\mathscr{F}(Y)\}$都是正规凸Fuzzy集类。对定义在$\mathscr{A}(X)\times\mathscr{B}(Y)$上的任一Fuzzy映射$T$，总有一个$X\times Y$到$Z$的Fuzzy关系$R$使得对任意的$i\in I$，$j\in J$都有

$$T(A_i,B_j)=[\varphi_{\lambda_1}(A_i)\times\varphi_{\lambda_2}(B_j)]\circ R \tag{5-3-4}$$

式中：$\lambda_1=[\mathscr{A}(X)]$，$\lambda_2=[\mathscr{B}(Y)]$。

**证** 构造一个Fuzzy关系$R$，对$\forall x\in X$，$\forall y\in Y$，$\forall z\in Z$，令

$$\mu_R(x,y,z)=\bigwedge_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\{[\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_i)}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_j)}(y)]*\mu_{T(A_i,B_j)}(z)\} \tag{5-3-5}$$

这里$*$是一个算子，它定义为

$$\alpha*\beta=\begin{cases}\beta & \text{若}\alpha>\beta\\ 1 & \text{若}\alpha\leqslant\beta\end{cases}\quad\forall\alpha,\beta\in[0,1] \tag{5-3-6}$$

今后我们称此Fuzzy关系为由Fuzzy映射$T$决定的Fuzzy关系。下面我们来证明该Fuzzy关系满足（5-3-4）。首先令：$X_i^*=\{x|x\in X,\ \mu_{A_i}(x)>\lambda_1\}$，$\forall i\in I$

$$X_*=\{x|x\in X,\ \forall i\in I,\ \mu_{A_i}(x)\leqslant\lambda_1\}$$

显然，$X=x_*\cup(\bigcup_{i\in I}X_i^*)$，类似地，令

$$Y_j^*=\{y|y\in Y,\ \mu_{B_j}(y)>\lambda_2\},\ \forall j\in J$$

$$Y_*=\{y|y\in Y,\ \forall j\in J,\ \mu_{B_j}(y)\leqslant\lambda_2\}$$

任意指定：$i_0\in I$，$j_0\in J$。

不难看出：当$x\in X_*$时，$\mu_{\varphi_{\lambda_2}(A_{i_0})}(x)=0$

所以，$$\bigvee_{\substack{x\in X_*\\ y\in Y}}\mu_R(x,y,z)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{j_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)=0 \tag{5-3-7}$$

同理 $$\bigvee_{\substack{x\in X\\ y\in Y^*}} \mu_R(x,y,z)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)=0 \quad (5\text{-}3\text{-}8)$$

另一方面，当$x\in X_i^*$时，因$\mathscr{A}(X)$是正规的，只要$i_0\neq i$，就有$\mu_{A_{i_0}}(x)\geqslant\lambda_1$。此时，$\mu_{\varphi_{\lambda_2}(A_{i_0})}(x)=0$。

所以，$$\bigvee_{\substack{x\in X_i^*\\ i_0\neq i\\ y\in Y}} \mu_R(x,y,z)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)=0 \quad (5\text{-}3\text{-}9)$$

同理，$$\bigvee_{\substack{x\in X\\ y\in Y_j^*\\ j_0\neq j}} \mu_R(x,y,z)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)=0 \quad (5\text{-}3\text{-}10)$$

由（5-7-7），（5-7-8），（5-7-9），（5-7-10）得知对$\forall z\in Z$，有

$$\bigvee_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} \mu_R(x,y,z)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)$$
$$=\bigvee_{\substack{x\in X_{i_0}^*\\ y\in Y_{j_0}^*}} \mu_R(x,y,z)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y) \quad (5\text{-}3\text{-}11)$$

考察$\mu_R(x,y,z)$在$x\in X_{i_0}^*$且$y\in Y_{j_0}$时之值：

当$x\in X_{i_0}^*$且$y\in Y_{j_0}^*$时，不难看出，只要$i\neq i_0$，$j\neq j_0$就有

$$[\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_i)}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_j)}(y)]*\mu_{T(A_i,B_j)}(z)=0*\mu_{T(A_i,B_j)}(z)=1$$

故由$R$之定义（5-3-5）知，当$x\in X_{i_0}^*$且$y\in Y_{j_0}^*$时，对$\forall z\in Z$，有

$$\mu_R(x,y,z)=[\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)]*\mu_{T(A_{i_0},B_{j_0})}(z) \quad (5\text{-}3\text{-}12)$$

于是，当$x\in X_{i_0}^*$且$y\in Y_{j_0}^*$时，对$\forall z\in Z$，有

$$\mu_R(x,y,z)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)$$
$$=\{[\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)]*\mu_{T(A_{i_0},B_{j_0})}(z)\}\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)$$
$$\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)\leqslant\mu_{T(A_{i_0},B_{j_0})}(z)$$

这时，$\mu_R(\bar{x},\bar{y},z)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(\bar{x})\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(\bar{y})=\mu_{T(A_{i_0},B_{j_0})}(z)$

故由（5-7-11）式可得：

$$\bigvee_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} \mu_R(x,y,z)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)=\mu_{T(A_{i_0},B_{j_0})}(z)$$

这表明（5-3-4）式成立。

**定理 5-3-2** 设$\mathscr{A}(X)=\{A_i|i\in I,\ A_i\in\mathscr{F}(X)\}$，$\mathscr{B}(Y)=\{B_j|j\in J,B_j\in\mathscr{F}(Y)\}$都是正规Fuzzy集类。$T$是定义在$\mathscr{A}(X)\times\mathscr{B}(Y)$上的Fuzzy映射，$R$是由$T$决定的Fuzzy关系。对任意的$x\in X$，$y\in Y$，若有$i_0\in I$，$j_0\in J$使得$\mu_{A_{i_0}}(x)>\lambda_1$且$\mu_{B_{j_0}}(y)>\lambda_2$，则

$$\mu_R(x,y,z)=[\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y)]*\mu_{T(A_{i_0},B_{j_0})}(z)$$

否则，$\mu_R(x,y,z)=1$。这里$\lambda_1=[\mathscr{A}(X)]$，$\lambda_2=[\mathscr{B}(Y)]$。

**证** 由定理5-3-1的证明过程是显然的。

关于Fuzzy映射的其它性质不再进一步讨论。

2.Fuzzy控制器的数学模型

**定义 5-3-5** $C=C(P, F)$称作一个模糊控制器。其中，$P=P(\mathscr{A}(X), \mathscr{B}(Y), \mathscr{C}(Z), T)$称作Fuzzy控制器的控制规则。这里$\mathscr{A}(X)$，$\mathscr{B}(Y)$，$\mathscr{C}(Z)$分别为$X$、$Y$、$Z$上的正规凸Fuzzy集类；$T$是$\mathscr{A}(X)\times\mathscr{B}(Y)$到$\mathscr{C}(Z)$的Fuzzy映射；F称作Fuzzy控制器的控制算法，它是一个Fuzzy映射，对任意的$A\in\mathscr{F}(X)$，$B\in\mathscr{F}(Y)$，

$$F(A,B)=[\varphi_{\lambda_1}(A)\times\varphi_{\lambda_2}(B)]\circ R \tag{5-3-13}$$

其中，$R$是$T$决定的Fuzzy关系，$\lambda_1=[\mathscr{A}(X)]$，$\lambda_2=[\mathscr{B}(Y)]$称$A$，$B$为Fuzzy控制器的输入，$F(A, B)$为对应于$A$，$B$的输出。

一般地，我们可类似地讨论多元Fuzzy映射，进而定义具有多个输入的Fuzzy控制器。

定义5-3-5表明，只要确定了一个控制规则就确定了一个Fuzzy控制器。控制规则可以用多种方式表达，比如说用Fuzzy条件语句(5-3-1)式或用Fuzzy控制状态表等。定义5-3-5中要求控制规则中的Fuzzy集类都是正规凸Fuzzy集类，这在实用上并不增加什么限制，因为实用上我们在构造这些Fuzzy集时，正是这么做的。

## 二、Fuzzy控制器的算法分析

为了表明我们给出的Fuzzy控制器的数学模型是合理的，现在讨论它的性质。

**定理 5-3-3** 设$C=C(P, F)$为Fuzzy控制器，$P=P(\mathscr{A}(X), \mathscr{B}(Y), \mathscr{C}(Z), T)$是其控制规则，则对$\forall A\in\mathscr{F}(X)$，$\forall B\in\mathscr{F}(Y)$，有$F(A, B)=T(A, B)$。

证明可由定义5-3-5和定理5-3-1直接给出。该定理表明：我们的Fuzzy控制器没有通常Fuzzy控制中控制规则与算法之间的矛盾，规则与算法之间是协调的。

**定义 5-3-6** 设$x_0\in X$，称$X$上的Fuzzy集$A_0$为对$x_0$的观测，若

$$\mu_{A_0}(x)=\begin{cases}1 & \text{当} x=x_0\\ 0 & \text{当} x\neq x_0\end{cases}$$

**定理 5-3-4** Fuzzy控制器$C=C(P,F)$对应于$X$上的任何观测$A_0$和$Y$上的任何观测$B_0$的输出$F(A_0, B_0)$，都是正规凸Fuzzy集。

**证** 设$P=P(\mathscr{A}(X), \mathscr{B}(Y), \mathscr{C}(Z), T)$，$R$是由$T$决定的Fuzzy关系，任给$x_0\in X$，$y_0\in Y$，对它们的观测分别为$A_0$、$B_0$，据定义5-3-5，有

$$\begin{aligned}\mu_{F(A_0,B_0)}(z)&=\bigvee_{\substack{x\in X\\ y\in Y}}\mu_R(x,y,z)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_0)}(x)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_0)}(y)\\ &=\mu_R(x_0,y_0,z)\end{aligned} \tag{5-3-14}$$

分两种情况讨论：

1°. 若有$A_{i_0}\in\mathscr{A}(X)$，$B_{j_0}\in\mathscr{B}(Y)$使$\mu_{A_{i_0}}(x_0)>\lambda_1$，且$\mu_{B_{j_0}}(y_0)>\lambda_2$，此时，由定理5-7-2得

$$\mu_R(x_0,y_0,z)=[\mu_{\varphi_{\lambda_1}(A_{i_0})}(x_0)\wedge\mu_{\varphi_{\lambda_2}(B_{j_0})}(y_0)]\cdot\mu_{T(A_{i_0},B_{j_0})}(z) \tag{5-3-15}$$

由于$T(A_{i_0}, B_{j_0})\in C(Z)$是正规Fuzzy，故总有$z_0\in Z$使得$\mu_{T(A_{i_0},B_{j_0})}(z_0)=1$，这时由（5-3-14）及（5-3-15）

$$\mu_{F(A_0B_0)}(z_0)=\mu_R(x_0,\ y_0,\ z_0)=1 \tag{5-3-16}$$

这说明$F(A_0,\ B_0)$是正规Fuzzy集，再证它是凸Fuzzy集，为此只须证明对任何$z_1\leqslant z_2\leqslant z_3$，有

$$\mu_{F(A_0,\ B_0)}(z_2)\geqslant\mu_{F(A_0,\ B_0)}(z_1)\wedge\mu_{F(A_0,\ B_0)}(z_3) \tag{5-3-17}$$

利用（5-3-14）及（5-3-15）式可证（5-3-17）式成立。

2°.若对任何$A_i\in\mathscr{A}(X)$都有$\mu_{A_i}(x_0)\leqslant\lambda_1$，或者对任何$B_j\in\mathscr{B}(Y)$都有$\mu_{B_j}(y_0)\leqslant\lambda_2$，则由定理5-7-2知，此时，对$\forall z\in Z$都有$\mu_R(x_0,\ y_0,\ z)=1$，即$\mu_{F(A_0,\ B_0)}(z)=1$，显然这时$F(A_0,\ B_0)$是正规凸模糊集。

前面已指出：通常的Fuzzy控制器不能保证对任何观测输入得到的输出都是正规凸Fuzzy集。而我们所定义的Fuzzy控制器却可保证。这使得它在实用中不会以隶属函数具有双峰或隶属度值都很小的那种Fuzzy集做为Fuzzy控制器的输出。上述两定理表明我们给出的Fuzzy控制器的数学模型是合理可行的。

定义5-3-5中给出了Fuzzy控制器的新算法（算法Ⅱ）。在同样的控制规则下，算法Ⅰ和算法Ⅱ对相同的输入将导致不同的输出，那末，哪种算法的实际控制效果好呢？在实际控制系统中必须把Fuzzy控制器的输出，经过判决后才能用于被控对象。因此，控制算法产生的结果的优劣与判决方法有关。从理论上说，判决的结果取决于Fuzzy控制器输出的Fuzzy集的隶属度分布情况，特别是隶属度取最大值的元素有关。因此，下面的定理表明算法Ⅱ优于算法Ⅰ。

**定理 5-3-5** 设$U_1$,$U_2$分别为Fuzzy控制器按算法Ⅰ和Ⅱ得出的对应于任意给定的观测$A_0$，$B_0$的输出。若有$z_0\in Z$使得$\forall z\in Z$，$\mu_{U_1}(z_0)\geqslant\mu_{U_1}(z)$，则必有$\mu_{U_2}(z_0)=1$，亦即$\mu_{U_2}(z_0)\geqslant\mu_{U_2}(z)$。

## §5-4 带有不确定参数控制系统的模糊控制器设计[86]

在控制对象的运动方程中，对于含非随机不确定性参数的控制问题，过去一般采用极大值原理或微分动态规划原理来解决。1983年，汪朝群采用模糊控制器的方法解这类问题，从计算实例结果可看出，该方法所得到的控制规律具有简单和利于数字化的优点。

### 一、问题的基本形式和模糊控制规律

典型的带有不确定参数的线性二次型最优控制问题中，其离散化的状态方程式形式为

$$x_i=F_i(q)x_{i-1}+G_i(q)u_{i-1},\ i=1,\ 2,\ \cdots \tag{5-4-1}$$

性能指标为：

$$J=\int_{t_0}^{\infty}L(x,\ u)dt,\ L(x,\ u)\geqslant0 \tag{5-4-2}$$

令：
$$J_i=\int_{t_{i-1}}^{t_i}L(x(t),u(t))dt,\mathscr{G}_k=\sum_{i=1}^{k}J_i,\ k=1,2,\cdots \tag{5-4-3}$$

如果$J^*=\min\limits_{u}\int_{t_0}^{\infty}L(x,u)dt$，则$\lim\limits_{k\to\infty}\mathscr{G}_k=\sum_{i=1}^{\infty}J_i\geqslant J^*$。以后设$\lim\limits_{k\to\infty}\mathscr{G}_k=\mathscr{G}$有限，因$L(x,u)\geqslant$

0，故$J_i \geqslant 0$，$\mathscr{G}_{k+1} \geqslant \mathscr{G}_k$，$k=1, 2, \cdots$。取$\lim_{k\to\infty} J_k = 0$，以期构成收敛序列$\mathscr{G}_k$。在具体计算时，可根据$J$的论域及要求的收敛速度确定$J_k$的递减步长。通常$t_f<\infty$，在采样间隔$t$内控制为常值。若已知$x_{i-1}$，$u_{i-1}$和$J_i$，则$u_i$的值可由下面算法语句给出：

$$\left.\begin{array}{l} \text{if } J_{i+1}>J_i \text{ then } u_i=u_{i-1}+\Delta u \text{ or } u_i=u_{i-1}-\Delta u \\ \text{or if } J_{i+1}<J_i \text{ then } u_i=u_{i-1} \\ \text{or if } J_{i+1}=J_i \text{ then } u_i=u_{i-1} \text{ or } u_i=u_{i-1}+\Delta u, \text{ or } u_i=u_{i-1}-\Delta u \end{array}\right\} \quad (5\text{-}4\text{-}4)$$

把$u_i$，$\Delta J_i=J_{i+1}-J_i$，$\Delta u$加以模糊化，给出其对应的隶属函数，由（5-4-4）式确定出模糊控制规律如表5-4-1所示。

模糊控制规律表中：PB——正大；PLB——正较大；PM——正中；PLM——正偏中；PLS——正较小；PS——正小；NB——负大；NLB——负较大；NLM——负偏中；NM——负中；NLS——负较小；NS——负小。

$\Delta u$的正负号选择应使$J_i \to 0$及$\Delta J_i<0$。

$u_i$，$\Delta J_i$，$\Delta u$的模糊化根据具体对象确定。对应表5-4-1的模糊条件语句是：

if $u_{i-1}$=PB and $\Delta J_i$=PB or PLB then $u_i$=PB or PLM or
if $u_{i-1}$=PB and $\Delta J_i$=PLM then $u_i$=PM or PLB or
if $u_{i-1}$=PB and $\Delta J_i$=PM or PS or PLS then $u_i$=PB or PLB or
if $u_{i-1}$=PB and $\Delta J_i$=0 then $u_i$=PB,or PLB or
……。

## 二、应 用 实 例

考虑飞机水平盘旋飞行中倾斜运动的控制问题，其运动方程为：

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{\tau}+q, \quad \dot{q} = -\omega_0^2(\alpha-Q\delta), \quad \dot{\theta}=q \qquad (5\text{-}4\text{-}5)$$

作变换：$t'=\omega_\alpha t$，$q'=q/\omega_\alpha$，$\omega_\alpha=\left(-\frac{M_{\alpha 1}}{I}\cdot\frac{\rho v^2}{\rho_1 v_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

则（5-4-5）式变为：

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{\omega_\alpha \tau}\alpha+q'; \quad \frac{dq'}{dt'} = -\left(\frac{\omega_0}{\omega_\alpha}\right)^2(\alpha-Q\delta); \quad \frac{d\theta}{dt'}=q'$$

其中，不确定参数的变化范围：

$$0.06 \leqslant \frac{1}{\omega_\alpha \tau} \leqslant 0.20; \quad 0.8 \leqslant \left(\frac{\omega_0}{\omega_\alpha}\right)^2 \leqslant 1.20; \quad 0.4 \leqslant \left(\frac{\omega_0}{\omega_\alpha}\right)^2 Q \leqslant 0.6$$

性能指标：

$$J=\int_0^\infty \left[\frac{(\theta-\alpha)}{r_0^2}+\frac{\delta}{\delta_0^2}\right]dt, \quad r_0=1^\circ, \quad \delta_0=10^\circ$$

δ的论域取[−10°，10°]，其隶属函数如图5-4-1所示。$\Delta J_i$的隶属函数如图5-4-2所示。

根据模糊控制值表5-4-1计算出本实例的控制值（控制值用中位数定值）。其相应的模糊控制规律及性能值的变化曲线分别为图5-4-3如图5-4-4。所得的结果优于典型参数法计算的最优控制规律和保证代价控制规律。

附：计算初值，$\alpha=0^\circ$，$q'=0^{\circ}/s$，$\theta'=1^\circ$，$\Delta t=0.5''$

模糊控制规律表　　表 5-4-1

| $u_i$ \ $u_{i-1}$ | $\Delta J_i$ | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | PB | PLB | PLM | PM | PLS | PS | O | NS | NLS | NM | NLM | NLB | NB |
| PB | PB or PLM | PB or PLM | PB or PLB | PB or PLB | PB or PLB | PB or PLB | PB or PLB | PB | PB | PB or PLB | PB or PLB | PB or PLB | PB or PLB |
| PLB | PB or PLM | PB or PLM | PB or PLM | PB or PLM | PB or PLM | PB or PLM | PLB or PB or PLM | PLB or PLM | PLB or PLM | PLB or PLM | PLB or PLM | PB or PLM | PB or PLM |
| PLM | PLB or PM | PLB or PM | PLB or PM | PLB or PM | PLB or PM | PLB or PM | PLM or PLB or PM | PLM or PM | PLM or PM | PLM or PM | PLM or PM | PLB or PM | PLB or PM |
| PM | PML or PLS | PLM or PLS | PLM or PLS | PLM or PLS | PLM or PLS | PM or PLM or PLS | PM or PLS | PM or PLS | PM or PLS | PM or PLS | PM or PLS | PLM or PLS | PLM or PLS |
| PLS | PM or PS | PM or PS | PM or PS | PM or PS | PM or PS | PM or PS | PLS or PS or PM | PLS | PLS | PLS or PS | PLS or PS | PM or PS | PM or PS |
| PS | PLS or O | PLS or O | PLS or O | PLS or O | PLS or O | PLS or O | PS or PLS or O | PS | PS | PS or O | PS or O | PLS or O | PLS or O |
| O | PS or NS | PS or NS | PS or NS | PS or NS | PS or NS | PS or NS | O or PS or NS | O | O | PS or NS | PS or NS | PS or NS | PS or NS |
| NS | O or NLS | O or NLS | O or NLS | O or NLS | O or NLS | O or NLS | O or NS or NLS | NS | NS | O or NS | O or NS | O or NLS | O or NLS |
| NLS | NS or NM | NS or NM | NS or NM | NS or NM | NS or NM | NS or NM | NS or O or NM | NLS | NLS | NS or NLS | NS or NLS | NS or NM | NS or NM |
| NM | NLM or NLS | NLS or NLM | NLS or NLM | NLS or NLM | NLS or NLM | NLS or NLM | NM or NLM or NLS | NM or NLS | NM or NLS | NM or NLS | NM or NLS | NLM or NLS | NLM or NLS |
| NLM | NM or NLB | NM or NLB | NM or NLB | NLB or NM | NLB or NM | NLB or NM | NLM or NLB or NB | NLM or NM | NLM or NM | NLM or NM | NLM or NM | NLM or NM | NLM or NM |

续表

| $u_i$ \ $u_{i-1}$ | $\Delta J_i$ | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | PB | PLB | PLM | PM | PLS | PS | O | NS | NLS | NM | NLM | NLB | NB |
| NLB | NLB or NB | NLB or NB | NLB or NB | NLM or NB | NLM or NB | NLB or NM or NB | NLB or NLM | NLB or NLM | NLM or NLB | NLM or NLB | NLM or NLB | NLM or NLB | NLM or NLB |
| NB | NB or NLM | NB or NLM | NLB or NLB | NB or NLB | NB or NLB | NB or NLB | NB or NLB | NB | NLB | NLB | NLB | NB or NLB | NB or NLB |

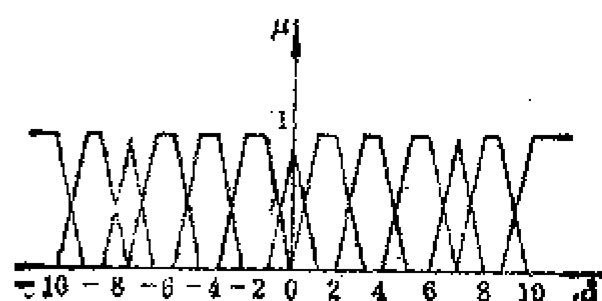



图 5-4-1　δ的隶属函数图

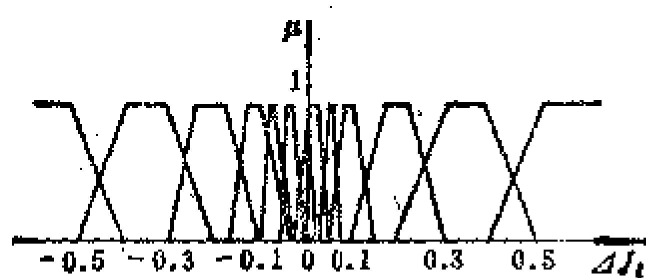



图 5-4-2　$\Delta J_i$的隶属函数图

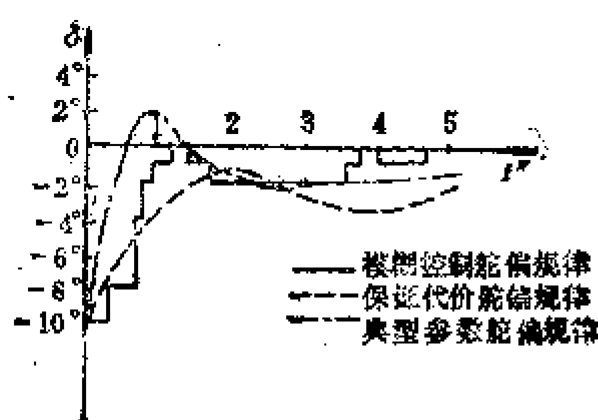



图 5-4-3　控制值δ变化曲线比较图

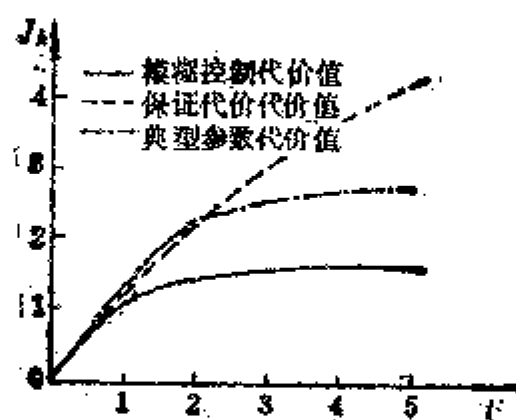



图 5-4-4　性能值比较图

典型参数法的控制规律：

$$\delta = C_1^0\alpha + C_2^0 q' + C_3^0\theta', \quad C_1^0 = 9.178, \quad C_2^0 = 1.824, \quad C_3^0 = -10,$$

保证代价法的控制规律：

$$\delta = C_1'\alpha + C_2' q + C_3'\theta', \quad C_1' = 4.09, \quad C_2' = -6.59, \quad C_3' = -12.5。$$

## §5-5　用微机实现自组织模糊控制的试验研究[89]

1983年，邵世煌、丁纪凯等提出用自组织模糊控制器获得控制表，然后用微型计算机实现模糊控制。在对加热器进行控制的试验中，得出一系列模糊控制的试验结果，证明此方案是可行的，效果是良好的。

模糊控制不仅对数学模型确定的对象适用，而且对控制不易获得精确数学模型和数学模型不确定或经常变化的一类对象也适用，并且取得良好的结果。國内外许多学者对简单

模糊控制和自组织模糊控制进行过模拟试验研究，实现了对具体对象的计算机模糊控制。这里着重介绍用微型计算机进行自组织模糊控制的方法和试验研究结果。

模糊控制结构如图5-5-1实线部分所示。模糊控制规则用模糊语言形式表达，它是人们对控制对象的认识和操作经验的总结。GE、GC和GU分别是偏差、偏差变化和控制量的比例系数。在实现时，对一类对象的模糊控制规则可以用模糊关系矩阵$\underset{\sim}{R}$表达：

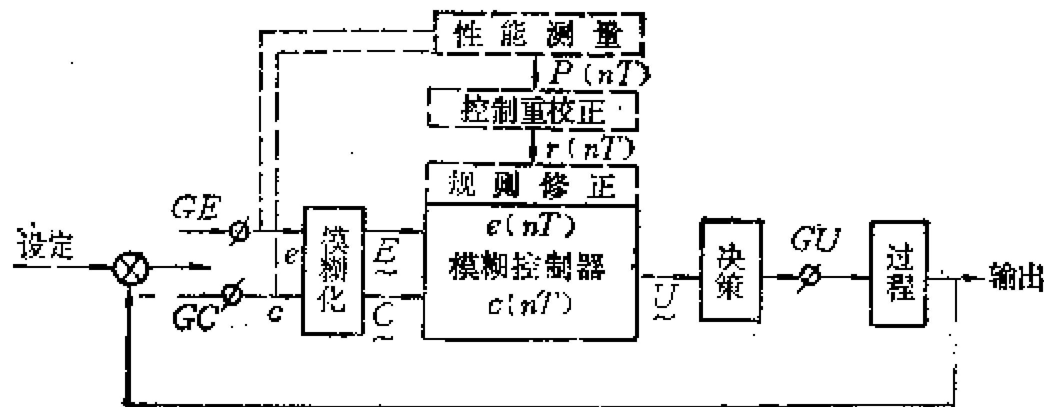



图 5-5-1 模糊控制器

偏差$e$和偏差变化$c$经模糊化转化为偏差和偏差变化模糊集$\underset{\sim}{E}$和$\underset{\sim}{C}$，$\underset{\sim}{E}$和$\underset{\sim}{C}$与$\underset{\sim}{R}$合成后得到控制量模糊集$\underset{\sim}{U}$，$\underset{\sim}{U}$经决策得到确定的控制量变化值$u$。$\underset{\sim}{E}$、$\underset{\sim}{C}$、$U$和$u$可由离线处理得到，它们与论域中的偏差和偏差变化的不同组合对应，由此得到控制表，可实现在线控制。

## 一、模 糊 控 制 表

我们试用自组织模糊控制方法得到新的控制表。为此，图5-5-1中增加了虚线部分所示的三个环节。自组织模糊控制器在每次采样时，计算偏差和偏差变化，再通过性能测量环节求出输出特性的校正量$p(nT)$，通过控制量校正环节求出控制量$r(nT)$，进而修改模糊控制规则。可以有两种方法获得控制表。

1.通过自组织模糊控制修改模糊关系矩阵

设系统的输出有一定的滞后，即$(nT-mT)$时刻的控制对$nT$时刻系统的性能有影响。每一采样周期后，关系矩阵修改为

$$R(nT+T)=\{R(nT)\wedge\overline{R'(nT)}\}\vee R''(nT) \qquad (5\text{-}5\text{-}1)$$

式中：$R(nT)$为$nT$采样周期时的关系矩阵。

$$R'(nT)=\mathrm{E}(nT-mT)\times C(nT-mT)\times \mathrm{U}(nT-mT) \qquad (5\text{-}5\text{-}2)$$

$$R''(nT)=\mathrm{E}(nT-mT)\times C(nT-mT)\times \mathrm{V}(nT-mT) \qquad (5\text{-}5\text{-}3)$$

$\mathrm{E}(nT-mT)$，$C(nT-mT)$，$\mathrm{U}(nT-mT)$和$\mathrm{V}(nT-mT)$分别是偏差、偏差变化、控制量和考虑了控制量校正$r(nT)$作用后的控制量模糊集。

由于不断对输出性能进行测量和对控制规则进行修改，输出特性也就不断改善，图5-5-2是对三阶对象处理后得到的阶跃响应。它们分别是第一、二、八轮（Run）重复试验的特性。

由偏差和偏差变化模糊集合成的模糊关系矩阵，可在每次采样后按（5-5-1)式修改，

也可在每次采样后用（5-5-1）式修改关系矩阵，并进行记录，在一轮后修改合成关系矩阵，最后由性能比较好的关系矩阵得到控制表。

2.通过自组织模糊控制修改控制表

因为初始模糊控制的偏差、偏差变化、控制量模糊集是单峰的，且相关系数$\beta<1$，因此，初始关系矩阵$R_0$的每一行最多只有一个元素为1，称这种状态为初始状态，反之则称为变换状态。对控制表$\Pi_{nT}$进行直接修改的规则如下：

在初始状态中，（1）若相邻采样周期测到的偏差或偏差变化不相等，则将控制表$\Pi_{nT}$中的由$e(nT-mT)$和$c(nT-mT)$对应的控制量修正为$v(nT-mT)=u(nT-mT)+r(nT)$。$e(nT-mT)$、$c(nT-mT)$、和$v(nT-mT)$是确定量；（2）若相邻采样周期的偏差和偏差变化都相等，则将控制表$\Pi_{nT}$中的控制量修正为：

$$\left\langle \frac{\Pi_{nT}[e(nT-mT),\ c(nT-mT)+v(nT-mT)}{2} \right\rangle$$

$\langle\cdot\rangle$与·同号，且$|\langle\cdot\rangle|=|INT(-1.1+0.5)|$。在变换状态中，可按（2）法对控制表$\Pi_{nT}$进行修改，经不断修改，可得到性能较好的控制表。图5-5-3是用这种方法对$K/s'(s+2)$等一类对象离线处理的结果。

与上述方法相同，控制表可在每次采样时修改和使用，或每次采样时修改并记录，在一轮后使用，这样得到的控制表可降低对过程控制计算机容量和速度的要求。因此，可用微型计算机（甚至单板微型机）实现，且能获得较好的模糊控制性能。

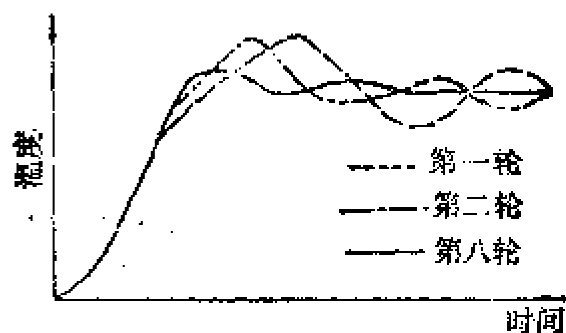



图 5-5-2　修改控制规律得到的阶跃响应

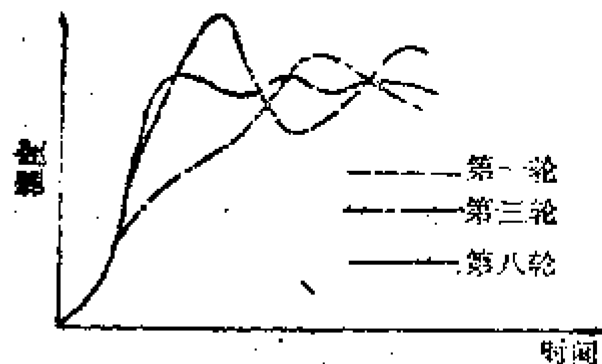



图 5-5-3　修改控制表得到的阶跃响应

## 二、试　验　研　究

试验采用DJS-051B微型计算机，内存需用量为2K多，控制对象是加热器，对象参数可变，并可加入某些干扰，被控参数是温度，用一般热电阻测温元件测出，执行装置是TGDGK可控硅调功器。系统如图5-5-4所示。系统具有通用性，只要改变变送器和执行机构，可对不同参数进行控制。

1.用不同控制表进行试验

图5-5-5中曲线1是根据认识或经验在确定模糊控制规则求出相应的控制表，然后经试验得到的阶跃响应曲线。由图可见，用修正后的控制表所得到的阶跃响应特性2、3比1的好。

2.模糊控制器各比例系数和采样周期对特性的影响

在模糊控制中，不同的比例系数$GE$、$GC$、$GU$和不同的采样周期对特性有一定影响。由图5-5-6可见，当$GE$增加时，上升速度加快，且有一定超调量（如曲线2、3），

稳态误差减小。稳态误差减小的原因是偏差趋于零的论域分度所对应的实际偏差减小了。$GE$过大超调量也随之增大，特性难以收敛。图5-5-7是比例系数$GC$对特性的影响，试验表明：$GC$的大小不仅影响特性曲线的上升段，而且对过渡过程时间亦有影响。

图5-5-8是比例系数$GU$对特性的影响，试验表明：$GU$增加，特性的上升时间略减少，但易产生振荡。图5-5-9是不同采样周期对特性的影响，采样周期$\Delta T$小，系统特性上升，超调量增加；采样周期大有时有利于降低稳态误差。

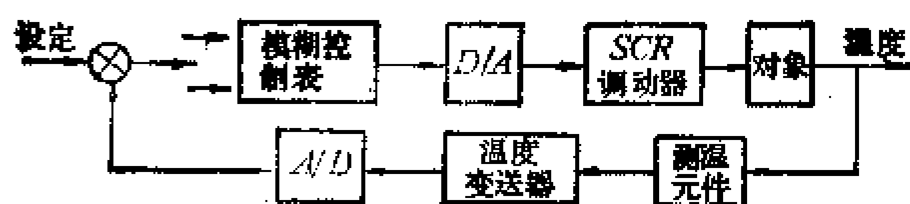



图 5-5-4 模糊控制试验系统结构图

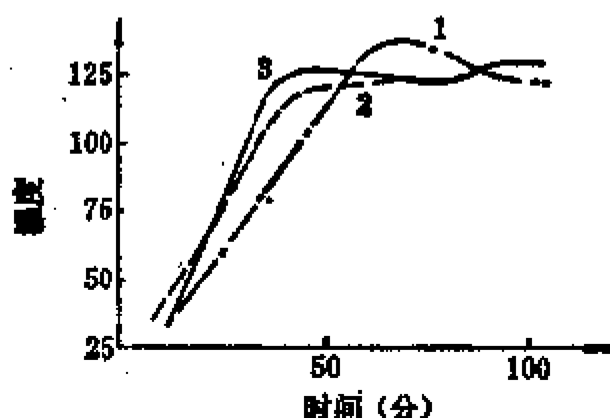



图 5-5-5 不同控制表的阶跃响应

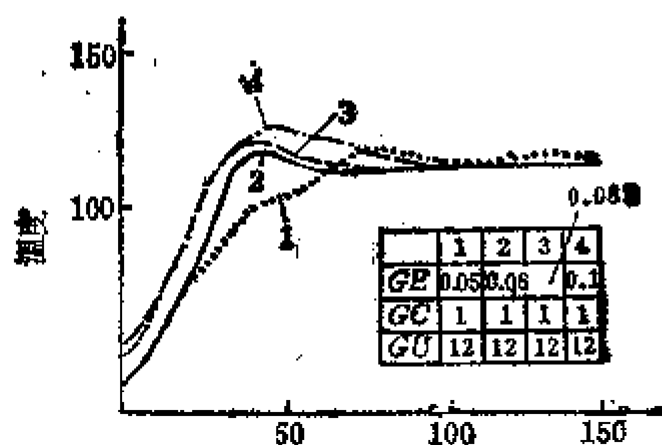



图 5-5-6 比例系数$GE$对阶跃响应的影响

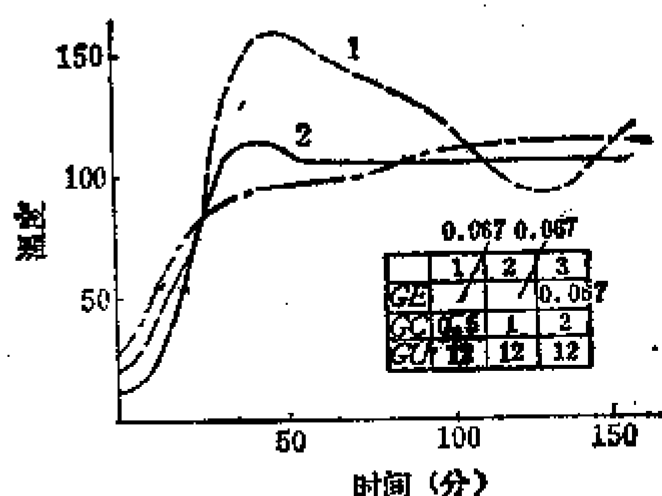



图 5-5-7 比例系数$GC$对阶跃特性的影响

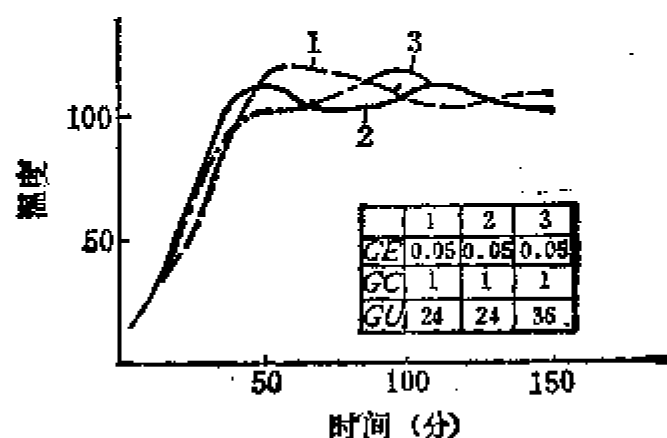



图 5-5-8 比例系数$GU$对阶跃特性的影响

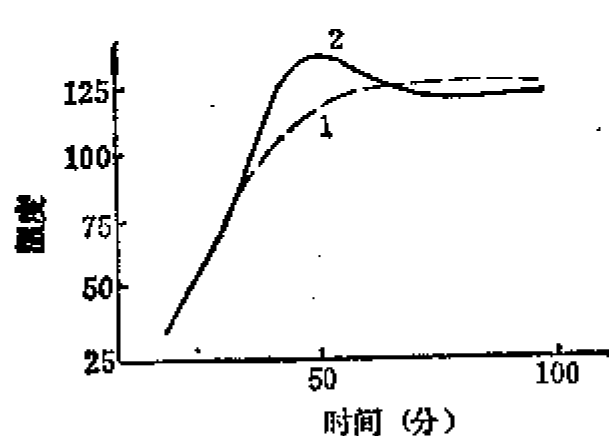



图 5-5-9 不同采样周期的特性

1—$\Delta T$ = 5 分；2—$\Delta T$ = 2 分

3.与$PID$控制相比较

对数学模型确定的工业对象，用$PID$控制能得到较好的结果，对加热器分别用$PID$控制和模糊控制，其结果如图5-5-10所示。此时，加热器的传递函数为0.0675/(565＋1)×(17.45＋1)。图中，用$PID$控制的特性曲线是用不同的$PID$参数进行试验后选取的一条较好的特性曲线。可见，对于确定的工业对象，用模糊控制与用$PID$控制效果相当。

4.对象时间常数增加时的试验结果

在上述试验基础上，改变对象的时间常数，其结果如图5-5-11所示。

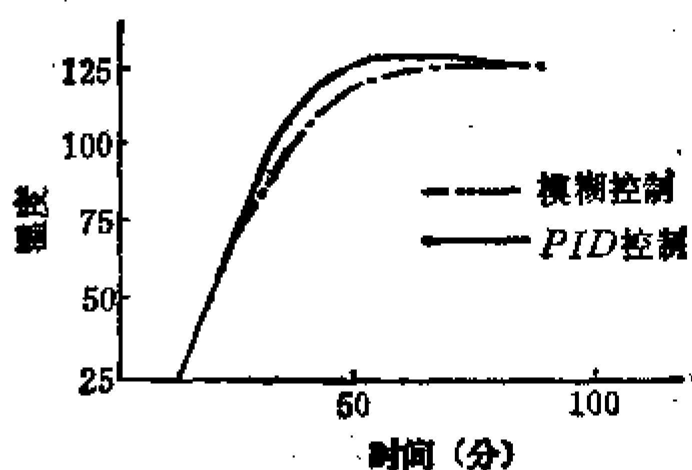



图 5-5-10 *PID*控制与模糊控制的比较

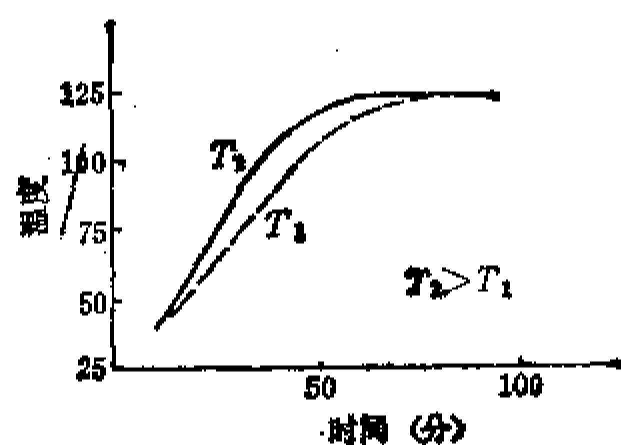



图 5-5-11 对象时间常数增加时特性

5.干扰对系统的影响

系统在运行过程中，当外加干扰较小，且时间较短（15秒）时，特性变化较小，最大温降为6℃；当干扰较大，且时间较长（30秒）时，系统偏离稳定运行值（最大温降为9℃）后，系统能恢复到稳定性运行。

## 三、结　论

（1）在不知道被控对象的精确数学模型时，用计算机进行模糊控制能对被控对象实现很好的控制，且系统有一定鲁棒性。当对象数学模型经常变化时，用常规调节方法不能很好控制可考虑用模糊控制。

（2）通过控制表实现计算机模糊控制，可以降低对计算机内存容量和速度的要求。控制表可由人们对控制对象的认识和操作经验确定的模糊控制规则离线处理得到，对于人们尚未认识和尚未获得操作经验的生产过程，可用自组织模糊控制方法经离线处理得到。

（3）提出的微型计算机模糊控制具有简单、可靠、易于维护的特点，便于在一般工厂中推广。8位单板微型机或设计数字脉冲电路实现多点控制，可降低成本。

（4）微型计算机模糊控制程序具有一定通用性、可扩性、可维性，只要改变控制算法就可实现模糊控制或*PID*控制。本系统可形成自组织模糊控制，使系统在过程控制中具有自学习，自适应和自组织的能力。

## §5-6　自寻优模糊PID调节器与人工智能[90]

1985年，涂象初、汪培庄通过将Fuzzy控制与常规*PID*控节器相结合，并配备以自寻优技术的方法，为人工智能控制开辟了一条新途径。

人工智能控制是当前自动控制领域的前沿课题。

Fuzzy语言是表述人类思维活动的极有效手段，各种类型的Fuzzy控制器因此应运而生。概言之，迄今为止的Fuzzy控制器不外乎两类：非线性比例控制或非线性*PD*控制，付诸实践而初见成效的几种Fuzzy控制器均属后一类。龙升照和汪培庄的论文发展了这类控制：使非线比例作用同非线性微分作用之间建立了某种有效的联系，从而使之在形式上也类似常规的*PD*控制。它既具备一定的*PD*作用，又具备Fuzzy控制所特有的简便

有效的非线性控制作用(或曰，加权的控制作用)，正是后一作用能卓有成效地模拟人的思维。但迄今为止的任一种Fuzzy控制，都不具备常规$PID$或$PI$控制中的积分作用，因而无法使控制过程的稳态误差减至理想的程度。

常规$PID$调节的数学表达式为：

$$Y = KE + K_i \int E dt + K_d D \tag{5-6-1}$$

式中：$Y$是控制器的输出（即控制作用的强弱）；$E$是偏差值,即被调量实际值$U$对其给定值$U_0$的偏差值（即$E = U - U_0$），而$D$是$E$的变化率（即$D = dE/dt$）；$t$为时间。

在（5-6-1）式的等号右侧，第一项$KE$是比例作用；第二项$K_i \int E dt$是积分作用；第三项$K_d D$是微分作用；而$K$，$K_i$和$K_d$分别代表比例作用系数。积分作用系数和微分作用系数。

## 一、新型调节器和调节规律

我们研制了新型调节器。其中，$Y$、$E$和$D$加以模糊化（记其模糊化数值分别为$\underset{\sim}{Y}$、$\underset{\sim}{E}$、$\underset{\sim}{D}$），也就是将常规$PID$控制同Fuzzy控制有机地结合起来，形成为新型调节规律：

$$\underset{\sim}{Y} = K\underset{\sim}{E} + K_i \int \underset{\sim}{E} dt + K_d \underset{\sim}{D} \tag{5-6-2}$$

需要说明的是，在式（5-6-2）中，比例作用系数$K$是同$\underset{\sim}{E}$的模糊化数值$\underset{\sim}{E}$相乘；而第二项$K_i \int \underset{\sim}{E} dt$表示：先对$\underset{\sim}{E}$进行积分,而后乘以积分作用系数$K_i$；$K_d \underset{\sim}{D}$的含义也类似，它是$\underset{\sim}{D}$同$K_d$相乘。

在调节器中，模糊化所用的隶属函数为：

$$\mu_S(|x|) = \mu_M(|x|) = \mu_B(|x|) = 0, \quad |x| = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_S(|x|) = \begin{cases} 1 & 0 < |x| \leqslant x_1 \\ \exp\left[-\left(\dfrac{|x| - x_1}{\sigma_x}\right)^4\right] & |x| > x_1 \end{cases} \\
&\mu_M(|x|) = \exp\left[-\left(\dfrac{|x| - x_2}{\sigma_x}\right)^4\right] \qquad |x| > 0 \\
&\mu_B(|x|) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\dfrac{|x| - x_3}{\sigma_x}\right)^4\right] & 0 < |x| \leqslant x_3 \\ 1 & |x| > x_3 \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{5-6-3}$$

在这里，$X$可以是$E$、$D$或$Y$之中的一个，也就是说，这些公式是对于诸变量的绝对值而言的。因此，各个隶属函数的下标只需注明$S$(Small)，$M$(Medium)、$B$(Big)，而不必再冠以$P$（Positive）或$N$（Negative），如将$X$的实际情况注明，则(5-6-3）式组即可展开为：

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\mu_S(|E|)=\mu_M(|E|)=\mu_B(|E|) & |E|=0 \\
\mu_S(|E|)=\begin{cases}1, & 0<|E|\leqslant E_1\\ \exp\left[-\left(\dfrac{|E|-E_1}{\sigma_E}\right)^4\right], & |E|>E_1\end{cases} & \\
\mu_M(|E|)=\left\{\exp\left[-\left(\dfrac{|E|-E_2}{\sigma_E}\right)^4\right]\right\}, & |E|>0 \\
\mu_B(|E|)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{|E|-E_3}{\sigma_E}\right)^4\right], & 0<|E|<E_3\\ 1, & |E|>E_3\end{cases} &
\end{array}
\right\}
\tag{5-6-4}
$$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\mu_S(|D|)=\mu_M(|D|)=\mu_B(|D|), & |D|=0 \\
\mu_S(|D|)=\begin{cases}1, & 0<|D|\leqslant D_1\\ \exp\left[-\left(\dfrac{|D|-D_1}{\sigma_D}\right)^4\right], & |D|>D_1\end{cases} & \\
\mu_M(|D|)=\exp\left[-\left(\dfrac{|D|-D_2}{\sigma_D}\right)^4\right] & |D|>0 \\
\mu_B(|D|)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{|D|-D_3}{\sigma_D}\right)^4\right] & 0<|D|\leqslant D_3\\ 1, & |D|>D_3\end{cases} &
\end{array}
\right\}
\tag{5-6-5}
$$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\mu_S(|Y|)=\mu_M(|Y|)=\mu_B(|Y|)=0 & |Y|=0 \\
\mu_S(|Y|)=\begin{cases}1, & 0<|Y|\leqslant Y_1\\ \exp\left[-\left(\dfrac{|Y|-Y_1}{\sigma_Y}\right)^4\right] & |Y|>Y_1\end{cases} & \\
\mu_M(|Y|)=\exp\left[-\left(\dfrac{|Y|-Y_2}{\sigma_Y}\right)^4\right] & |Y|>0 \\
\mu_B(|Y|)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{|Y|-Y_3}{\sigma_Y}\right)^4\right] & 0<|Y|\leqslant Y_3\\ 1, & |Y|>Y_3\end{cases} &
\end{array}
\right\}
\tag{5-6-6}
$$

初步仿真试验中，采用下列诸值：$E_1=1$，$E_2=3$，$E_3=5$，$\sigma_E=1.9$，$D_1=0.05$，$D_2=0.1$，$D_3=0.2$，$\sigma_D=2.8$，$Y_1=101$，$Y_2=110$，$Y_3=120$，$\sigma_Y=18$。

新型调节器的自寻优技术是在自动寻找最佳工作参数：$K$、$K_i$、$K_d$，采用的判据类似于下列最常用的积分判据：

$$
Q=\int_0^\infty |E|\,t\,dt \tag{5-6-7}
$$

此判据的优点在于能综合实现许多的重要调节品质指标——响应快、衰减率大、调节时间短、超调量很小、稳态误差也很小。从（5-6-7）式可知，此判据仅适用于模拟计算机。

为了将上述判据移植到数字计算机中，即为了离散型运算，必须引入在形式上稍有变化的如下的判据：

$$\Delta Q = Q(t+\Delta T) - Q(t) = \int_0^{t+\Delta T} |E| \tau d\tau - \int_0^{t} |E| \tau d\tau = \int_t^{t+\Delta T} |E| \tau d\tau \qquad (5\text{-}6\text{-}8)$$

我们即以（5-6-8）式中的$\Delta T$作为离散差分运算中的采样间隔。由于$\Delta T$很小，上式中的被积函数$|E|\tau$可看作常量，并让它取$\tau=t$时的值，于是式（5-6-8）变为

$$\Delta Q = |E| t \Delta T \qquad (5\text{-}6\text{-}9)$$

## 二、K的在线自寻优程序

为了简述简便起见，我们仅就对$K$自寻优的例子，编制了如下$BASIC$子程序（在此程序中，以$Q$代替$\Delta Q$），其程序框图见图5-6-1。

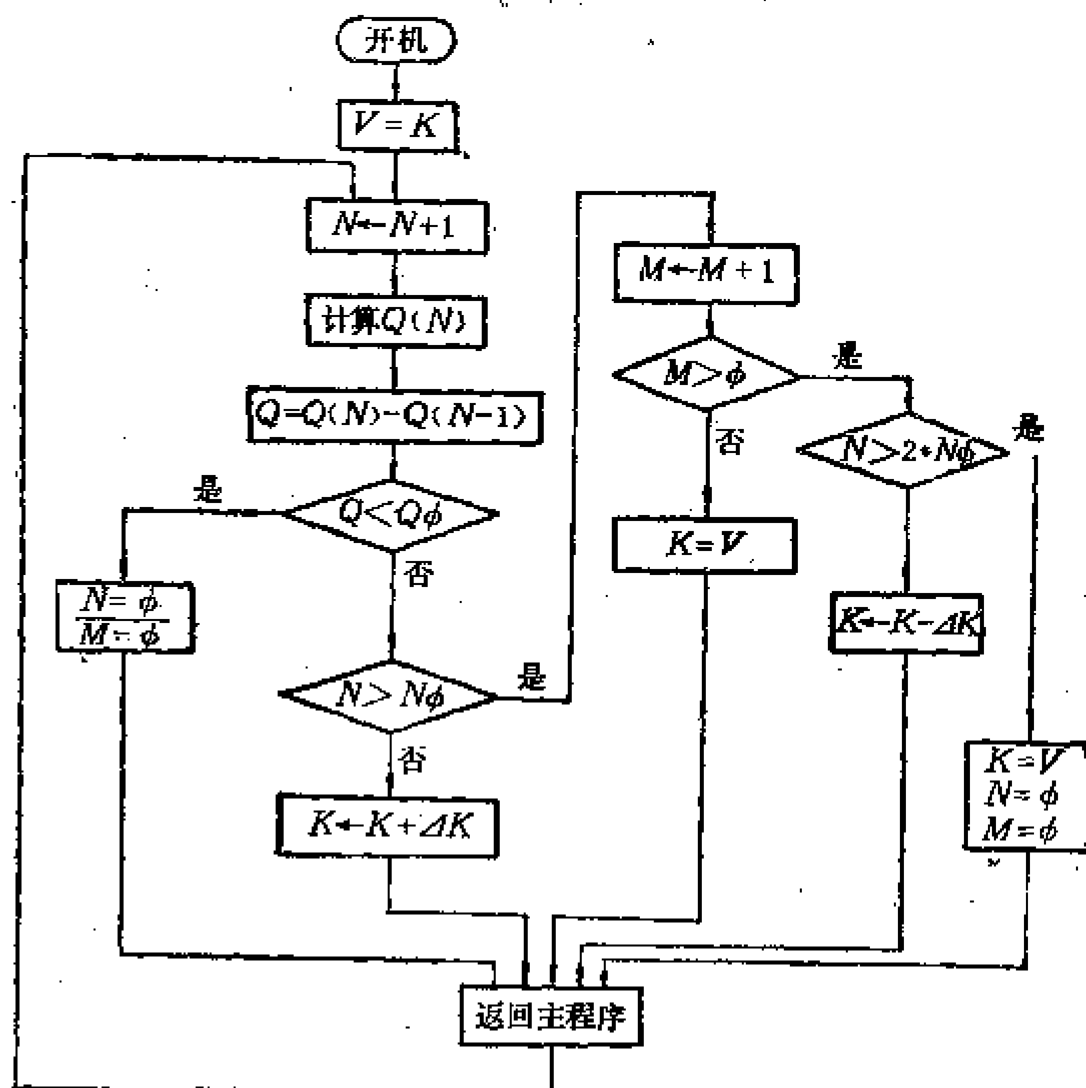



图 5-6-1 自动寻优的程序框图

K的在线自寻优子程序：

```
600  V=K,
610  N=N+1; Q=ABS(E)*T*Tϕ
620  IFQ>Q0, THEN640
630  N=0: M=0: GOTO700
640  IFN>5THEN660
650  K=K+1: GOTO700
660  M=M+1: IFM>1THEN670
665  K=V: GOTO700
670  IFN>10, THEN690
```

```
680  K = K - 1; GOTO700
690  K = V; N = 0, M = 0,
700  ……,
```

在这儿，递减递增搜索的极限深度为$N0=5$，而每次搜索的增量或减量为$\Delta K=1$，不难看出，这种在线寻优颇象人工智能技术中的深度优先式搜索，但又有所改进。这是以通常的离线优选参数$K$为基础的进一步在线优化，搜索是在一维的参数空间内进行的。

### 三、仿真试验与结果

仿真试验的框图见图5-6-2。待调的广义对象为一阶惯形环节$1/10s+1$，或再串联一个纯滞后环节$e^{-0.5s}$，通常，这足以代表典型的热工过程。

我们仿真试寻是在$TP$803微型计算机上，利用BASICⅡ语言编程序的。采样周期是：每一$\Delta T=0.01$相当于调节一次。即便是这样的初步试验，其结果也十分令人满意。对于$1/10s+1$以及$e^{-0.5s}$的系统，超调小于0.8%，而对于$1/10s+1$的系统，超调小于1.0%。若使$\underset{\sim}{E}$，$\underset{\sim}{D}$，$\underset{\sim}{Y}$诸变量的分档数加多，并精细调整调节器的工作参数，其结果会更好。

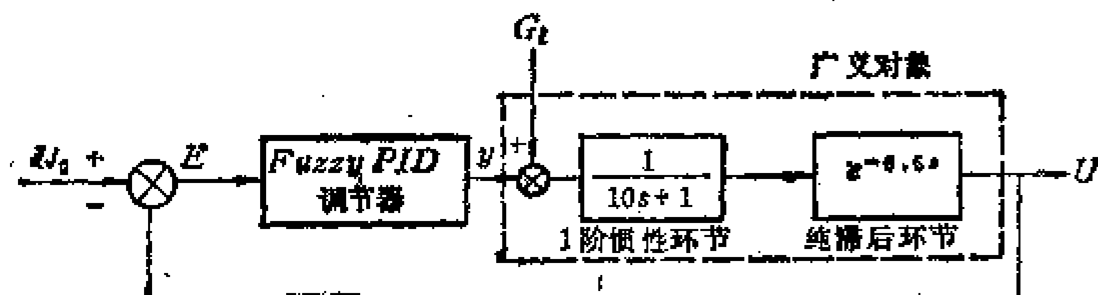



图 5-6-2　仿真系统的框图

## §5-7　生产过程的语言模型及其模糊“最佳”控制[81]

1983年，唐多元(中国)，寺野寿郎(日本)，菅野道夫(日本)提出了对生产过程建立语言模型以及求解多段过程的近似最佳Fuzzy控制方法。并用一个三段加热器的近似最佳加热蒸汽分配的实例验证了该法是有效的。

### 一、近似最佳Fuzzy控制

迄今，已经有了一些关于Fuzzy环境中的动态规划法的研究。其中，引入了Fuzzy约束条件Fuzzy目标等，但研究中的模型本身却都是非模糊的。这里，我们提出了一个建立语言模型以及求解多段过程的近似最佳Fuzzy控制的方法。

作为我们的研究对象的生产过程是一个多段过程。对于它的动态特性，我们只有一个大略的了解。即对于它的输入-输出关系只有一些定性的知识。比如说，我们知道对于生产过程的某一段来说，具有“输入量很小，并且操作量也很小，输出也很小”，“输入量很大，操作量也很大时，输出也很大”……。显然，只具有这样的知识，我们是无法用精确的数学公式来建立它的数学模型的，也更无法去求解了。但是，用Fuzzy推论的方法可以做到这一点。

上面所述的用来描述过程特性的每一句话，可以写成一个二维蕴涵（two-dimensio-

nal implication)。例如，“(input is lavge, control is large)→(output is very lavge)”。用一系列这样的二维蕴涵是可以描述我们的过程的特性的。

但是，实际上我们没有必要写出许多个二维蕴涵来描述我们的过程的每一段。我们只要挑选出四个有代表性的二维蕴涵就完成了一个语言模型。我们把这四个具有代表性的二维蕴涵叫做“基准蕴涵规则”，其他的蕴涵可以类似于线性内插法的二维Fuzzy推论法从基准蕴涵规则得到。

众所周知，在古典逻辑中有两条推论规则，即肯定式(modus ponens)和否定式(modus tollens)，它们表示的命题和命题之间的蕴涵关系。如果用“$P$”表示前一个命题(称为事件)，用“$Q$”表示后一命题(称为后件)，用“$\neg$”表示非，“$\rightarrow$”表示蕴涵，则肯定式和否定式可以分别记为：

$$\frac{P,P\rightarrow Q}{Q}\text{和}\frac{\neg Q,P\rightarrow Q}{\neg P}$$

肯定式说，$P\rightarrow Q$为真时，如果前件$P$为真，则可以推得后件$Q$为真；否定式是其对偶式，即$P\rightarrow Q$为真时，如果后件$Q$为假，则可以推得前件$P$为假。在古典逻辑中，前件、后件和蕴涵的真值只能取“真”或“假”这两个值。但是在Fuzzy推论中，前件、后件及蕴涵的真值还可以取“相当真”，“比较假”，“不知道”，……等语言真值。这样，使用起来就更灵活了。

因为“基准蕴涵规则”是用二维蕴涵表示的，所以在推理过程中使用了菅野等人提出的“多维Fuzzy推论”(multi-dimensional fuzzy reasoning)的方法。当二维蕴涵中input(输入)和control(控制)用论域上的Fuzzy子集的形式给出时，借助于“基准蕴涵规则”我们可以用“二维Fuzzy肯定式”推算出用Fuzzy子集表示的output(输出)。当二维蕴涵中的input和output已知时，我们可以用“二维Fuzzy否定式”推算出用Fuzzy子集表示的coutrol。

在寻找“最佳”control时，我们使用了和普通的动态规划法相似的，只是处理对象为Fuzzy集合，运算方法为Fuzzy推论的动态规划法。

最后，我们用找出一个三段加热器的近似最佳加热蒸气分配的例子验证了所提Fuzzy推论方法是有效的。

## 二、语 言 模 型

现在，我们对怎样用蕴涵来建立语言模型的方法作更详细的说明，并给出推论的具体算法。下面用三段加热器作例子。如图5-7-1所示。

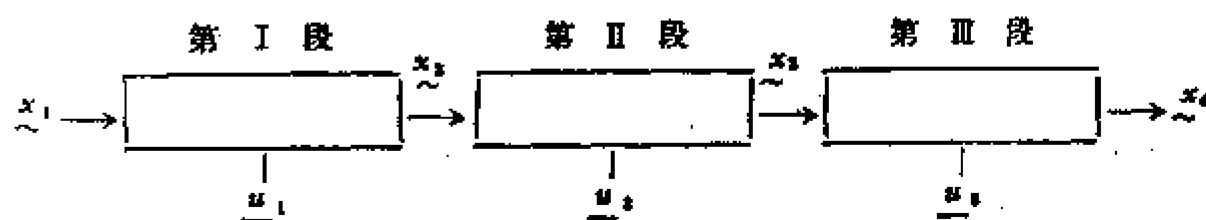



图 5-7-1 三段加热器

对这一加热器，我们了解到的仅仅是如下知识：

流量一定的流体，通过此三段加热器，温度从大约是$\underset{\sim}{x}_1$上升到大约是$\underset{\sim}{x}_4$。这三段加

热器的特性我们知道并不详细，而只知道$\underset{\sim}{x}_n$的影响强，$u_n$的影响弱，以及第Ⅰ段的加热器的热交换大，第Ⅱ段的热交换率中等，第Ⅲ段的小。这样，我们所知道的加热器的特性就是模糊的，这用数学式子来表示是不可能的。但我们用上面这一段文字说明其特性后，则对其特性有了起码的了解了，这就是我们可以用语言模型来表示系统特性的理由。

可以控制的最简单的生产过程可以写成：$y=f(x,u)$，即输出量$y$是输入量$x$和操作量$u$的函数。为了定性地表示其特性，下面这样的表示方式是必要的：

$$(x_n \text{ is } \underset{\smile}{\text{small}}, u_n \text{ is } \underset{\smile}{\text{small}}) \to (x_{n+1} \text{ is } \underset{\smile}{\text{very}} \ \underset{\smile}{\text{small}})。$$

我们可以将上式简写为：

$$(A,B)\to C \qquad (5\text{-}7\text{-}1)$$

用这样的蕴涵来表示生产过程的模型叫做语言模型。正如前面已说明了的，为了比较全面地描述一个过程，每一个语言模型由四个蕴涵组成，所以，这里讨论的语言模型具有如下的形式：

$$(A_i,\ B_j)\to C_{ij},\ i,\ j=1,\ 2 \qquad (5\text{-}7\text{-}2)$$

此处的$A_i$等是Fuzzy集的名字，其特性由图5-7-2所示隶属函数给出。($B_1$，$B_2$)的隶属函数分别与$A_1$，$A_2$同)。我们把这四种蕴涵作为基准蕴涵，进一步，我们假定very，rather等词可以适用我们的基准蕴涵，使用方法按照Zadeh所给出的执行。

当$x_n$和$u_n$分别用两个Fuzzy子集来表示时，我们使用“二维Fuzzy肯定式”来求得系统的$x_{n+1}$。

其步骤如下：

（1）固定$B_j$，使用Fuzzy肯定式

$$\frac{(A,B_j),\ (A_i,B_j)\to C_{ij}}{C'_{ij}} \quad i,j=1,2 \qquad (5\text{-}7\text{-}3)$$

可以得到四个结果，记为$C'_{ij}(i,j=1,2)$

（2）用（AND）运算求出最后的$C_j$

$$C_j=C'_{1j}\cap C'_{2j} \qquad j=1,2 \qquad (5\text{-}7\text{-}4)$$

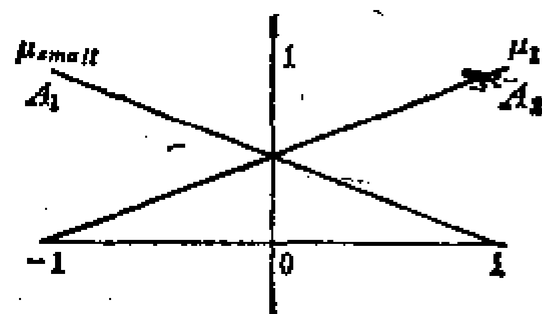


图 5-7-2 基准Fuzzy集合的隶属函数

这样，我们就得到了二个新的蕴涵，记为

$$(A,B_j)\to C_j \qquad j=1,2 \qquad (5\text{-}7\text{-}5)$$

（3）固定$A$，由下式

$$\frac{(A,B),\ (A,B_j)\to C_j}{C'_j} \qquad j=1,2 \qquad (5\text{-}7\text{-}6)$$

可以求得$C'_j$，$j=1,2$

（4）对$C'_1$和$C'_2$施加（AND）运算，求得解$C$

$$C=C'_1\cap C'_2 \qquad (5\text{-}7\text{-}7)$$

Fuzzy集合$C$是从一对数据$(A,B)$和四个蕴涵：$(A_i,B_j)\to C_{ij}(i,j=1,2)$而得到的最后结果。

上面的二维Fuzzy推论的方法，同时也说明了我们的语言模型是怎样起作用的。

## 三、使用语言模型的动态规划法

试考察一个寻找近似最佳操作量问题，其中初始状态和最终目标都是以语言形式给出。

对于一般生产过程，这样的问题是要从已知的input和output推导出control来，我们用Fuzzy否定式来进行这样的推导。其算法是，在获得了式(5-7-5)所表示的新的蕴涵关系后，我们就固定$A$，用下式求得$B'_1$和$B'_2$：

$$\frac{C,(A,B_j)\to C_j}{(A,B'_j)}\quad j=1,2 \tag{5-7-8}$$

这时，我们所要求的control可写为

$$B=B'_1\cap B'_2 \tag{5-7-9}$$

作为动态规划法的基础的最佳原理，仍然可以适用于这样的语言模型。当然，为了找出“最佳”控制，我们必须：

（1）将两个Fuzzy子集相加。由(5-7-9)式求得的control看作一个Fuzzy数，使用水本等提出的方法来求和；

（2）比较两个Fuzzy子集的大小，同时考虑同一空间中的两个隶属函数的最高点及其所包围的面积的重心在$x$轴上的坐标，并使它们的线性组合来比较根据（5-7-9）式而得的两个模糊集合。

这两个问题解决以后，就可以使用和普通动态规划法一样的方法找出“最佳”控制来。

我们仍用图5-7-1所示的三段加热器来作为实例。三段加热器中的每一段的语言模型示于表5-7-1，其中的L和S分别为“large”和“small”的缩写。

**加热器的语言模型** 表5-7-1

| Premises(前提) | control | control | control |
|---|---|---|---|
| input, control | 1st stage | 2nd stage | 3rd stage |
| L, L | $L^4$ | $L^3$ | $L^2$ |
| L, S | $L^{0.3}$ | $L^{0.3}$ | $L^{0.3}$ |
| S, L | $S^{0.1}$ | $S^{0.1}$ | $L^{0.2}$ |
| S, S | $S^4$ | $S^4$ | $S^2$ |

当初始状态和最终目标分别用图5-7-3和图5-7-4所示的Fuzzy子集表示时，我们用计算机模拟所得的结果如图5-7-5所示。这也表示了对于三段加热器来说，怎样来分配蒸汽才能使总耗汽量最省。

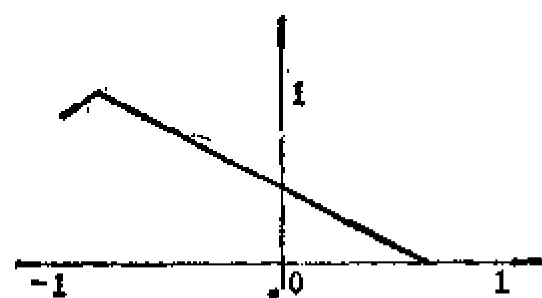


图 5-7-3 初始状态

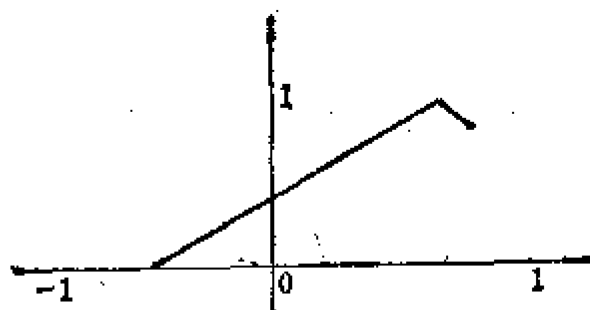


图 5-7-4 最终目标

图5-7-5所示的Fuzzy集合翻译成语言就是：给第Ⅰ段大量蒸汽，给第Ⅱ段中等程度的蒸汽，给第Ⅲ段少量蒸汽。这一结论是符合我们的经验的。

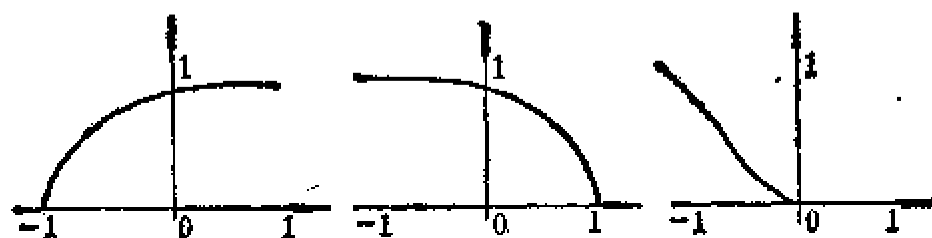


图 5-7-5 "最佳"蒸汽分配

还要强调的是：过程的语言模型的作用以及"最佳"控制求解过程都是用Fuzzy推论的方法实现的。

## §5-8 模糊逻辑在柴油机故障诊断中应用的试验[95]

1981年，吴秋峰、刘元亮等采用日本塚元提出的模糊逻辑诊断模型，对东风-4内燃机柴油机的部分故障进行了计算机辅助诊断的一些试验，初步结果是满意的。

各种设备的故障诊断是大量存在的。在大多数诊断问题中，除了使用各种仪器外，还需借助于人的感官获取信息，并依靠人的经验进行推理、作出判断。由于诊断经验的积累和诊断人才的培养都是不易的，特别是人的判断往往受到诸如个人经验、记忆力、环境等的影响，所以，早在50年代就有人进行计算机辅助诊断的研究，并得到一定发展。所采用的数学模型一般是以概率统计理论为基础的。近几年，法国Sanchez，日本寺野、塚元等都尝试以模糊逻辑为基础，提出了各种诊断模型。

在铁路运输中，机车故障的准确诊断不仅能节约大量维修费，而且有助于事故的预防。我们采用一类诊断模型，对东风-4内燃机柴油机的部分故障进行了计算机辅助诊断的一些试验。

### 一、一类模糊诊断模型

故障诊断就是根据观察到的异常现象（症状），判断所发生的故障。人们在进行诊断中的推理大多数不是绝对的二值逻辑推理，而是一种近似的模糊推理，这是人脑机能高于机器之点，为此就需要一种更接近于自然语言的形式来描述。例如，诊断中需要灵活地使用诸如"很肯定"、"基本成立"之类术语来描述命题的真实程度，这就需要用语言真值。语言真值是用$V=[0,1]$上的模糊子集定义的，如：

真(true)　$\mu_{true}(v)\triangleq v,\ \forall v\in[0,1]$

完全真(c.t)　$\mu_{c.t}(v)\triangleq\begin{cases}1 & v=1\\ 0 & 其它\end{cases}$

这里，用$p$和$\underset{\sim}{P}$分别表示命题P的数字真值和语言真值。若$\mu_p(1)=1$，则称P为偏真命题。

我们基本上采用了塚元提出的诊断模型，但叙述略有不同，并在计算机实现上作了些工作。此诊断模型是由基于lukasiewicz逻辑的模糊语言逻辑导出的。lukasiewicz逻辑中逻辑联结词的运算规则如下：

非　$R_1\triangleq\neg P$；$r_1=1-P$；合取$R_2\triangleq P$ AND $Q$；$r_2=p\wedge q$

析取$R_3\triangleq P OR Q$；$r_3=p\vee q$；蕴涵$R_4\triangleq P\to Q$；$r_4=(1-p+q)\wedge 1$。

利用$\alpha$截集和扩张原理可将lukasiewicz逻辑推广成相应的模糊语言逻辑：

$$\underset{\sim}{R}_1^\alpha=1-\underset{\sim}{P}^\alpha,\ \underset{\sim}{R}_2^\alpha=\underset{\sim}{P}^\alpha\wedge\underset{\sim}{Q}^\alpha;$$

$$\underset{\sim}{R}_3^\alpha=\underset{\sim}{P}^\alpha\vee\underset{\sim}{Q}^\alpha;\ \underset{\sim}{R}_4^\alpha=(1-P^\alpha+Q^\alpha)\wedge 1$$

设 $\underset{\sim}{P}^\alpha=[p_1 p_2]$；$\underset{\sim}{Q}^\alpha=[q_1,q_2]$则$1-P^\alpha\triangleq[1-p_2,1-p_1]$；

$\underset{\sim}{P}^\alpha\wedge\underset{\sim}{Q}^\alpha\triangleq[p_1\wedge q_1,\ p_2\wedge q_2]$；$\underset{\sim}{P}^\alpha\vee\underset{\sim}{Q}^\alpha\triangleq[p_1\vee q_1,\ p_2\vee q_2]$；

设$R=P\to Q$是偏真命题，$\underset{\sim}{R}^\alpha=[r,1]$，则利用$\alpha$截集和扩展原理可得Fuzzy Modus Poness（模糊假言推理）和Fuzzy Modus Tollens（模糊矩取式）：

$$\underset{\sim}{Q}^\alpha=[(p+r_1-1)\vee 0,\ 1];\ \underset{\sim}{P}^\alpha=[0,(q_2-r_1+1)\wedge 1]$$

设所论及的故障诊断系统中共有$m$种故障及$n$种症状，则分别定$X$和$Y$为故障和症状的集合：$X=\{x_i|i=1,2,\cdots,\ m\}$，$Y=\{y_j|j=1,2,\cdots,\ n\}$。

定义以下原始命题：$A_i\triangleq$ “$x_i$发生”，$B_j\triangleq$ “$y_j$出现”，$R_{ij}\triangleq$ “$x_i$和$y_j$有因果关系”。如果故障$x_i$是出现症状$y_j$的原因之一，则称它们之间有因果关系，否则为无因果关系。因此，$R_{ij}$只能取“完全真（c.t）”或“完全假（c.f）”。

定义合成命题$P_j$与$P_{ij}$:$P_j\triangleq B_j\to \mathrm{OR}_i(A_i\,\mathrm{AND}\,R_{ij})$；$P_j$的含意是：若$y_j$出现，则与$y_j$有因果关系的故障中至少发生其一。$P_j$的真实程度是很高的，一般可取$P_j=$c,t。$P_{ij}\triangleq A_i\to B_j$。$P_{ij}$的含意是：若$x_i$发生则$y_j$出现。

若$\underset{\sim}{R}_{ij}=$c.t,则$\underset{\sim}{P}_{ij}$可根据情况取c.t、v.t（very true非常真）、true、r.t（rather true相当真）、r.r.t中之一，在所附诊断表中分别对应$A$，$B$，$C$，$D$，$E$。

若$R_{ij}=$c.f（完全假），则$\underset{\sim}{P}_{ij}=$unknown（不知道），在诊断表中以空格表示。因为，若$\underset{\sim}{R}_{ij}=$c.f则当$x_i$发生时，$y_j$不一定不出现，它也可能由同时发生的其他故障所引起。

设$\underset{\sim}{P}_j^\alpha=[1,1]$，$\underset{\sim}{P}_{ij}^\alpha=[P_{ij}(1),1]$，$\underset{\sim}{B}_j^\alpha=(b_j(1),\ b_j(2)]$。对$P_j$和$P_{ij}$分别应用Fuzzy Modus Ponens和Fuzzy Modus Tollens，并根据$\underset{\sim}{R}_2^\alpha=\underset{\sim}{P}^\alpha\wedge\underset{\sim}{Q}^\alpha$，$\underset{\sim}{R}_3^\alpha=\underset{\sim}{P}^\alpha\vee\underset{\sim}{Q}^\alpha$，则可得

$$V_i(\underset{\sim}{A}_i^\alpha\wedge\underset{\sim}{R}_{ij}^\alpha)=[b_j(1),\ 1],\ i=1,2,\cdots m,\ j=1,2,\cdots n \tag{5-8-1}$$

$$\underset{\sim}{A}_i^\alpha=[0,(b_j(2)-p_{ij}(1)+1)\wedge 1],\ i=1,\cdots m,j=1,\cdots,\ n \tag{5-8-2}$$

诊断过程就是事先归纳总结的$\underset{\sim}{R}_{ij}$，$\underset{\sim}{P}_{ij}$，F根据具体的症状$\underset{\sim}{B}_j$，利用方程式（5-8-1），（5-8-2）推断故障$\underset{\sim}{A}_i$，并取真值程度高者为诊断结果。

实际应用中的诊断问题往往可以简化，为了节省运算时间，可适当收缩搜索范围。根据输入症状$B_j$，建立指标集$J_1$，$J_2$，$I$：

$$I=\{i|V_{j\in J_2}\underset{\sim}{P}_{ij}\leqslant \text{r.r.t}\},J_1=\{j|\underset{\sim}{R}_j>\text{unknown}\},$$

$$J_2=\{j|B_j<\text{unkown}\}。$$

若$\mathrm{I}\neq\phi$，且$\forall j\in J_1$，$Ji\in\mathrm{I}$；$\underset{\sim}{P}_{ij}>$unkown，则诊断可有结果。再若$\forall k\ni\mathrm{I}$，$\forall j\in J_1$；$\underset{\sim}{P}_{ij}>$unkown成立，则得诊断结果为：第$k$种故障发生，其真实程度为$\underset{\sim}{A}_k=$

$\bigvee_{k \in J_1} \underset{\sim}{B}_{k}$。

若上述条件不成立，则可逐步扩大搜索范围，并相应降低所得结果的可信程度。

当症状不充分时，利用上述方法可能得不出结果，可辅以其它方法，如用和典型症状集最接近的概念，找出几种可能的故障，并指出为进一步诊断所应检查的几种症状，从而通过人-机对话继续诊断过程，人们可以补充输入进一步观察后的症状由计算机再次诊断。

## 二、东风-4柴油机故障计辅诊断试验

东风-4内燃机是我国铁路上目前运行的一种主要机型。我们根据济南局刘文亮等同志积累的经验，选择柴油机固定件、运动件和增压器等部件46种故障和44种症状，建立诊断表，并应用前述诊断模型进行计算机辅助诊断试验。

首先根据理论分析和检修人员的经验，建立$P_{ij}$表，$P_{ij}$的语言真值$\underset{\sim}{P}_{ij}$可分别取$A$，$B$，$C$，$D$，$E$和空格六种，其含意分别是：

若$x_i$本身"必然"导致$y_i$出现，则记为$A$，若将语气"必然"换成"几乎肯定"，"一般"，"较少"，"几乎不"，"绝对不"，则分别记为$B$，$C$，$D$，$E$和空格。

例如，若缸盖垫漏气(故障$x_3$)，则高压燃气"必然"要从缸垫的缝隙窜出而发出"擦擦"的气流声(症状$y_{12}$)，因此，诊断表中$P_{3.12}=A$；若缸盖垫漏气"几乎肯定"要使压缩压力降低($y_{20}$)，则$P_{3.20}=B$。

诊断表$P_{ij}$需要在尽可能周到和完善编制的基础上通过实践不断改进。

应用上述模糊诊断模型及诊断表（见附录），在TRS-80微型计算机上做了初步的计辅诊断试验，为便于人-机对话，采用BASIC（Level Ⅱ）语言。试验主要是根据济南局机务段检修日志，并将诊断结果与实际检修情况或工人经验做对比。

例如：检修日志记录："0295机车临修；80年6月18日星期三。乘务员反映：废气管发红、柴油机冒黑烟，第十三缸不爆发。经到车起机检查，将每缸人为地供油试验，发现确实第十三缸不爆发，并且高压油管无脉冲，油泵齿条似有抖动，经打开该凸轮轴，检查孔盖，发现该油泵下体滚轮打坏，固死……"。

这段日志基本上反映了检修人员的诊断过程：听乘务员反映，上机核实，收集症状，作出判断。

计算机辅助诊断过程：

（1）计算机通过终端询问"症状？"。由终端输入乘务员所观察到的症状：废气管发红（$Y_{19}$），柴油机冒黑烟（$Y_5$），个别缸不爆发($Y_9$)，并可指明各症状的程度，如$\underset{\sim}{B}_9=\mathrm{c.t}$，$\underset{\sim}{B}_{19}=\underset{\sim}{B}_5=\mathrm{true}$。

（2）经计算机辅助诊断，计算机认为症状不充分，显示出："建议检查：$X_{18}$—$X_{11}$，$Y_{27}$（即建议查$Y_{11}$、$Y_{27}$以便确定是否$X_{18}$发生）。$X_{37}$—$Y_{14}$，$Y_{15}$；$X_{42}$—$Y_{38}/Y_9$？

（3）经进一步检查后，补充（或修改）症状：高压油管无脉冲（$Y_{14}$），油泵齿条似有抖动（$Y_{15}$），即$\underset{\sim}{B}_{14}=\mathrm{c.t}$，$\underset{\sim}{B}_{15}=\mathrm{unknown}$。

（4）计算机给出："诊断结果：可能一滚轮损坏$X_{37}$，可再检查：$Y_{10}$(供油压力不足)"。

（5）若供油压力确实不足，则可进一步确诊是滚轮损坏。

可见，这种诊断过程十分接近于检修人员的诊断过程。

东风-4柴油机故障诊断历年来虽有不少记录，但尚构成不了统计资料，而且不少症状相互关联，对使用概率统计方法造成一些困难，而初步试验表明，采用此种模糊诊断模型能获得满意的结果。

**附录：东风-4柴油机故障诊断表（节录）。**

| | 故障原因X | | 症　状 |
|---|---|---|---|
| $X_1$ | 缸盖裂 | $Y_1$ | 甩车时示功阀喷火 |
| $X_2$ | 缸套裂 | $Y_2$ | 甩车时示功阀有水 |
| $X_3$ | 缸盖垫漏气 | $Y_3$ | 甩车时示功阀有油 |
| $X_4$ | 缸套磨损 | $Y_4$ | 起车时曲轴不发火 |
| $X_5$ | 活塞肖堵坏 | $Y_5$ | 柴油机冒黑烟 |
| ⋮ | | ⋮ | |
| $X_{18}$ | 横臂脱落 | $Y_9$ | 个别缸不爆发 |
| ⋮ | | $Y_{10}$ | 气缸爆发压力低 |
| ⋮ | | $Y_{11}$ | 气缸有敲缸声 |
| ⋮ | | $Y_{12}$ | 气缸有擦擦声 |
| $X_{37}$ | 滚轮损坏 | $Y_{13}$ | 喷油泵高压油管脉冲大 |
| ⋮ | | $Y_{14}$ | 喷油泵高工况时油管无脉冲 |
| ⋮ | | $Y_{15}$ | 喷油泵齿条运动不灵 |
| ⋮ | | $Y_{16}$ | 喷油泵供油压力不足 |
| ⋮ | | ⋮ | |
| $X_{42}$ | 增压器转子卡滞和损坏 | $Y_{19}$ | 废气缸发红 |
| ⋮ | | $Y_{20}$ | 压缩压力不足 |
| | | ⋮ | |
| $X_{46}$ | 冲冷器漏水 | $Y_{26}$ | 空气稳压箱有水 |
| | | $Y_{27}$ | 空气稳压箱放炮 |
| | | ⋮ | |
| | | $Y_{44}$ | 刚修理 |

**诊　断　表（节录）**

| $Y_j$ / $X_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5…9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16…19 | 20…26 | 27…44 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | A | | | C | D | | | | | | D | B | |
| 2 | | C | | | | | | | | | | E | E | |
| 3 | | D | | | D | C | | A | | | | B | | B |
| 4 | | | E | | E | C | | | | | | C | | |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | | | | C | B | | A | | | | | C D | B | B |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 37 | | | | C | C | D | | | | B | B | C C | | |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 42 | | | | B | | E | | | | | | B | | |
| ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 46 | | E | | | | | | | | | | | B | |

# 第六章

## 模糊数学在宏观及微观经济中的应用

现代经济已成为一个特大的复杂系统，不仅在物质生产领域新兴了许多工业部，而且在非物质生产领域里新兴了许多经济部门。现代经济使生产、交换、分配、消费都成为极为重要的环节。科学技术—经济—社会—体化；物质生产—非物质生产—体化；自然—机器—人—体化；生产力—生产方式—生产关系—经济政策—体化。各种经济过程和经济现象纵横交错，互相联系、渗透，融成为一个不可分割的统一的经济大系统。社会经济大系统的特征是：规模庞大、结构复杂、功能综合（多目标、多功能综合）、因素众多（多输入、多输出、多变量）、不确定性（模糊性，随机性）、不确知性（信息不足或不确知）、主动性（管理、经营者的主观能动性）、维数灾（数学模型的高维高阶）等。这就要求从系统论观点和系统分析方法对现代经济进行系统—结构分析；功能—发展分析；模型—质量分析；静态—动态分析；宏观—微观分析；定性—定量分析；线性—非线性分析，以便较全面、较深刻地认识现代经济运动的规律。

模糊数学应用于宏观、中观、微观经济研究，提出了宏观经济、中观经济、微观经济数学模型，提出了科学的定量化的模糊综合评价，预测、决策方法。使系统论、信息论、控制论和模糊数学理论相结合，形成现代新的科学方法论，并将其移植到、应用到经济科学研究中去，构成新的经济科学体系，攻克那些长期未突破的经济难题，这将是现代经济研究的重要趋势之一。

### §6-1 社会经济系统中决策指标的估价方法及权重[97]

1986年，席西民、汪应洛、陶谦坎利用模糊数学中的集值统计原理，探讨了社会经济系统中决策指标的估价方法。利用这套方法，评价者可以较充分地利用评价过程中获得的信息，较容易地处理评价中经常遇到的不确定性，随机性，模糊性和一些心理因素的影响，更易于集中多种不同意见，并分析指标评价值的置信程度。然后讨论了指标的权及其算法。不仅使决策者对指标相对重要程度的主观评价更确切和易于进行，而且引入了熵描述的信息权和指标置信度描述的可靠性权两个概念，使指标相对重要性程度的描述更加客观、合理。

#### 一、社会经济系统决策特性

社会经济系统中的决策问题，如城市规划方案的决定，某重大改革措施的提出、某项大型工程的建设等，大都涉及到政治、经济、技术和生态环境等诸方面的因素，要讲求经济效益、社会效益和环境效益。因此，作出一项正确决策，依赖于从各个方面对待选方案的准确、客观的评价。但由于这些决策问题涉及范围广泛、影响深远，加上所需资料往往

非常缺乏，所以，评价过程中经常包含许多不确定性、随机性和模糊性，并且往往还涉及到许多心理因素的测定。另外，这些决策问题大都属于多指标决策问题。大多数决策方法都需要一个描述指标相对重要程度的权的估价。指标的权应该是指标在决策中相对重要程度的一种主观评价和客观反映的综合度量。但现行的方法大都只考虑了主观评价一个方面。为了弥补资料不足，克服评价中种种不利因素的影响，尽可能多地利用资料和资料收集过程中的信息，在现有的客观条件下作出比较切合实际的评价，为决策提供尽量可靠的依据。

## 二、指标的估价方法及其置信度

一般来说，决策所需的指标不外下列情况：

（1）容易准确定量计算，如投资等；

（2）可以定量分析、但很难准确计算，只能得到一个区间（一般的或模糊的）估计，如一些间接的社会效益；

（3）只能定性分析，如一些社会影响，生态环境影响等。

在评价中，对于第1类指标尽可能定量计算，对于第2类指标和第3类指标则需要进行粗略估算和专家定性分析，分等级半定量描述。但是这种评价不仅包含着许多不确定性、随机性、模糊性，而且涉及到心理因素。即使是同一评价者，在不同时间对同一对象的评价也可能会给出不同的结果，不同的评价者其结果可能差异更大。而且评价中有些估算往往只能得到一个大致的范围。有些评价者常用“大约是多少”，“在多少到多少之间”，甚至用“差不多”，“比较可靠”等方式表达他们的估计。为了处理这种不确定的模糊的评价，我们利用集值统计的原理进行如下讨论。

集值统计是经典统计和模糊统计的一种拓广。经典统计在每次试验中得到相空间中的一个确定点，而集值统计每次试验中得到的不是一点，而是相空间中的一个（普通的或模糊的）子集。这个子集相当于一个评价者对某一指标$c$的一个区间估计，即对于可以概算的指标为一个概算范围，对于定性分析指标则为一种估价的等级区间（如将一指标的优劣程度分为5个等级，让评价者在轴的5个级上打10次，10次结果可能不会落在一点，但总会稳定在一个区间范围内），记为$[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}]$，$k$表示第$k$个评价者。若有$n$个评价者，便可得到$n$个区间值，从而形成一个集值统计序列：

$$[u_1^{(1)}, u_2^{(1)}], [u_1^{(2)}, u_2^{(2)}], \cdots, [u_1^{(n)}, u_2^{(n)}]$$

这$n$个子集叠加在一起则形成覆盖在评价值轴上的一种分布（图6-1-1）。

这种分布可用下式描述：

$$\overline{X}(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}]}(u) \qquad (6\text{-}1\text{-}1)$$



图 6-1-1 评价值的分布

式中： $\chi_{[u_1^{(k)}, u_2^{(k)}]}(u) = \begin{cases} 1 & u_1^{(k)} \leqslant u \leqslant u_2^{(k)} \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$\overline{X}(u)$被称为样本落影函数。那么指标$c$的估价值便可由下式获得：

$$\bar{u} = \int_{u_{min}}^{u_{max}} u \cdot \overline{X}(u) du \Big/ \int_{u_{min}}^{u_{max}} \overline{X}(u) du \qquad (6\text{-}1\text{-}2)$$

其中$u_{max}$和$u_{min}$分别为指标$c$可能取得的最高、最低值。可以证明：

$$\int_{u_{min}}^{u_{max}} \overline{X}(u)dv = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [u_2^{(k)} - u_1^{(k)}] \tag{6-1-3}$$

$$\int_{u_{min}}^{u_{max}} u \cdot \overline{X}(u)du = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} [(u_2^{(k)})^2 - (u_1^{(k)})^2] \tag{6-1-4}$$

则有：

$$\overline{u} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[(u_2^{(k)})^2 - (u_1^{(k)})^2] \Big/ \sum_{k=1}^{n}[u_2^{(k)} - u_1^{(k)}] \tag{6-1-5}$$

当指标可以准确定量计算时，对所有$k$，$u_1^{(k)} = u_2^{(k)} = e$（某一常数）。根据(6-1-1)式定义，$\overline{X}(u)$为

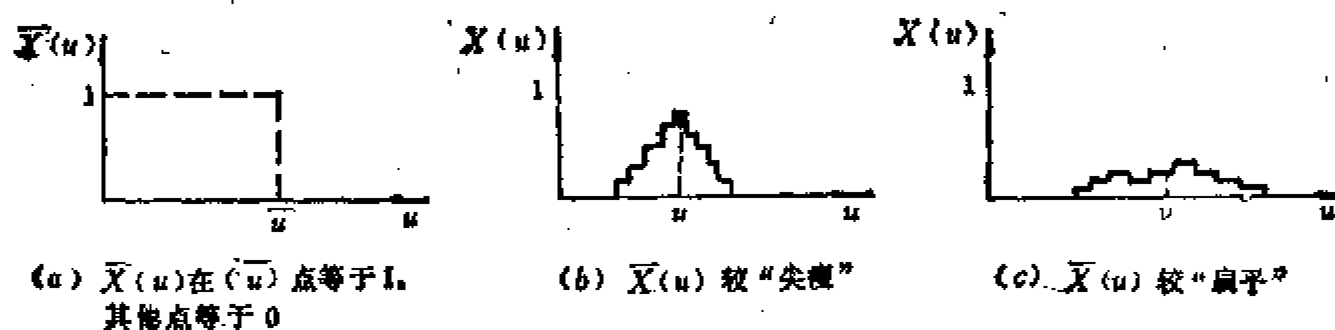
$$\overline{X}(u) = \begin{cases} 1, & 当u = e时 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

指标的估价值$\overline{u} = e$。

这种处理方法不仅可以处理不确切的评价，而且很方便地集中了多种不同意见，减少了评价中的随机误差。更重要的是，它可以充分地利用评价过程中的信息。除获得$\overline{u}$外，还可以通过分析$\overline{X}(u)$获得评价者对指标的把握程度。

（1）当指标可以准确定量计算时，$\overline{X}(u)$除在$\overline{u} = e$点等于1外，其他点为0，见图6-1-2($a$)。这说明评价者对指标取值完全有把握。

（2）对于难以准确定量计算的指标，当$n$个估价区间的分布比较集中时，则说明评价者对指标的把握程度较高。此时，$\overline{X}(u)$的形状比较"尖瘦"，见图6-1-2($b$)。




($a$) $\overline{X}(u)$在($\overline{u}$)点等于1，其他点等于0　　($b$) $\overline{X}(u)$较"尖瘦"　　($c$) $\overline{X}(u)$较"扁平"

图 6-1-2　$\overline{X}(u)$不同情况下的分布

（3）当$n$种估价区间很不集中时，则说明评价者对指标的把握程度较小。此时$\overline{X}(u)$的形状比较扁平，（见图6-1-2($c$)）。

以上分析表明，$n$种估价区间分布的集中程度，即$\overline{X}(u)$形状的"胖瘦"，反映了评价者对指标的把握程度。完全有把握，意见一致，评价值非常集中。把握不大，意见就不一致，评价值就比较分散。于是根据$\overline{X}(u)$，我们可以分析难以准确定量计算指标评价值的可靠程度。

定义：

$$\mathscr{G}=\int_{u_{min}}^{u_{max}}(u-\overline{u})^2\cdot\overline{X}(u)du\bigg/\int_{u_{min}}^{u_{max}}\overline{X}(u)du \qquad (6\text{-}1\text{-}6)$$

可以证明：

$$\int_{u_{min}}^{u_{max}}(u-\overline{u})^2\cdot\overline{X}(u)du=\frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n}\left[(u_2^{(k)}-\overline{u})^3-(u_1^{(k)}-\overline{u})^3\right] \qquad (6\text{-}1\text{-}7)$$

由（6-1-3），（6-1-7）式得：

$$\mathscr{G}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[(u_2^{(k)}-\overline{u})^3-(u_1^{(k)}-\overline{u})^3\right]\bigg/\sum_{k=1}^{n}\left[u_2^{(k)}-u_1^{(k)}\right] \qquad (6\text{-}1\text{-}8)$$

由$\mathscr{G}$的定义可知，$\mathscr{G}$越大，评价者对指标的把握程度越小，指标评价值的可靠程度也就越低。故有定义1：指标$c_i$的置信程度$b_{di}$为指标评价值可靠程度的一种度量。

$$b_{di}=\frac{1}{1+\mathscr{G}_i} \qquad i=1,2,\cdots,n_c \qquad (6\text{-}1\text{-}9)$$

$n_c$为指标个数。

指标评价值可靠程度越大，指标置信度越高。

## 三、指　标　的　权

各指标在决策中的地位是不同的，其差异主要表现在三个方面：（1）决策者对各指标的重视程度不同；（2）各指标在决策中的作用不同，即各指标在决策中传输给决策者的信息量不同；（3）各指标评价值的可靠程度不同。所以在多指标决策中往往都需要给各指标赋一权值描述这些差异。这一权值应象其描述的内容一样，既能反映主观的一面，又能反映客观的一面。因此，我们认为，指标$c_i$的权$w_i$，是指在给定的决策条件下度量指标相对重要程度的量。它不仅与决策者对指标重要性的主观评价有关，而且与可行方案集通过指标传输给决策者的信息量和指标评价值的可靠程度有关。若用$w_{i1}$，$w_{i2}$，$w_{i3}$分别表示这三方面的权，则有

$$w_i=f(w_{i_1},\ w_{i_2},\ w_{i_3}) \qquad i=1,2,\cdots,n_c \qquad (6\text{-}1\text{-}10)$$

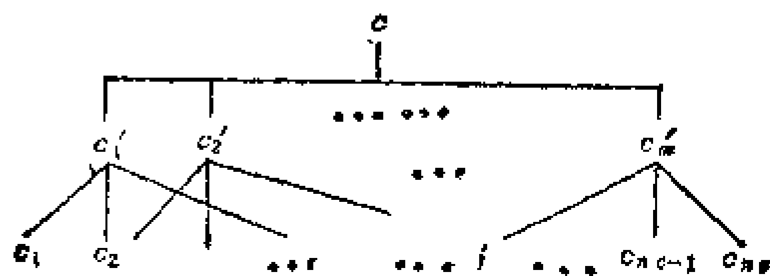



图 6-1-3　决策指标多级层次

（1）$w_{i1}$由决策者事先给定，它反映了决策者的知识结构才能和心理以及社会、环境背景等。然而要决策者直接给某指标一个权值，比较困难，特别是在指标较多（如10个以上）的情况下。但是，如果让决策者两两比较指标的相对重要性却比较容易。故$w_{i1}$可按如下步骤计算。

设指标层次如下（见图6-1-3）：

图中$c'_j$，$j=1,2,\cdots,m'$为决策的主指标；$c_i$，$i=1,2,\cdots,n_c$为与主指标相关联的各子（或次）指标（指标不分主次也不影响讨论的普遍性）。

第一步，对各层指标构造判断矩阵$TM=\{t_m(k,l)\}$。$t_m(k,l)$表示对上层某元素来说，下层与它相关的第$k$和第$l$指标的相对重要程度。$TM$矩阵具有性质：$t_m(k,k)=1,t_m(k,l)=t_m(l,k)^{-1}$。$t_m(k,l)$按指标$c_k$和$c_l$的相对重要程度的级别由小到大分别取1，3,5,7，9。介

于这些级别之间的取2,4,6,8。

第二步，检验判断矩阵的一致性（一致性指决策者前后判断时价值观念上和逻辑上的连惯性）。

第三步，求解判断矩阵的最大特征值$\lambda_{max}$及对应于$\lambda_{max}$的特征向量$W$，$W$的分量即为对应指标的权。子指标$c_i$的权为：

$$w_{i1}=\sum_{j=1}^{m}w_j'\cdot w_{ji} \quad (6\text{-}1\text{-}11)$$

式中：$w_j'$为主指标$c_j'$的权；$w_{ji}$为联系于$c_j'$指标的子指标$c_i$的对于$c_j'$的相对权（$w_{ji}$的详细计算方法参见AHP方法）。

（2）$w_{i2}$反映了在确定的决策条件下(已有的可行方案集)，各指标传输给决策者的信息量大小。$w_{i2}$对方案集和方案评价结果比较敏感。

设可行方案集中共有$n_a$个方案，评价指标为$n_c$个。则对$n_a$个方案从$n_c$个指标方面进行评价得到的评价矩阵为$E=\{e(i,\ j)\}$。$e(i,\ j)$意即第$j$方案第$i$指标的评价值。于是，对于给定的$i$、$e(i,\ j)$、$j=1,2\cdots,\ n_a$的差异越大，不同方案间指标值的相对强度越大，指标对方案的比较作用越大，也就是说它包含和传输的决策信息越多。熵(entropy)可被用来度量这种信息量大小。定义

$$E_i=\sum_{j=1}^{n_a}e(i,j) \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_c \quad (6\text{-}1\text{-}12)$$

那么指标值相对强度的熵度量是

$$e(c_i)=-K\sum_{j=1}^{n_a}\frac{e(i,\ j)}{E_i}\ln\frac{e(i,\ j)}{E_i} \quad (6\text{-}1\text{-}13)$$

其中$K>0$，ln为自然对数。并且有$e(c_i)\geqslant 0$。

如果$e(i,\ j)$对于给定的$i$全部相等，那么，$e(i,\ j)/E_i=1/n_a$，此时$e(c_i)$取其最大值，即$e_{max}=K\cdot\ln n_a$。若设$K=1/n_a$，于是有$0\leqslant e(c_i)\leqslant 1$。再定义评价矩阵的总熵为：

$$E'=\sum_{i=1}^{n_c}e(c_i) \quad (6\text{-}1\text{-}14)$$

由（6-1-13）式可知，对于给定的$i$、$e(i,\ j)$、$j=1,\ \cdots,\ n_a$的差异越小，则$e(c_i)$越大，当全部相等时，$e(c_i)=e_{max}=1$。此时，对于方案的比较，指标$c_i$毫无作用，可以在进一步决策中删除。而当各方案的评价值相差越大时，指标对于方案的比较作用越大，即指标传输的决策信息越大，权$w_{i_2}$应该越大。因此，$w_{i_2}$与熵$e(c_i)$成反比关系。考虑到归一化，我们定义

$$w_{i_2}=\frac{1}{n_c-E'}[1-e(c_i)] \qquad i=1,2,\cdots,n_c \quad (6\text{-}1\text{-}15)$$

（3）$w_{i_3}$反映了指标评价值的客观程度与可靠程度。可靠程度越高，$w_{i_3}$应该越大。由定义1可知，指标的置信度越高，指标的评价值的可靠程度越高。因此，根据(6-1-9)式，考虑到归一化，我们定义

$$w_{i_3}=b_{c_i}\Big/\sum_{i=1}^{n_c}b_{c_i},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_c \quad (6\text{-}1\text{-}16)$$

一般来说，$w_{i_1}$，$w_{i_2}$，$w_{i_3}$三部分平行地决定一个指标的相对重要程度。虽然(6-1-

10)式中的函数$f$可取不同的形式，但它必须具有如下特性，即三者中任一个等于零，即使其他两个等于1，也不能说该指标非常重要。只有当三者都取其最大值时，$w_i$才最大。所以，这里我们定义指标$c_i$的总权为：

$$w_i = \frac{w_{i_1} \cdot w_{i_2} \cdot w_{i_3}}{\sum_{i=1}^{n_c} w_{i_1} \cdot w_{i_2} \cdot w_{i_3}} \qquad i=1,2,\cdots n_o \qquad (6\text{-}1\text{-}17)$$

## 四、结　　语

社会经济系统中决策指标值的估价和指标的确定是多指标决策的基础。以上讨论的指标值估价方法和指标权的定义和算法，概念明确，简便易用。在实际应用中显示了其灵活性和合理性。

# §6-2　社会技术经济系统中的专家系统——知识库[98]

1984年，郑维敏利用模糊集理论、可能性理论、系统理论、知识工程在社会技术经济系统中建立多种专家系统，称为“知识库”或“软数据库”，开展有关难以定量的、知识/经验、近似推理和估计的研究，开展人工智能控制研究，是有现实意义的，它展示了一个值得研究和开发的领域。

## 一、问 题 的 提 出

1.社会技术经济系统

在经济建设中，人们利用各种技术和科学管理方法去改造客观世界，以获得经济效益、社会效益和环境效益。从系统工程的观点，这是社会技术经济系统。在现代化社会中，社会技术经济系统涉及范围广泛、影响深远，需要全面综合考虑。例如，一个大型工程项目的规划或设计，除了考虑经济方面的成本和效益外，还应分析环境影响和社会效益。在评价各个规划方案时，方案的某些性能或效益可以根据一定的程序、规程或数学模型做定量的计算和分析。但是有些效益却是难以计算的，例如环境污染对生态平衡的影响，环境对人们健康和工作效率的影响；又如工程对政治、社会的影响；这些复杂问题还难以用数学模型定量计算。要分析这些效益，只能去收集有关的科学规律和资料，听取有关人员的意见和专家们的近似推理和判断。当综合权衡各方面的效益作出决策时，决策者和专家们对全局的考虑，对风险的态度。以及高瞻远瞩的胆略尤为重要。总之，除了利用数学模型和科学计算外，还要根据人们的知识和经验来评价各方面的效益。同时，我们还可以说，所有的信息-决策系统都是这样的，我们应该从数学模型和科学计算中提取信息，也要从知识和经验中提取信息，二者缺一不可。

2.数学规划

利用数学模型进行计算分析是数学规划的特点，例如常用的线性规划，其数学模型是：

$$\max U = \max_X C^T X$$

$$\text{s·t}\ AX \leqslant b,\ \ X \geqslant 0$$

其中：$U$是总效益，$X$是决策变量，$b$是约束量(例如各种资源限制)，$A$、$C$是模型参数。这是一个数学求优化解的问题。然而，在规划阶段，有许多不确定因素(随机性的，模糊性的)。模型参数常常是根据资料分析及经验近似地确定的。社会是人造的，数学模型的约束条件也不是不能改变的。例如投资额、建设劳力和周期的限制，都是决策者可以根据全局考虑而加以调整的。这些都离不开知识和经验。参数估计过程和约束的调整过程，分别如图6-2-1，6-2-2所示。

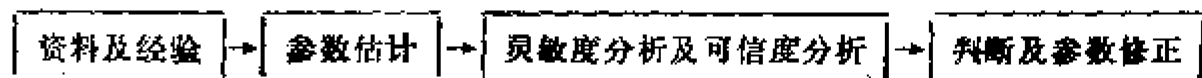



图 6-2-1 参数估计过程

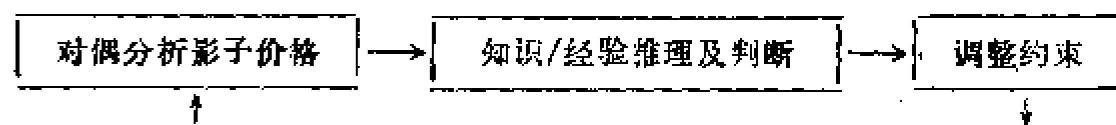



图 6-2-2 约束的调整过程

总之，虽然线性规划，灵敏度分析和对偶分析都已有现成的计算机程序，但是，只有在数学模型提供的信息与知识和(或)经验提供的信息的基础上，相互参照才能得出满意而又具有一定可信度的优化解。

3.控制系统

线性系统理论及其算法早已比较完善和成熟，但是，线性系统模型只是客观世界的近似描述，其参数也是大致的，故根据线性控制理论所设计的控制器或控制作用，也是近似的。因此，在系统投入运行时，常常需要根据过程的行为、定性的规律性分析和经验，对控制器参数进行较大的调整。调整过程见图6-2-3所示。“对于复杂的、非线性、时变系统，应用模糊控制系统理论，设计自适应、自组织、自寻优的模糊控制器。把人们的知识和经验总结成各种规则的控制策略，对复杂系统进行控制取得了满意的良好效果”。

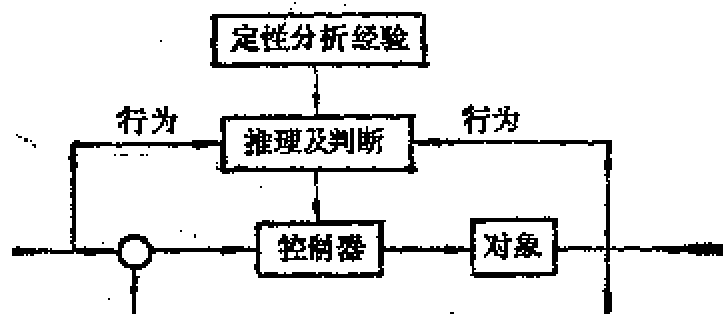



图 6-2-3 控制器参数的调整过程

4.离散性

为什么定性分析和粗略的推断也能给出正确而又满意的答案呢？

在进行总体方案比较时，各方案的内容一定是有显著差异的，各方案的各项性能指标也必然有一些是显著不同的，定性分析具有方向性或类别上的差异，粗略的估计具有等级上的差别。概括地说，它们具有离散性，与某些计算分析的连续性是不同的，这种离散性带来了分析的鲁棒性(粗鲁、壮实的意思)。举例如下：有三个方案，它们的两项性能指标$u_1$及$u_2$如图6-2-4所示，方案(1)的$u_1$大$u_2$小，方案(2)的$u_1$小$u_2$大，方案(3)居中。方案的选择，取决于对两项性能指标的权衡，即取决于总效益函数

$$U = c_1u_1 + c_2u_2, c_1 + c_2 = 1,$$

其中$c_1$及$c_2$是权衡系数。若方案(3)是最优方案，则从图6-2-4可见，直线$U$的斜率可以在相当大的范围内变化(即$c_1$及$c_2$在一定范围内变化)而不影响方案(3)是最优解的结论。这种性质称之为鲁棒性。也就是说，对于权系数只要粗略的设置就可以了。

众所周知，线性规划的最优可行解是多面体的一个顶点，如图6-2-5所示，它具有离散

性，从而也具有鲁棒性。

基于上述1～4的观察，认为在社会技术经济系统、数学规划、控制系统等领域中，即信息-决策/控制系统中，开展有关知识/经验、近似推理和估计的研究是有实际意义的，同时也是现实的。

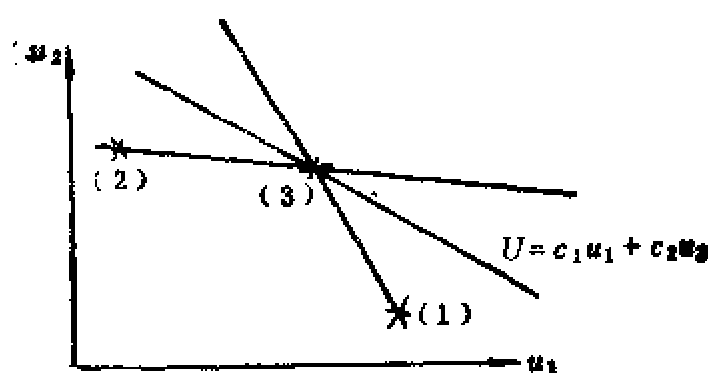



图 6-2-4 方案选择最优解

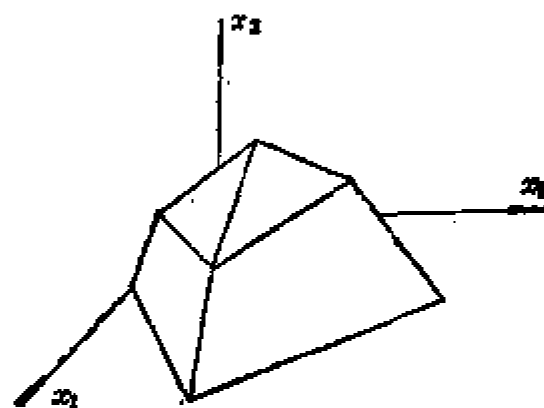


图 6-2-5 线性规划最优可行解

## 二、数据库和知识库

建立数学模型时，我们把数学模型和数据输入计算机进行严格计算的这一部分，称为"数据库"。那些难以定量的部分，需要根据知识/经验和专家们定性分析、近似推理的这一部分，是一种专家系统，我们称它为"知识库"。

必须强调，在当代计算机广为应用的社会里，对一类问题在计算机里建立相应的数据库，已有较多的实践经验和方法。为了利用知识和经验，出现了加强人机联系的人-机对话系统。为了使人-机对话系统更加完备，对应于某一类问题，在计算机里建立相应的知识库，显然可以更有效地解决复杂的决策和控制问题。数据库的特点是精细和严格的，知识库的特点是粗糙和近似的。因此，如果把前者叫做"硬数据库"，那么，后者就是"软数据库"了。

总之，强调知识库，不只是想说明如何利用知识和经验，而是要在计算机里建立知识库，使知识库与数据库相互作用，以给出满意的结果，见图6-2-6。可见，知识库的研究对于计算机的充分利用和新型计算机的开发研究，也是有益的。

1.知识库的描述和结构

对于事物或系统的描述开始于一般的叙述。为了建立知识库，必须把语言性的叙述形式化。叙述中的事物和关联或因果关系都是粗线条的，与集合理论的水平相当，因此，可以采用集合论的描述方法表示如下：

$$S\subset V_1\times\cdots\times V_m,\ 或S\subset\times\{V_i,\ i\in I\}$$

它表示系统$S$的各个组成部分$V_1\cdots V_m$按一定的关系组合在一起。对于关联的两大部分$X$和$Y$则可以表示为：

$$S\subset X\times Y$$

在信息不充分的情况下，有许多不确定因素，只靠因果关系难以建立数学模型，因此，只能是粗糙的描述。对于无规则的随机现象，要用宏观的描述。对于有组织的复杂系统，例如计算机，如果按电路或逻辑级的水平去理解，是不可能的。如果按功能块去理解就比较容易了。对于大系统，由于因素太多必须进行简化，简化的方法可以按性能相近或功能相近分为几种类别。总之，$S$中的各组成部分$\{V_i\}$本身也是集合，称为子集。子集中包含

性能或功能邻近的元素，子集也是一个子系统，即

$$U_i \subset u_1 \times \cdots \times u_m$$

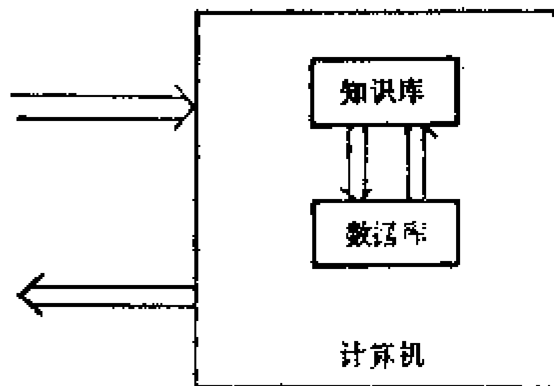



图 6-2-6 知识库与数据库的相互作用

| | $V_1$ | $V_2$ | • • • | $V_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $V_1$ | 1 | 0 | • | 1 |
| $V_2$ | 1 | 1 | • | 0 |
| • • • | • | • | • • • • | • |
| $V_n$ | 0 | 1 | • | 1 |

图 6-2-7 各子集的从属关系

各组成部分或子集间的关系可以是"有无"的定性关系，也可以是具有一定数量的等级关系或其他更为复杂的关系，例如条件关系。各子集$V_i$间的有无从属关系是一种最简单的情况，可以用表格表示，见图6-2-7，其中"1"表示有，"0"表示无。表格就是矩阵。各元素$V_i$间的定性的从属关系除了用表格或矩阵表示外，还可以用有向图表示，如图6-2-8所示。它是一种定性的结构关系，应该尽量简明。从图6-2-8可知，右图比左图简明，而且也完全表明了从属的可达关系。与左图相应的矩阵叫可达矩阵$D$，与右图相应的矩阵叫相邻矩阵$L$（更确切地说是相邻矩阵加单位矩阵）。它们有如下关系：

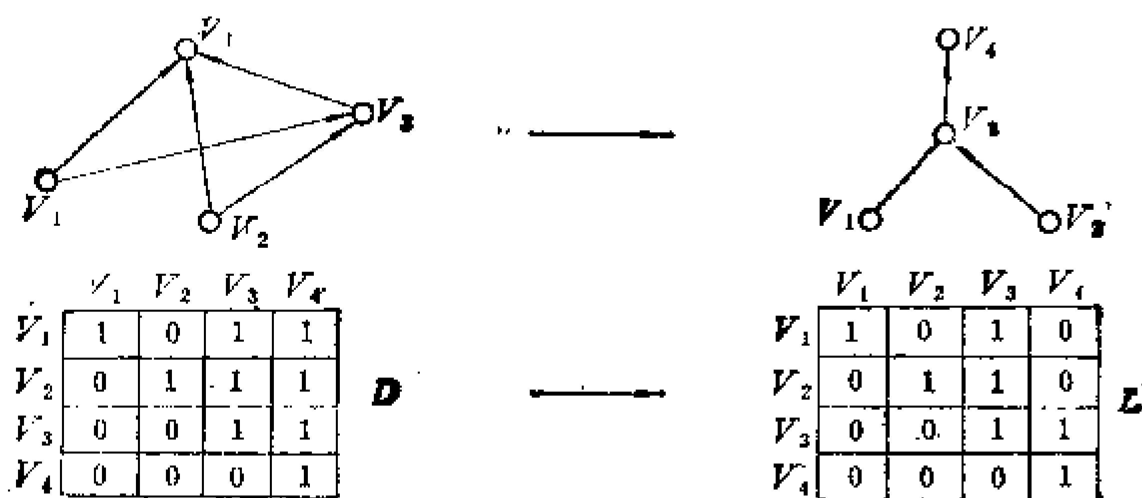



图 6-2-8 各元素定性的有向图

$$L^r = D, \quad r \leqslant n$$

这是因为$[L^r]_{ij}$从$i$到$j$，$r$步可达，必然有一个$k$，从$i$到$k$，（$r-1$）步可达，从$k$到$j$一步可达，即

$$[L^r]_{ij} = \sum_k [L^{r-1}]_{ik}[L]_{kj}$$

可达矩阵$D$可以在语言叙述的基础上建立起来，然后再求定相邻矩阵$L$，以确定最简明结构。

若存在大、中、小的等级关系，则以$L$、$M$、$S$分别表示大、中、小。另外，$V_i$也可以是一个子系统由$\{u_j\}$，$j=1, \cdots, m$各部分组成。因此，知识库的结构呈多层矩阵的形式。定性关系的有无，定量的等级关系，都是语言描述。因此，有、无及大、中、小都是语言变量的取值。语言变量还可以等于高低、好坏、亮暗等等，它们都具有模糊的特征。知识的表达是一个重要的，也是比较困难的问题。看来，采用集合，语言变量和多层矩阵

是表达知识库的一种可能的途径。

2.近似估计和推理

知识库的特点是粗糙和近似的。即使是一个子集也包含许多元素，子集是性能或功能相近的元素的集合。邻近程度需要有一个测度，例如模糊集的隶属度$\mu_A(x)$，或可能性测度$P_A(x)$，或概率测度$P(x)$，或一般系统理论中性能空间距离$d_A(x', x)$。

有了测度后，就可以用测度作为判断的依据。例如从不同的角度(子集)$A_1$和$A_2$去估计参数或元素$u_j$，若已知隶属度$\mu_{A_1}(u_j)$和$\mu_{A_2}(u_j)$，则可以按下述原则推断：

$$\sup_{u_j} \mu_{A_1}(u_j) \wedge \mu_{A_2}(u_j)$$

它的意义是在两个子集中取交，在交集中按隶属度"小中取大"，取大就是选可能性最大的参数或元素。这个原则，实质上是一种折衷。折衷的方法还可以是加权平均取大，相乘取大，即

$$\max_{u_j}[c_1\mu_{A_1}(u_j) + c_2\mu_{A_2}(u_j)]$$

$$\max_{u_j}\mu_{A_1}(u_j) \cdot \mu_{A_2}(u_j)$$

其中$c_1$及$c_2$是加权系数。

近似推理的简单例子有：

$$x_1 = \text{小}, \ (x_1, \ x_2) = \text{近似相等}$$

解上述方程得到：

$$x_2 = (\text{近似相等}) \circ x_1 = \text{邻近小}。$$

把上述推测形式化，$(x_1, x_2)$近似相等是一种关系$R$，已知$x_1$可以根据$R$近似地推知$x_2$，即

$$x_2 = R \circ x_1$$

其中"$\circ$"表示合成推理运算。$x_1$及$x_2$都是语言变量，都表示了一个子集或邻域。较复杂的推理法则，也呈上述形式，列举几种如下：

$R$: If $x$ is $x_1$ then $y$ is $y_1$, or
If $x$ is $x_2$ then $y$ is $y_2$, or
………………。

则有

$$y = R \circ x$$

又如

$R_p$: If $x$ is $x_1$ then under probability $p_1$, $y$ is $y_1$, or
If $x$ is $x_2$ then under probability $p_2$, $y$ is $y_2$ or
………………。

则有

$$y_p = R_p \circ x$$

其中，under probability $p_1$——在概率$p_1$下。

又如：

$R$: If $x$ is $x_1$ and $y$ is $y_1$ then $c$ is $c_{11}$, or

If $x$ is $x_1$ and $y$ is $y_2$ then $c$ is $c_{12}$, or

………………

If $x$ is $x_2$ and $y$ is $y_1$ then $c$ is $c_{21}$, or

………………

则有：

$$c = R \circ (x \times y)$$

3.粗与精

从以上可知，为了建立知识库，需要形式化。实质上，形式化后也就是一种数学模型，但它与数据库的数学模型不同，有粗与精的区别。一般地说，数学有精确的含义，而知识是定性的或粗略的。因此分别采用了“知识库”和“数据库”的名称。

粗模型与精模型是相辅相成、密切相关的。例如，一个大型计算机的设计必须先有表示功能和关联的方块图，这就是粗模型。然后，在方块图的指导下去完成逻辑和电路设计，这是精模型。后者又反过来补充或修正功能方块图。复杂控制系统的设计，社会经济系统的规划与设计，大型工程系统的规划与设计，管理系统和生态系统的控制，也都是这样的。知识库和数据库表示了事物的两个方面。

## 三、实例仿真研究

在控制系统中，最通常的是PI控制器（比例-积分控制器）。设计控制器时，被控对象的数学模型是近似的，参数也是近似的，而且可能是变化的。按控制理论设计的PI控制器的参数，在系统投入运行时往往需要进行较大的调整。调整是根据定性规律以及经验和系统的输入-输出特性确定的。PI参数的调整可以由知识库实现，原理图如图6-2-9所示。知识库包括了由定性规律和经验所确定的矩阵$c$，本例中共有两个。知识库中的近似推理和估计按下列两式进行：

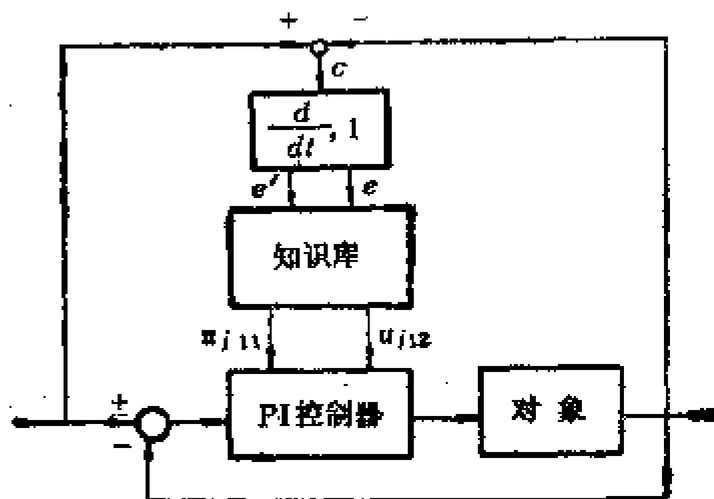



图 6-2-9 PI参数的调整

$$c_{ji} = [P(A_1(e))_j \cdots P(A_p(e))_j] \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(B_1(e'))_L \\ \vdots \\ P(B_r(e'))_L \end{bmatrix}$$

$$U_{ji} = f(c_{ji})$$

其中$P(\cdot)$是可能性测度，矩阵$C$的$pr$元是子集$C_{pr}$，通过模糊逻辑的矩阵运算得到推理结果$C_{ji}$，然后得到近似估计$U_{ji}$，它将产生调整作用。计算机仿真实验表明，具有知识库的控制器是可行的，其结果是令人满意的，详见文献：[Cheng Weimin, et al., Model Referen Fuzzy Adaptive Control, IFAC'84, Pergamon Press.]

## 四、结　　语

知识库涉及到的方面有：知识工程（人工智能工程“Art of Artificial Intelli-

genee”）；可能性理论（Possibility Theory）；一般系统理论等。我们简要地介绍了专家系统-知识库的框架和一个实例研究。只是想强调在信息-决策/控制系统中，这是一个待开发的领域。结合实际建立知识库是现实可行的。

## §6-3 动态模式经济控制论模型[99]

1985年，王浣尘介绍了动态模式经济控制论模型原理，提出DYPECM模型是结合我国国情，充分反映一系列社会经济活动动态滞后而开发的一种社会经济模型。它是以离散形式状态空间表示的一种经济控制论模型。DYPECM模型可用于宏观，也可用于微观一些的场合，也可用于宏观、微观结合的场合。DYPECM模型对于以计划经济为主、市场调节为辅的我国是有实际意义的。

### 一、前　言

在讨论社会经济问题的时候，需要充分考虑到各种因素的动态滞后效应，诸如项目的多年逐步投资，固定资产的形成，逐年折旧，生产能力的形成，人才的培养和需求，人财物平衡等一系列的滞后和动态过程。动态滞后和动态过程是客观存在的必然现象。

动态模式经济控制论模型，简称为DYPECM（Dynamic Pattern Economic Cybernetics Model）。DYPECM模型同目前流行的几种宏观经济模型比较起来，既有一定的特点，又有一定的联系，如静态或动态投入产出，计量经济模型，系统动力学模型及经典形式的经济控制论模型等。从本质来说，DYPECM模型是以离散形式表示的状态空间模型。它可用宏观，也可用于微观一些的场合，也可用于宏观，微观结合的场合。近年来在新疆宏观社会-经济规划和决策中初步试用，取得较好的效果。因此，DYPECM模型对于“以计划经济为主、市场调节为辅”，“社会主义商品经济”的我国是有实际意义的。

### 二、模型的基本形式

DYPECM模型的基本形式有七个部分，即着重项目、关心因素、动态模式方程、各关心因素的组合、各关心因素间的关联、系数动态方程以及决策环节等。

1.着重项目

“着重项目”可简称为“项目”，指的是模型中所着重研究的部门，或产品、或重点工程，或它们的组合，共$J$个，其序号$j=1, 2, \cdots, J$。如果全面完整一些，可以包括农、工、建、运、商中的各行各业，那末它们可以等同于投入产出表中的基本项。如只着重于讨论一部分的项目，那就可以不必取全，例如可取棉纺、毛纺、糖、盐、皮革、采煤、焦炭、原油、加工油、水电、钢铁、化肥、水泥等着重的一些项目。关于项目划分的基本原则是“互不重叠”，即$(\text{项目})_j \cap (\text{项目})_k=\phi$，当$j \neq k$。若有重迭部分，则应进一步划分互不重迭的子项目，或在合计的时候扣除其重复部分。

2.关心因素

共$I$个，$X_{ij}$，$i=1, 2, \cdots, I$；$j$对应于第$j$个项目。“关心因素”简称为“因素”，指的是模型中所关心的变量，通常包括：

1）决策变量

它反映各项目要求新增的规模，例如棉纺业规模以多少万锭来表征，煤矿以年产多少万吨的能力来表征，电力以多少万千瓦机组容量来表征等。符号$u_j(t)$，表示第$j$项目在第$t$年末之前作出的决策，而在第$t+1$年开始要投资的新增规模。所谓"新增规模"可以是新建、扩建，也可以是"挖、革、改"的成果。

2）累计规模

它反映项目建成投入运行规模的现实累计值。它的计量单位同决策变量的一样。符号$u_{nj}(t)$表示第$j$种项目在第$t$年末统计的已投入运行的累计规模。

3）产量或能力

它反映各项目历年所能提供的产品产量，或用它的额定产量来表示。当一个项目有多种产品时，可选择其中一种或几种典型产品作"代表产品"。例如棉纺业的典型产品为棉布（亿米/年）或/和棉纱（万吨/年），电力的典型产品为电量（亿度/年）等。符号$X_{pkj}(t)$，表示在第$t$年内第$j$种项目第$k$种产品的全年产量。

4）人力需求

它反映各项目所需的职工或劳动力总数，同时按需要也能反映各级专业人才的数量。符号$X_{kj}(t)$表示第$t$年末统计的第$j$种项目所占有第$k$种人力资源，比如职工总数（万人），职工总数中的中级以上人才（人）等。

5）财力需求

它反映各项目有关资产、财务等方面的量值。符号$X_{kj}(t)$表示在第$t$年末统计第$j$种项目有关于第$k$种因素的量值，比如不同的$k$可分别表示总产值、净产值、税利、财政收入支出、固定资产原值，累计固定资产、固定资产折旧、固定资产净值，流动资金占有额、剩余额等。

6）物力需求

它反映各项目所需物质的量值，其中能源和"三材"为最主要的物质。如果关心的资源种类能同模型中所着重的项目一一对应起来，那末这就同投入产出表接近了起来。符号$X_{kj}(t)$表示在第$t$年末统计第$j$种项目有关于第$k$种因素的量值，比如不同的$k$可分别表示原油、成品油、原煤、焦炭、电力、钢材、水泥、木材等。

如果把$u_{nj}$、$X_{pkj}$，$X_{kj}$等改用$X_{ij}$，$i\in I$，统一编号，可统称为关心因素，总共就有$I$个因素。至于$u_j$为决策变量，也可算作关心因素之一，不过它具有特殊性，一般可单独来处理。

3.动态模式方程

1）动态模式

这里的"动态模式"指的是模型中有关变量动态过程的基本时间序列，用向量符号$\underline{P}\triangleq[p_1, p_2, \cdots, p_m]^T$表示。例如棉纺业项目的投资过程及其生产能力形成过程，如表6-3-1所示。

于是，投资增量的动态模式为$p_1=0.2$，$p_2=0.5$，$p_3=0.3$；生产能力增量的动态模式为：$p_1=p_2=p_3=0$，$p_4=0.7$，$p_5=0.2$，$p_6=0.1$。

2）动态模式方程的基本形式（基型）

设系统中项目共有$J$个，关心因素共有$I$个。第$j$项目第$i$关心因素的动态模式方程为：

投资过程及生产能力形成过程举例　　　　表 6-3-1

| 时　间　(年) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ≥7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 投资增量比重(投资总额为1) | / | 0.2 | 0.5 | 0.3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 生产能力增量比重(能力总额为1) | / | 0 | 0 | 0 | 0.7 | 0.2 | 0.1 | 0 |
| 备　注 | 决策年 | 开始投资年 | | | 开始投产年 | | | |

$$\begin{cases} \underline{Z}_{ij}(t+1)=Q_{ij}(t)\underline{Z}_{ij}(t)+P_{ij}(t)W_{ij}(t)\underline{u}_j(t)+\underline{d}_{ij}(t), \\ \qquad\qquad t=0,\ 1,\ \cdots,\ T-1 & (6\text{-}3\text{-}1) \\ X_{ij}(t)=\underline{C}_1^T\underline{Z}_{ij}(t), \qquad t=0,\ 1,\ \cdots,\ T. & (6\text{-}3\text{-}2) \\ \underline{Z}_{ij}(0)=Z_{ij,0} & (6\text{-}3\text{-}3) \end{cases}$$

式（6-3-1）为过渡方程，式（6-3-2）为读出方程，式（6-3-3）为初始条件。式中角注$t$为转置记号，大写$T$为时间$t$的研究区间上限；$\underline{Z}_{ij}(t)\triangleq[Z_{ij}(t),\ Z_{ij}(t+1)\cdots Z_{ij}(t+m_{ij}-1)]^T$为$t$时刻观测（或读出）的$m_{ij}$维过渡状态向量，其中$Z_{ij}(t)$为在$t$时刻观测的"$Z_{ij}$在$t$时刻的量值"，而$Z_{ij}(t+k)$，$k=1,\ 2,\ \cdots(m_{ij}-1)$，为在$t$时刻观测的"$Z_{ij}$在$t+k$时刻上的预置值"；$X_{ij}(t)$为关心因素在$t$时刻上的量值；$\underline{u}_j(t)\triangleq[u_{1j},\ u_{2j},\ \cdots,\ u_{v_j,j}]^T$为控制向量，可由决策变量组成，在大多数情况下向量$\underline{u}_j(t)$退化为标量$u_j(t)$；$\underline{d}_{ij}(t)\triangleq[d_{ij,1}(t),\ d_{ij,2}(t),\ \cdots d_{ij,m_{ij}}(t)]^T$为$\underline{Z}_{ij}(t)$的截距向量，可作为关联耦合控制向量使用；

$$P_{ij}(t)\triangleq\begin{bmatrix} P_{ij,11}(t) & P_{ij,12}(t) & \cdots & P_{ij,1v_j}(t) \\ P_{ij,21}(t) & P_{ij,22}(t) & \cdots & P_{ij,2v_j}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{ij,m_{ij}1}(t) & P_{ij,m_{ij}2}(t) & \cdots & P_{ij,m_{ij}v_j}(t) \end{bmatrix}$$

为外显模式矩阵，它由$V_j$个模式向量$\underline{P}_{ij,1}(t)$，$\underline{P}_{ij,2}(t)$，$\cdots$，$\underline{P}_{ij,v_j}(t)$组成，其中$\underline{P}_{ij,k}(t)\triangleq[P_{ij,1k}(t),\ P_{ij,2k}(t),\ \cdots P_{ij,m_{ij}k}(t)]^T$；在大多数情况下，对应于标量$u_j(t)$，矩阵$\underline{P}_{ij}(t)$退化为向量$\underline{P}_{ij}(t)$；

$$Q_{ij}(t)\triangleq\begin{bmatrix} q_{ij,11}(t) & q_{ij,12}(t) & \cdots & q_{ij,1m_{ij}}(t) \\ q_{ij,21}(t) & q_{ij,22}(t) & \cdots & q_{ij,2m_{ij}}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{ij,m_{ij}1}(t) & q_{ij,m_{ij}2}(t) & \cdots & q_{ij,m_{ij}m_{ij}}(t) \end{bmatrix}$$

为内隐模式矩阵，描述过渡状态的自由运动规律。

$W_{ij}(t)\triangleq\mathrm{diag}[W_{ij,11}(t),\ W_{ij,22}(t),\ \cdots W_{ij,v_jv_j}(t)]$，为决策变量与关心因素之间的放大系数（折换比率）；

$\underline{C}^T_{1(ij)}\triangleq[1,\ 0,\ \cdots,\ 0]^T$，为$m_{ij}$维的取首项读出量；$\underline{Z}_{ij,0}\triangleq[Z_{ij,0,1},\ Z_{ij,0,2},\ \cdots Z_{ij,0,m_{ij}}]^T$，为在$t=0$时刻$Z_{ij}(t)$的初始条件；$t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$为离散时刻，如以年为间隔，则一般可取年度末时刻作为该年度的离散时刻点。

3 ）动态模式方程的外显形式（显型）

如果还没有掌握一个动态过程发展的内在规律，那末宜采用$\underline{P}_{ij}$模式向量来直接描述这个动态过程。这种方程称为外显形式。

对应于增量模式向量$\underline{P}_{ij}$而后发展过程保持恒定值的情况，模式矩阵$Q_{ij}$一般可取为

$$Q_{ij}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{6-3-4}$$

例如表6-3-1中累计投资$X(t)$可表示为：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Z_x(t+1) \\ Z_x(t+2) \\ Z_x(t+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_x(t) \\ Z_x(t+1) \\ Z_x(t+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} W_x(t)u(t) \\ X(t) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} Z(t) \\ Z(t+1) \\ Z(t+2) \end{bmatrix} \end{cases}$$

而累计生产能力$u_u(t)$可表示为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Z(t+1) \\ \vdots \\ Z(t+6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & & \\ & \ddots & \\ \vdots & 0 & \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_u(t) \\ \vdots \\ Z_u(t+5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} W_u(t)u(t) \\ u_u(t) = [1, \ 0 \cdots 0] \begin{bmatrix} Z_u(t) \\ \vdots \\ Z_u(t+5) \end{bmatrix} \end{cases}$$

至于对应原量模式向量$\underline{P}_{ij}$而后发展过程保持恒定值的情况，模式矩阵$Q_{ij}$一般可取为

$$Q_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6-3-5}$$

于是上述的累计生产能力$u_u(t)$可表示为

$$\begin{bmatrix} Z_u(t+1) \\ \\ \\ \\ \\ Z_u(t+6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_u(t) \\ \\ \vdots \\ \\ \\ Z_u(t+5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0.9 \\ 1.0 \end{bmatrix} W_u(t)u(t)$$

4 ）动态模式方程的内隐形式（隐型）

如果已经掌握一个动态过程的确切的内在（隐含）规律，则宜采用$Q_{ij}$模式矩阵来直接描述这个动态过程。例如，基型中的模式向量$\underline{P}_{ij}$可取为

$$\underline{P}_{ij}=[0\cdots0\ \ P_{ij,m}(t)]^T \qquad (6\text{-}3\text{-}6)$$

而

$$Q_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & 0 & & \\ 0 & & & & 1 \\ q_0 & q_1 & & \cdots & q_{m-1} \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}3\text{-}7)$$

这对应着方程

$$Z_{ij}(t+m)-q_{m-1}Z_{ij}(t+m-1)-q_{m-2}Z_{ij}(t+m-2)-\cdots-q_1Z_{ij}(t+1)-q_0Z_{ij}(t)$$
$$=P_{ij,m}(t)W(t)u_j(t) \qquad (6\text{-}3\text{-}8)$$

的动态过程。

4.各关心因素的组合

1 ）第$j$项目的各关心因素

$\underline{Z}_{ij}(t)$，$i=1, 2, \cdots, I$，可组成一个向量$\underline{Z}_{*j}(t)$，于是可有第$j$项目的动态模式方程，

$$\begin{cases}\underline{Z}_{*j}(t+1)=Q_{*j}(t)\underline{Z}_{*j}(t)+P_{*j}(t)W_{*j}(t)\underline{u}_j(t)+\underline{d}_{*j}(t) & (6\text{-}3\text{-}9)\\ \underline{X}_{*j}(t)=C_{*j}Z_{*j}(t) & (6\text{-}3\text{-}10)\end{cases}$$

式中

$$\underline{Z}_{*j}(t)\triangleq\begin{bmatrix}\underline{Z}_{1j}(t)\\ \underline{Z}_{2j}(t)\\ \vdots\\ Z_{Ij}(t)\end{bmatrix}\triangleq[\underline{Z}^T_{1j}(t)\ \ \underline{Z}^T_{2j}(t)\cdots\underline{Z}^T_{Ij}(t)]^T$$

$$\underline{d}_{*j}(t)\triangleq[\underline{d}^T_{1j}(t)\ \ \underline{d}^T_{2j}(t)\cdots d^T_{Ij}(t)]^T$$

$$\underline{X}_{*j}(t)\triangleq[X_{1j}(t)\ \ X_{2j}(t)\cdots X_{Ij}(t)]^T$$

$$Q_{*j}(t)\triangleq\text{diag}[Q_{1j}(t)\ \ Q_{2j}(t)\cdots Q_{Ij}(t)]$$

$$P_{*j}(t)\triangleq\text{diag}[P_{1j}(t)\ \ P_{2j}(t)\cdots P_{Ij}(t)]$$

$$W_{*j}(t)\triangleq[W^T_{1j}(t)\ \ W^T_{2j}(t)\cdots W^T_{Ij}(t)]^T$$

$$C_{*j}(t)\triangleq\text{diag}[\underline{C}^T_{1(1j)}\ \ \underline{C}^T_{2(2j)}\cdots\underline{C}^T_{I(Ij)}]$$

2 ）第$i$因素的各着重项目的组合

第$i$因素的各着重项目$\underline{Z}_{ij}(t)$，$j=1, 2, \cdots J$，可组成一个向量$\underline{Z}_{i*}(t)$，于是可有第$i$因素的动态模式方程：

$$\underline{Z}_{i*}(t+1)=Q_{i*}(t)\underline{Z}_{i}(t)+P_{i*}(t)W_{i*}(t)\underline{u}(t)+d_{i*}(t) \qquad (6\text{-}3\text{-}11)$$

$$\underline{X}_{i*}(t)=C_{i*}\underline{Z}_{i*}(t) \qquad (6\text{-}3\text{-}12)$$

式中：

$$\underline{Z}_{i*}(t) \triangleq [\underline{Z}_{i1}^T(t)\ \ \underline{Z}_{i2}^T(t) \cdots \underline{Z}_{iJ}^T(t)]^T;$$
$$\underline{u}(t) \triangleq [\underline{u}_1^T(t)\ \ \underline{u}_2^T(t) \cdots \underline{u}_J^T(t)]^T;$$
$$\underline{d}_{i*}(t) \triangleq [\underline{d}_{i1}^T(t)\ \ \underline{d}_{i2}^T(t) \cdots \underline{d}_{iJ}^T(t)]^T;$$
$$\underline{X}_{i*}(t) \triangleq [X_{i1}(t)\ \ X_{i2}(t) \cdots X_{iJ}(t)]^T;$$
$$Q_{i*}(t) \triangleq \mathrm{diag}[Q_{i1}(t)\ \ Q_{i2}(t) \cdots Q_{iJ}(t)];$$
$$P_{i*}(t) \triangleq \mathrm{diag}[P_{i1}(t)\ \ P_{i2}(t) \cdots P_{iJ}(t)];$$
$$W_{i*}(t) \triangleq \mathrm{diag}[W_{i1}(t)\ \ W_{i2}(t) \cdots W_{iJ}(t)];$$
$$C_{i*}(t) \triangleq \mathrm{diag}[\underline{C}_{1(i1)}^T\ \ \underline{C}_{2(i2)}^T \cdots \underline{C}_{J(iJ)}^T]。$$

对于可加因素可有

$$X_i(t) = [1 \cdots 1]\underline{X}_{i*}(t) \tag{6-3-13}$$

或

$$X_i(t) = [1 \cdots 1]C_{i*}\underline{Z}_{i*}(t)$$

式中

$$X_i(t) \triangleq \sum_{j=1}^{J} X_{ij}(t)$$

3）$J$个项目各关心因素的总成

$J$个项目各关心因素总成的动态模式方程，可简称为“基本模块”，即

$$\underline{Z}(t+1) = Q(t)\underline{Z}(t) + P(t)W(t)\underline{u}(t) + d(t) \tag{6-3-14}$$
$$\underline{X}_{**}(t) = C_{**}\underline{Z}(t) \tag{6-3-15}$$

式中：

$$\underline{Z}(t) \triangleq [\underline{Z}_{*1}^T(t)\ \ \underline{Z}_{*2}^T(t) \cdots \underline{Z}_{*J}^T(t)]^T;$$
$$\underline{u}(t) \triangleq [\underline{u}_1^T(t)\ \ \underline{u}_2^T(t) \cdots \underline{u}_J^T(t)]^T;$$
$$\underline{d}(t) \triangleq [\underline{d}_{*1}^T(t)\ \ \underline{d}_{*2}^T(t) \cdots \underline{d}_{*J}^T(t)]^T;$$
$$X_{**}(t) \triangleq [\underline{X}_{*1}^T(t)\ \ \underline{X}_{*2}^T(t) \cdots \underline{X}_{*J}^T(t)]^T;$$
$$Q(t) \triangleq \mathrm{diag}[Q_{*1}(t)\ \ Q_{*2}(t) \cdots Q_{*J}(t)];$$
$$P(t) \triangleq \mathrm{diag}[P_{*1}(t)\ \ P_{*2}(t) \cdots P_{*J}(t)];$$
$$W(t) \triangleq \mathrm{diag}[W_{*1}(t)\ \ W_{*2}(t) \cdots W_{*J}(t)];$$
$$C_{**}(t) \triangleq \mathrm{diag}[C_{*1}\ \ C_{*2} \cdots C_{*J}]。$$

对于可加因素可有

$$\underline{X}(t) = C\underline{Z}(t) \tag{6-3-16}$$

式中

$$\underline{X}(t) \triangleq [X_1(t)\ \ X_2(t) \cdots X_J(t)]^T;$$
$$C \triangleq [C_{*1}\ \ C_{*2} \cdots C_{*J}]。$$

5.各关心因素间的关联

各关心因素之间可能互为独立，也可能互相关联。我们把所有的动态过程全部划归动态模式方程来表述，各关心因素间的关联就可表示为如下的关联方程。

$$\underline{d}(t) = F(t)\underline{Z}(t) + \underline{g}(t) \tag{6-3-17}$$

或

$$\underline{d}(t) = F(t)_* X_{**}(t) = F_*(t)C_{**}\underline{Z}(t) \tag{6-3-18}$$

式中：$\underline{g}(t)$为相应的截距向量；$F(t)$或$F_*(t)$为关联矩阵有关系式$F(t) = F_*(t)C_{**}$。通过关联，基本模块和关联组合起来就有

$$\begin{cases} \underline{Z}(t+1)=Q(t)\underline{Z}(t)+P(t)W(t)\underline{u}(t)+\underline{d}(t) & (6\text{-}3\text{-}14) \\ \underline{d}(t)=F(t)\underline{Z}(t)+\underline{g}(t) & (6\text{-}3\text{-}17) \end{cases}$$

并合后得

$$\underline{Z}(t+1)=A(t)\underline{Z}(t)+B(t)\underline{u}(t)+\underline{g}(t) \quad (6\text{-}3\text{-}19)$$

式中

$$A(t)=Q_t+F(t) \quad (6\text{-}3\text{-}20)$$

$$B(t)=P(t)W(t) \quad (6\text{-}3\text{-}21)$$

这样就获得了控制理论中的标准形式。

例如，把部分因素间的关联作出关联图，可如图6-3-1所示。图中各因素之间的关联，用有向线段表示，并标以关联特性。对应于这样的关联图，可以建立起相应的关联方程。

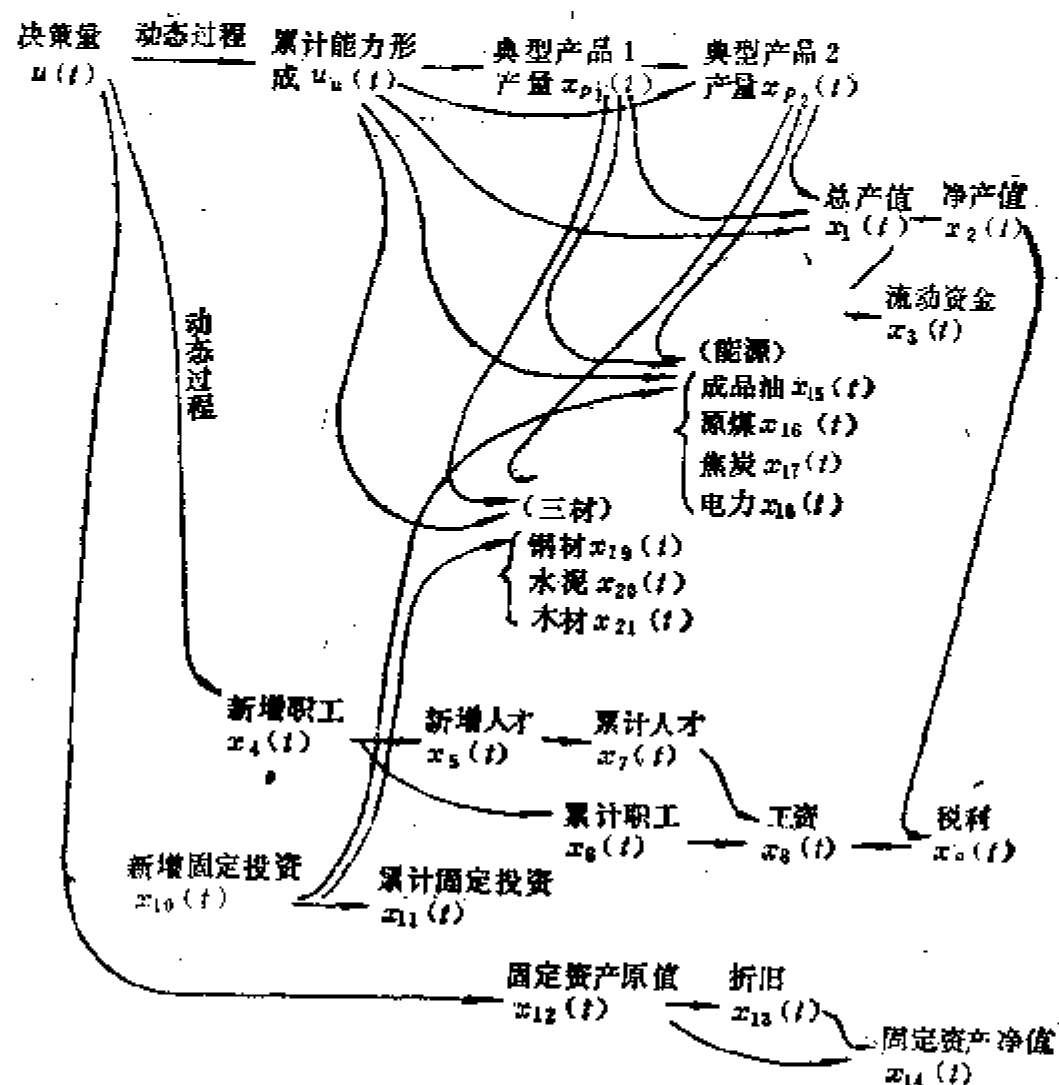



图 6-3-1 关联图举例

6.系数动态方程

在基本模块动态方程中的$P(t)$、$Q(t)$、$W(t)$和$\underline{d}(t)$，以及关联方程中的$F(t)$和$\underline{g}(t)$包含着大量系数。这些系数，有些是定常的，而有些可能是时变的。这些时变系数是科技进步的、内涵性扩大再生产以及体制改革、物价变动等一系列因素的反映。

时变系数的动态过程可以仿照动态模式方程建立起动态方程式，并耦合到系统中去。今用汇总形式可表示为：

$$P(t)=H_p(\underline{Z}(t),\ u(t),\ \cdots) \quad (6\text{-}3\text{-}22)$$

$$Q(t)=H_Q(\underline{Z}(t),\ u(t),\ \cdots) \quad (6\text{-}3\text{-}23)$$

$$W(t)=H_W(\underline{Z}(t),\ u(t),\ \cdots) \quad (6\text{-}3\text{-}24)$$

$$\underline{d}(t)=H_d(\underline{Z}(t),\ u(t),\ \cdots) \tag{6-3-25}$$

$$F(t)=H_F(\underline{Z}(t),\ u(t),\ \cdots) \tag{6-3-26}$$

$$\underline{g}(t)=H_g(\underline{Z}(t),\ u(t),\ \cdots) \tag{6-3-27}$$

在系数具有线性或一阶指数等变化规律的场合，可以采用如下的一阶方程描述，

$$h(t+1)=\beta h(t)+\delta \tag{6-3-28}$$

式中$h$代表各系数矩阵中的某个系数；$\beta$为比例因子；$\delta$为截距因子。$\beta$和$\delta$取值不同，$h(t)$将有相应的不同变化形式。解的一般形式为

$$h(t)=\beta^t h(0)+\sum_{k=0}^{t-1}\beta^k\cdot\delta \tag{6-3-29}$$

或

$$\begin{cases}h(t)=\beta^t\left(h(0)-\dfrac{\delta}{1-\beta}\right)+\dfrac{\delta}{1-\beta}, & 当\beta\neq1 \quad (6\text{-}3\text{-}30)\\ h(t)=h(0)+\delta\cdot t, & 当\beta=1 \quad (6\text{-}3\text{-}31)\end{cases}$$

对于$|\beta|<1$，$h(t)$可有稳定值$h(\infty)$，即

$$h(\infty)\triangleq\lim_{t\to\infty}h(t)=\frac{\delta}{1-\beta} \tag{6-3-32}$$

其相应的动态过程可从式（6-3-30）和（6-3-32）导出

$$\begin{aligned}h(t)&=\beta^t(h(0)-h(\infty))+h(\infty)\\&=\beta^t h(0)+(1-\beta^t)h(\infty)\end{aligned} \tag{6-3-33}$$

如果是确定性问题，那末系数的变化规律可由三点统计数据确定。例如已知起始点$h(0)$，稳定点$h(\infty)$和$t=1$的$h(1)$点，则$\beta=[h(1)-h(\infty))/(h(0)-h(\infty))$，如果是随机过程，那末可按统计数据用辨识估计的方法来确定$\beta$和$\delta$值。

由基本模块、关联环节和系数动态三部分构成社会经济的基本模型，如图6-3-2所示。在图中表示了各项扰动向量，可使各确定型方程转化成相应的随机方程。

7.决策

社会经济的决策环节，连同基本模型和检测环节构成了一个大闭环，组成了一个社会经济系统模型，如图6-3-2所示。决策环节的作用是，根据系统状态的读出变量、约束条件、优化目标和经验的、现状的信息给出决策$\underline{u}(t)$。一般地说，决策$\underline{u}(t)$可以剖成三个部分组成，即想定决策$u_{sc}(t)$、平衡决策$\underline{u}_B(t)$和优化决策$\underline{u}_{op}(t)$，可用定量表示如下：

$$\underline{u}(t)=\underline{u}_{sc}(t)+\underline{u}_B(t)+\underline{u}_{op}(t) \tag{6-3-34}$$

其中，$u_{sc}(t)$，$u_B(t)$和$u_{op}(t)$三者可独立工作、同时工作，也可任意两者结合工作。现简述如下：

想定决策是由决策者按经验的和现状的信息或/和某种简单的估算，设定可能的某种（或某些）方案，给出原始想定决策$\underline{u}_{sc}(t)$。

平衡决策是由决策者按照基本模型和检测特性，考虑到平衡约束条件$\underline{\xi}_B(t)$，即

$$G_B(t)\underline{X}(t)\geqslant\underline{\xi}_B(t) \tag{6-3-35}$$

式中$G_B(t)$为平衡约束矩阵，求解原问题，在原始想定决策量$\underline{u}_{sc}(t)$的基础上给出平衡决策

量$\underline{u}_B(t)$。

优化决策是由决策者按照基本模型，检测特性、平衡约束条件，考虑到优化条件$\underline{\xi}_{op}(t)$和优化目标，在原始想定决策量$\underline{u}_{so}(t)$和平衡约束决策量$\underline{u}_B(t)$的基础上给出优化决策量$\underline{u}_{op}(t)$。

这里的优化约束条件为

$$G_{op}(t)\underline{X}(t)\geqslant\underline{\xi}_{op}(t) \tag{6-3-36}$$

式中$G_{op}(t)$为优化约束矩阵。

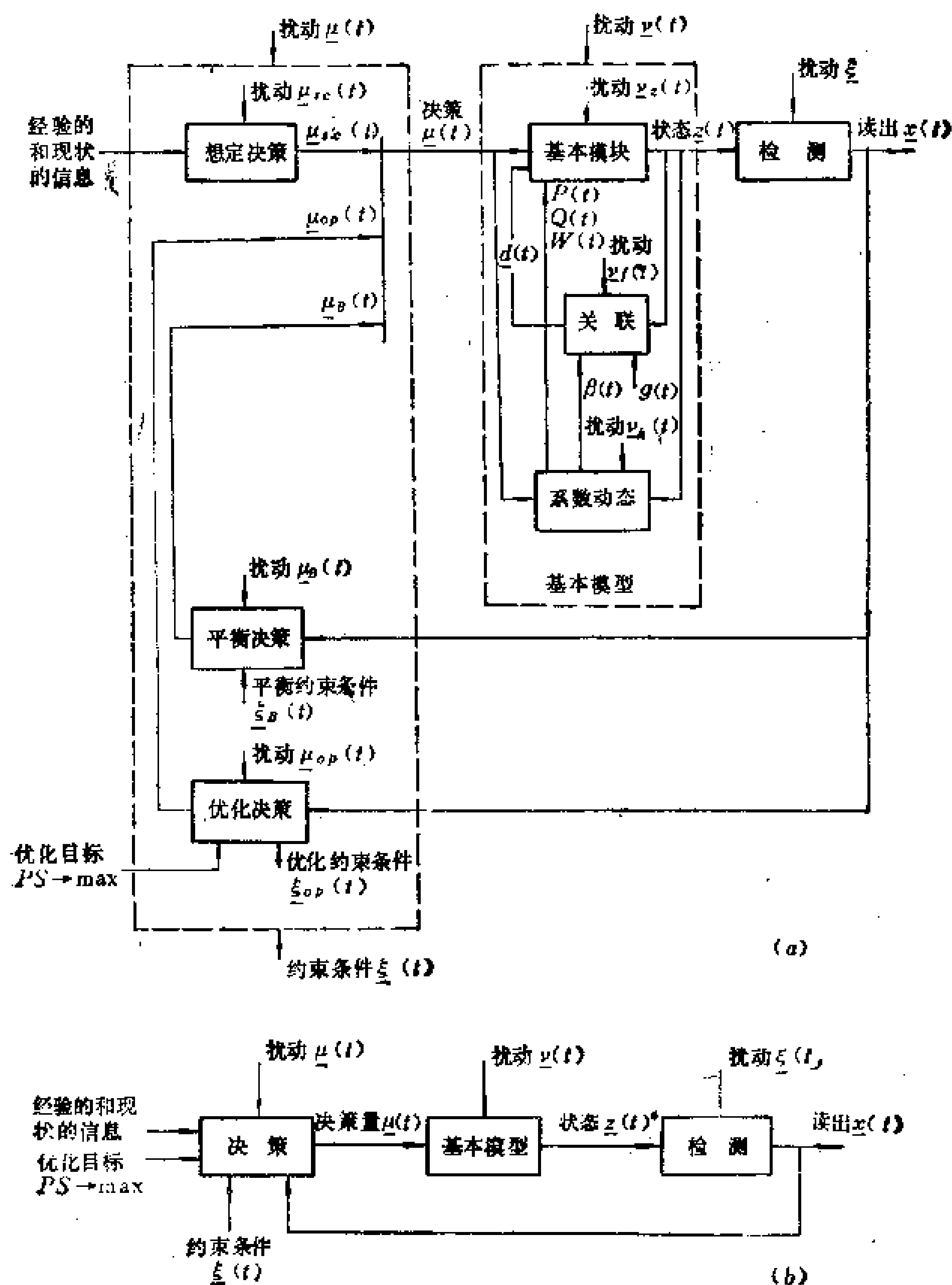



图 6-3-2 系统框图

优化目标可以采用可能-满意度$PS$取最大的方法，即

$$PS' \underset{u_{op}(t)}{\to \max} \quad (6\text{-}3\text{-}37)$$

$$s \cdot t \cdot G_{op}\underline{X}(t) \geqslant \underline{\xi}_{op}(t)$$

式中$PS$为状态$\underline{Z}(t)$、决策量$\underline{u}(t)$、约束条件$\underline{\xi}_B(t)$、$\underline{\xi}_{op}(t)$、$\forall t$等的函数，

$$PS = PS'(\underline{Z}(t),\ \underline{u}(t),\ \underline{\xi}_B(t),\ \underline{\xi}_{op}(t),\ t) \quad (6\text{-}3\text{-}38)$$

在应用可能-满意度$PS'$方法时，当建立了多目标的评价指标体系之后，不同的并合规则将反映不同的决策思想。例如，补偿规则，就是加权和，相应的目标函数就成为线性的。再如，不可偏废规则，就是乘法规则；代换规则，就是乘法与加减法相结合；举足轻重就会带有指数函数、三角函数。凡此种种，相应的目标函数$PS$就成非线性函数，其中较为特殊的一种就是控制理论中的 2 次型函数。

### 三、结　　语

（1）DYPECM是按单向性建模原则建模的。

（2）MYPECM的开发也许能对状态方程中的状态变量和各参数量提供经济意义上的解释。

（3）在系统模型基础上可以进行理论研究和数理分析，可以进行仿真分析和决策研究。

（4）MYPECM有可能用于宏观、微观或宏-微观结合场合。

（5）MYPECM有可能作为制订五年计划的一种辅助工具，不仅能做战略模型，还可兼做工作模型。

## §6-4　投入产出分析的模糊数学模型[100]

1984年，冯保成论述了用普通投入产出数学模型研究错综复杂的社会经济系统反映出很多的不确切性和不精确性，即模糊性。运用模糊集理论，建立了投入产出分析的模糊数学模型，输进去的数不是普通的实数而是模糊数(实数是它的特例)，给出了对模糊数据进行分析的方法。通过编制FORTRAN程序设计和电算实例，论证了投入产出分析模糊数学模型的正确性。

### 一、投入产出系统的模糊性

投入产出法和投入产出模型的研究对象是极为错综复杂的社会经济系统。而在投入产出模型中，投入量、产出量、直接消耗系数、完全消耗系数都要求是精确的数字，这就产生了所谓互克性原理：当一个系统的复杂性大大增加时，我们使它精确化的能力将减小，在达到一定阈值以上时，复杂性与精确性将互相排斥。与复杂性紧紧相伴随的是不确切性和不精确性，亦即模糊性。为此，我们用研究和处理模糊现象的模糊数学来研究和解决这一重大问题。也就是根据模糊集合理论，用模糊数来表示投入量、产出量、直接消耗系数、完全消耗系数；用模糊集合的隶属函数或可能性分布来代替不可靠的精确数字，建立投入产出分析的模糊数学模型，来研究错综复杂的社会经济系统。

## 二、模 糊 数

为了在投入产出模型中引进模糊集且便于运算，与模糊集的隶属函数相对应，引人模糊数的概念。模糊数的运算推广了区间分析，并在用电子计算机上是有吸引力的。

实数轴$R$上的Fuzzy集被认为是凸的，当且仅当所有它的$\alpha$-截集是实数区间；实数轴$R$上的Fuzzy集被认为是正规的。当且仅当$\exists x\in X$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=1$；实数轴$R$上的凸的正规的Fuzzy集(其隶属函数是分段连续的)，被称为模糊实数。

**定义1** 模糊数$\underset{\sim}{A}$是实数轴$R$上的凸的正规Fuzzy集，使得①$\exists ! x_0\in R$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_0)=1$，($x_0$称为$\underset{\sim}{A}$的均值)②$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$是分段连续的。

**定义2** 实数轴$R$上的模糊集称为模糊数，记为$\underset{\sim}{A}\int_{x\in R}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)/x$，或$\underset{\sim}{A}\Longleftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\in$[0.1]。

**定义3** 若对于$x,y,z\in R$，且$x\leqslant y\leqslant z$，则必有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(y)\geqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{A}}(z)$$

则称$\underset{\sim}{A}$为凸模糊数。

**定义4** 称集合$A_0=\{x|\lambda\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)>0\}$为模糊数$\underset{\sim}{A}$的台；称集合$A_\alpha=\{x|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)>\alpha\}$，$0<\alpha\leqslant1$为模糊数$\underset{\sim}{A}$的$\alpha$截集（或$\alpha$水平集）。

按上述定义，可证以下二定理。

**定理1** $\underset{\sim}{A}$是凸模糊数的充要条件为对任意$\alpha(0<\alpha\leqslant1)$，$A_\alpha$是一区间，记为：

$$A_\alpha=[a_L(\alpha),a_R(\alpha)]$$

其中，$a_L(\alpha)$和$a_R(\alpha)$分别代表$A_\alpha$的左、右端点。按端点是否包含在$A_\alpha$中，区间可分为闭的或开的。

**定理2** $\underset{\sim}{A}$是凸模糊数，设$\alpha_1$、$\alpha_2$满足$0\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_1\leqslant1$，则$a_L(\alpha)$，$a_R(\alpha)$均为单调函数，$a_L(\alpha)$是非降的，$a_R(\alpha)$是非升的。

**定义5** 设凸模糊数$\underset{\sim}{A}$的台$A_0=(a_L,a_R)$，若$a_L>0$，则称$\underset{\sim}{A}$为正模糊数；若$a_R<0$则称$\underset{\sim}{A}$为负模糊数；若$a_L<0<a_R$，则称$\underset{\sim}{A}$称零模糊数。

区间$I=[a,b]$是特殊的模糊数，叫做区间数，关于区间数，已经有一套现成的理论，叫做区间分析。

设$I_1$、$I_2$是两个区间数，规定区间数的运算：

$$I_1*I_2\triangleq\{x|x=x_1*x_2,x_1\in I_1,x_2\in I_2\}$$

这里$*$表示$+$、$-$，$\cdot$、$\div$以及$\vee$、$\wedge$运算中任何一种，易证$I_1*I_2$仍然是一个区间数，例如：

$$[a_1,b_1]+[a_2,b_2]=[a_1+a_2,b_1+b_2]$$

$$[a_1,b_1]-[a_2,b_2]=[a_1-b_2,b_1-a_2]$$

$$[a_1,b_1]\vee[a_2,b_2]=[a_1\vee a_2,b_1\vee b_2]$$

$$[a_1,b_1]\cdot[a_2,b_2]=[c,d]$$

其中，
$$C=\min(a_1a_2,a_1b_2,b_1a_2,b_1b_2)$$
$$D=\max(a_1a_2\ \ a_1b_2,b_1a_2,a_1b_2)$$

根据zadeh的扩张原理，可规定模糊数运算。

扩张原理：$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$均为模糊数，映射$f:R\to R$，即 $f(x,y)=x*y$

其中"*"为二元运算，将运算"*"扩张到模糊数，则规定为：
$$f(x,y)=\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{B}=\int_{x*y=z}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)/x*y$$
$$=\int_{x*y=z}\min[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)]/x*y$$

式中，$f(x,y)=z=x*y$，它的隶属函数可表示为：
$$\mu_{f(x,y)}(z)=\mu_{x*y}(z)=\bigvee_{x*y=z}[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)]$$
$$=\sup_{xy\in f^{-1}(z)}\min[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)]$$

当上述运算"*"分别为+、−、·、÷时，则给出模糊数的和、差、积、商运算。

模糊数的和：

设$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$是两个模糊数，$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$的"和"记为$\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}$定义为：
$$\forall z\in R,\ \ \mu_{\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}}(z)=\bigvee_{x+y=z}[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)]$$

利用$\alpha$-截集$A_\alpha$，$B_\alpha$，可将上式写成另一种形式，设

$A_\alpha=[m_\alpha,\ n_\alpha]$，$B_\alpha=[p_\alpha,\ q_\alpha]$，则
$$\underset{\sim}{A}=\underset{\alpha}{U}\alpha\cdot A_\alpha=\underset{\alpha}{U}\alpha\cdot[m_\alpha,n_\alpha]$$
$$\underset{\sim}{B}=\underset{\alpha}{U}\alpha\cdot B_\alpha=\underset{\alpha}{U}\alpha\cdot[p_\alpha,q_\alpha]。$$
$$\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}=\underset{\alpha}{U}\alpha\cdot[m_\alpha,n_\alpha]+\underset{\alpha}{U}\alpha\cdot[p_\alpha,q_\alpha]$$
$$=\underset{\alpha}{U}\alpha\cdot([m_\alpha,n_\alpha]+[p_\alpha,q_\alpha])$$

因为在最后一式的右端括号中，应将所有数$m_\alpha\leqslant x\leqslant n_\alpha$和所有数$p_\alpha\leqslant y\leqslant q_\alpha$相加，给出区间$[m_\alpha+p_\alpha,n_\alpha+q_\alpha]$因此，$\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}=\underset{\alpha}{U}\alpha\cdot[m_\alpha+p_\alpha,n_\alpha+q_\alpha]$。

模糊数的积：

$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$两个模糊数的积，由下式得到：
$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}(z)=\bigvee_{\substack{z=x\cdot y\\ x\cdot y>0}}[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(y)]\quad\forall z\in R^+$$

采用$\alpha$-截集，则上式可写成：
$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}=\underset{\alpha}{U}\alpha[m_\alpha\cdot p_\alpha,n_\alpha\cdot q_\alpha]。$$

从而引进区间的加法和乘法。不难证明以下定理。

**定理3** 正凸模糊数的和与积都是正凸模糊数，且满足交换律、结合律和分配律。

## 三、投入产出分析的模糊数学模型

表6-4-1表示一张投入产出表或者叫做投入产出综合平衡模型，这个表在形式上与通常的投入产出表是相同的。

投入产出综合平衡表　　　　表 6-4-1

| 产品投入来源 | | 产品分配去向 | | | | | 总产值 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 中间使用 | | 最终产品 | | | |
| | | 物质生产部门 1, 2, ……, $n$ | 合计 | 积累$\tilde{G}_i$ | 消费$\tilde{W}_i$ | 合计 | |
| | 1 | $x_{11}$　$x_{12}$, ……, $x_{1n}$ | $\tilde{E}_1$ | $\tilde{G}_1$ | $\tilde{W}_1$ | $\tilde{Y}_1$ | $\tilde{X}_1$ |
| | 2 | $x_{21}$　$x_{22}$, ……, $x_{2n}$ | $\tilde{E}_2$ | $\tilde{G}_2$ | $\tilde{W}_2$ | $\tilde{Y}_2$ | $\tilde{X}_2$ |
| | ⋮ | ⋮　⋮　……　⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | $n$ | $x_{n1}$　$x_{n2}$, ……　$x_{nn}$ | $\tilde{E}_n$ | $\tilde{G}_n$ | $\tilde{W}_n$ | $\tilde{Y}_n$ | $\tilde{X}_n$ |
| 合计 | | $\tilde{U}_1$　$\tilde{U}_2$ …… $\tilde{U}_n$ | $\tilde{U}$ | $\tilde{G}$ | $\tilde{W}$ | $\tilde{Y}$ | $\tilde{X}$ |
| 新创造价值 | 工资及劳动收入 | $\tilde{V}_1$　$\tilde{V}_2$……$\tilde{V}_n$ | $\tilde{V}$ | | | | |
| | 社会纯收入 | $\tilde{M}_1$　$\tilde{M}_2$……　$\tilde{M}_n$ | $\tilde{M}$ | | | | |
| | 合计 | $\tilde{N}_1$　$\tilde{N}_2$……$\tilde{N}_n$ | $\tilde{N}$ | | | | |
| 总产值 | | $\tilde{X}_1$　$\tilde{X}_2$……$\tilde{X}_n$ | $\tilde{X}$ | | | | |

表中：$\tilde{X}_i (i=1,2,\cdots,n)$——国民经济中第$i$个物质生产部门年产品总量或总产值。

$\tilde{Y}_i (i=1,2,\cdots,n)$——国民经济中第$i$个物质生产部门的年最终产品数量或产值。

$X_{ij} (i,j=1,\cdots,n)$——部门间的产品流量，代表$j$部门进行生产时要消耗$i$部门产品的数量。

$\tilde{E}_i (i=1,2,\cdots,n)$——表示$i$部门产品分配给各部门作为中间产品的数量；

$\tilde{U}_j (i=1,\cdots,n)$——表示$j$部门生产时所消耗的各部门的产品数量。

$\tilde{V}_j (j=1,\cdots,n)$——表示第$j$部门一年内的工资和劳动报酬。

$\tilde{M}_j (j=1,\cdots,n)$——表示第$j$物质生产部门的纯收入(利润和税金)。

$\tilde{G}_i (i=1,\cdots,n)$——表示第$i$部门的固定资产与流动资金的积累，生产性与非生产性积累；

$\tilde{W}_i (i=1\cdots,n)$——表示第$i$部门的个人消费和社会消费。

在通常的投入产出表中，以上这些符号代表的是精确的数字，在本文中它代表的是相应的隶属函数。

假设以上所列的各模糊变量隶属函数的模糊数均为正凸，从而对应于该模糊数的每一$\alpha$水平集为一区间$A_\alpha=[a_{\alpha L},a_{\alpha R}]$。反之，如果求出对应于各不同$\alpha$水平的模糊数，则可据此作出相应的隶属函数。

在通常投入产出模型中，利用公式$a_{ij}=x_{ij}/x_j$，可以计算出各部门在生产中直接消耗其它部门产品的消耗系数。直接消耗系数$a_{ij}$表明每生产单位$j$部门产品需直接消耗$i$部门产

品的数量。在投入产出分析的模糊数学模型中，直接消耗系数是一个模糊量，用$\underset{\sim}{a}_{ij}$表示。并以$(a_{ij})_\alpha$表示该模糊数的$\alpha$水平集。

按投入产出表易于求得投入产出综合平衡模型的分配方程组。

$$\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{a}_{ij})_\alpha\cdot(\underset{\sim}{X}_j)_\alpha+(\underset{\sim}{Y}_i)_\alpha=(X_i)_\alpha,\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

式中$(\underset{\sim}{X}_i)_\alpha$和$(\underset{\sim}{Y}_i)_\alpha$均代表模糊变量$\underset{\sim}{X}_i$和$\underset{\sim}{Y}_i$相应模糊数的$\alpha$水平集。在各模糊数为正凸的假设下，这些$\alpha$水平集均为区间，因此，分配方程组可表为一个以区间为系数，区间为变量的方程组。根据区间数运算定义，则分配方程组可写成如下矩阵向量形式：

$$[\underset{\sim}{A}]_\alpha[\underset{\sim}{X}]_\alpha+[\underset{\sim}{Y}]_\alpha=[\underset{\sim}{X}]_\alpha$$

式中：$\underset{\sim}{A}=(\underset{\sim}{a}_{ij})$；$[\underset{\sim}{a}_{ij}]_\alpha$为一区间$[a_{ijL},\ a_{ijR}]$；$\underset{\sim}{X}=(\underset{\sim}{X}_1,\cdots,X_n)$为一列向量，$[\underset{\sim}{X}_i]_\alpha$为一区间$[X_{iL},X_{iR}]_\alpha$。$\underset{\sim}{Y}=(Y_1,\cdots,Y_n)$为一列向量；$[\underset{\sim}{Y}_i]_\alpha$为一区间$[Y_{iL},Y_{iR}]_\alpha$

为了书写简化起见，省略附标$\alpha$，则

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{Y}=\underset{\sim}{X}$$

按上述定义的区间运算规则，上述方程在实际运算时，可分别为左（$L$）右（$R$）端点的两个矩阵方程求解，即

$$A_L\cdot X_L+Y_L=X_L$$
$$A_R\cdot X_R+Y_R=X_R$$

其中，$A_L$，$X_L$，和$Y_L$表示相应各区间左端实数所组成的矩阵和向量；$A_R$，$X_R$，和$Y_R$表示相应的右端实数所组成的矩阵和向量。

当给定$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{X}$时，由

$$Y_L=(I-A_L)X_L\qquad Y_R=(I-A_R)X_R$$

式中$I$为单位矩阵，分别求得$Y_L$，$Y_R$从而求得$\underset{\sim}{Y}$。

当给定$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{Y}$时，由于$(I-A_L)^{-1}Y_L=(I-A_L)^{-1}\cdot(I-A_L)X_L$

因为　　$(I-A_L)^{-1}\cdot(I-A_L)=I$

所以　　$X_L=(I-A_L)^{-1}Y_L$

同理　　$X_R=(I-A_R)^{-1}Y_R$

从而由$A_L$，$X_R$，最后求出$\underset{\sim}{X}$。

按投入产出表，以同样的方法，可以写出用模糊集表示的投入产出综合平衡模型生产方程组的矩阵形式：

$$\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{X}+\underset{\sim}{N}=X$$

因为　　$\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{N}$，$(I-\underset{\sim}{C})\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{N}$

所以　　$\underset{\sim}{X}=(I-\underset{\sim}{C})^{-1}\underset{\sim}{N}$

其中：

$$
\underset{\sim}{C}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{a}_{i1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{a}_{i2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{a}_{in}\end{bmatrix},\quad \underset{\sim}{X}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{X}_1\\ \underset{\sim}{X}_2\\ \vdots\\ \underset{\sim}{X}_n\end{bmatrix},\quad \underset{\sim}{N}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{N}_1\\ \underset{\sim}{N}_2\\ \vdots\\ \underset{\sim}{N}_n\end{bmatrix}
$$

$\underset{\sim}{C}$称为物质消耗系数矩阵，是一模糊矩阵，其中$C_j=\sum_{i=1}^{n}\underset{\sim}{a}_{ij}$（$j=1,\cdots n$），即生产单位$j$部门产品从价值形态上需要直接消耗其他部门产品的总和，为一模糊数 。$\underset{\sim}{N}_j$为第$j$个生产部门新创造价值的总和，为一模糊变量；$\underset{\sim}{X}_j$为第$j$个生产部门的年产总价值，为一模糊变量。

用模糊集表示的完全消耗系数矩阵为：

$$
\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}
$$

其中：

$$
B=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{b}_{11} & \underset{\sim}{b}_{12}\cdots\underset{\sim}{b}_{1n}\\ \underset{\sim}{b}_{21} & \underset{\sim}{b}_{22}\cdots\underset{\sim}{b}_{2n}\\ \vdots & \\ \underset{\sim}{b}_{n1} & \underset{\sim}{b}_{n2}\cdots\underset{\sim}{b}_{nn}\end{bmatrix}
$$

可用完全相似的方法，对上述二阵矩阵方程求解。

## 四、FORTRAN程序设计和电算实例

为了把投入产出分析模糊数学模型推广应用于实际，编制了投入产出分析模糊数学模型通用的FORTRAN程序设计，利用山西省统计局于1982年 5 月编制的全国56个部门的投入产出价值表经简化后的数字作为电算的实例。

各部门之间的直接消耗系数$\underset{\sim}{a}_{ij}$是一个隶属函数，为了便于计算，不失一般性，假设该隶属函数呈三角形分布。$\underset{\sim}{a}_{ij}$表示为三个数字$\begin{pmatrix} & x_0 & \\ x_L & & x_R\end{pmatrix}$，其中$x_0$由下式确定，$\max\limits_{x_0\in R}\underset{\sim}{a}_{ij}(x_0)=1$，而（$x_L$，$x_R$）为模糊数$\underset{\sim}{a}_{ij}$的台，（$\underset{\sim}{a}_{ij}$）$_0=(x_L,x_R)$

显见，这种模糊数是凸的。

（1）如已知各部门间的模糊直接消耗系数矩阵和各部门的总产量，它们都是三角形分布的模糊量，列出相应于各个不同$\alpha$水平的方程组，即

$$
\begin{aligned}
\alpha=0\text{时，}\ [Y_L]&=(I-A_L')[X_L]=[A_L][X_L]\\
[Y_R]&=(I-A_R')[X_R]=[A_R][X_L]\\
\alpha=1\text{时，}\ [Y_0]&=[I-A_0'][X_0]=[A_0][X_0]
\end{aligned}
$$

则编制FORTRAN PROGRAM NO1即可求解各部门的最终产品量$Y_L$，$Y_R$，$Y$ 。

FORTRAN PROGRAM NO1框图如图6-5-1所示。

（2）若已知的是各部门的最终产品的隶属函数[$\underset{\sim}{Y}_i$]，和直接消耗系数矩阵，可用两种方法求出各部门的总产值。

1°.求解逆矩阵的方法：

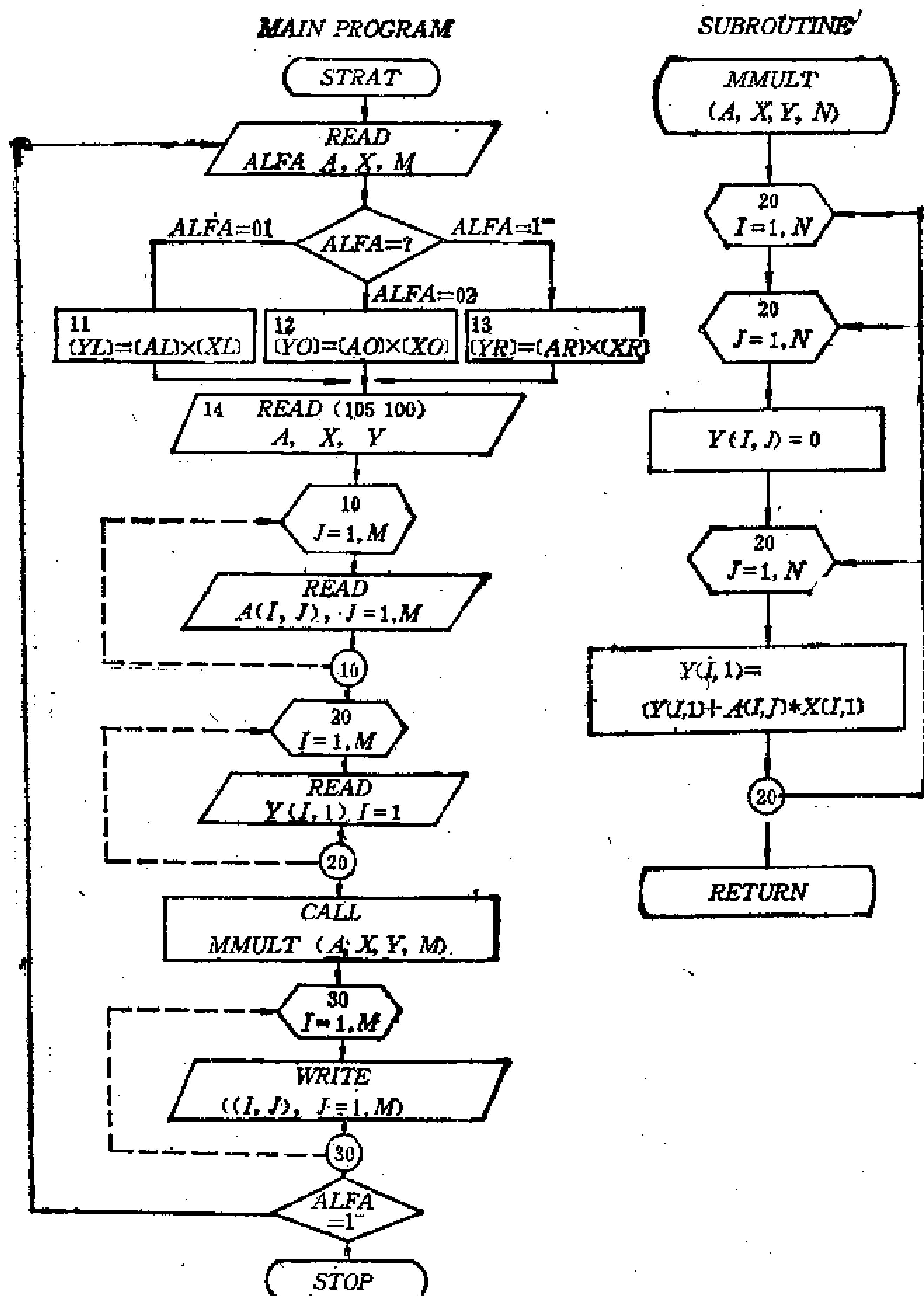



图 6-4-1 FORTRAN PROGAM NO1框图

$\alpha=0$时， $X_L=(I-A_L)^{-1}Y_L$

$X_R=(I-A_R)^{-1}Y_R$

$\alpha=1^-$时， $X_0=(I-A_0)^{-1}Y_0$

2°. 解线性方程组的列主元消去法：

$\alpha=0$时， $(I-A_L)X_L=Y_L$

$(I-A_R)X_R=Y_R$

$\alpha=1^-$时， $(I-A_0)X_0=Y_0$

我们用第二种方法编制FORTRAN PROGRAM NO2求解。

（3）对用模糊集表示的投入产出综合平衡模型生产方程组的矩阵形式，即

$$\underset{\sim}{X}=(I-\underset{\sim}{C})^{-1}\underset{\sim}{N}$$

也编制了FORTRAN PROGRAN NO3设计。

（4）实例计算：已知各部门直接消耗系如表6-4-1所示，表中 $\underset{\sim}{a}_{ij}$ 是呈三角形分布的隶属函数。

直 接 消 耗 系 数　　　　表 6-4-2

| | 农业 | 工业 | 建筑业 | 运输邮电业 | 商业 |
|---|---|---|---|---|---|
| 农业 | 0.1421<br>(0.1350 0.1492) | 0.1844<br>(0.1752 0.1936) | 0.0873<br>(0.0829 0.0917) | 0<br>(0 0) | 0.0056<br>(0.0053 0.0059) |
| 工业 | 0.1642<br>(0.1562 0.1724) | 0.4578<br>(0.4349 0.4807) | 0.6182<br>(0.5873 0.6491) | 0.3421<br>(0.3250 0.3592) | 0.1611<br>(0.1531 0.1691) |
| 建筑业 | 0<br>(0 0) | 0<br>(0 0) | 0<br>(0 0) | 0<br>(0 0) | 0<br>(0 0) |
| 运输邮电业 | 0.0074<br>(0.00703 0.00777) | 0.0080<br>(0.0076 0.0084) | 0.0455<br>(0.0432 0.0478) | 0.0157<br>(0.0149 0.0165) | 0.1000<br>(0.095 0.1050) |
| 商业 | 0.0021<br>(0.00199 0.00221) | 0.0053<br>(0.5005035 0.005565) | 0.0127<br>(0.012065 0.013335) | 0.0105<br>(0.009715 0.011285) | 0.0111<br>(0.01054 0.01165) |
| 合计 | 0.3158<br>(0.30002 0.33158) | 0.6555<br>(0.622735 0.688215) | 0.7637<br>(0.72546 0.80192) | 0.3683<br>(0.34987 0.38670) | 0.2778<br>(0.26394 0.29165) |
| 工资劳动报酬 | 0.5474<br>(0.52002 0.57477) | 0.0867<br>(0.08236 0.09103) | 0.1636<br>(0.15542 0.17178) | 0.2362<br>(0.25044 0.27676) | 0.2222<br>(0.21109 0.23331) |
| 社会纯收入 | 0.1368<br>(0.12996 0.14364) | 0.2578<br>(0.24491 0.27069) | 0.0727<br>(0.06906 0.07634) | 0.3684<br>(0.34998 0.38682) | 0.5002<br>(0.4750 0.5250) |

$$[A_L]=[I-A_L']$$

$$=\begin{bmatrix} 1-0.1350 & -0.1752 & -0.0829 & 0 & -0.0053 \\ -0.1560 & 1-0.4349 & -0.5873 & -0.3250 & -0.15310 \\ 0 & 0 & 1-0 & 0 & 0 \\ -0.00703 & -0.0076 & -0.0432 & 1-0.0149 & -0.0950 \\ -0.00199 & -0.005035 & -0.01206 & -0.009715 & -0.01054 \end{bmatrix}$$

$$[A_R]=[I-A_R']$$

$$=\begin{bmatrix} 1-0.1492 & -0.1936 & -0.0917 & 0 & -0.0059 \\ -0.1724 & 1-0.4807 & -0.6491 & -0.3592 & -0.1691 \\ 0 & 0 & 1-0 & 0 & 0 \\ -0.0077 & -0.0084 & -0.0478 & 1-0.0165 & -0.1050 \\ -0.00221 & -0.005565 & -0.013335 & -0.01128 & 1-0.01165 \end{bmatrix}$$

表 6-4-3

**模糊（Fuzzy）投入产出表（全国表式价值形态简表）（单位：亿元）**

| 产品投入来源 | | 产品分配去向：中间产品：农业 $\underset{\sim}{X}_{i1}$ | 工业 $\underset{\sim}{X}_{i2}$ | 建筑业 $\underset{\sim}{X}_{i3}$ | 运输邮电业 $\underset{\sim}{X}_{i4}$ | 商业 $\underset{\sim}{X}_{i5}$ | 合计 $\underset{\sim}{E}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 物质生产部门物质消耗 | 农业 $\underset{\sim}{X}_{1j}$ | 269.98<br>243.67 297.66 | 829.80<br>748.98 914.76 | 48.135<br>43.315 52.956 | 0<br>0 0 | 2.016<br>1.817 2.230 | 1149.94<br>1037.782 269.596 |
| | 工业 $\underset{\sim}{X}_{2j}$ | 311.98<br>281.68 343.94 | 2060.10<br>1859.20 2271.30 | 340.91<br>306.86 374.85 | 65.00<br>58.67 71.66 | 57.896<br>52.36 63.91 | 2836.086<br>2558.67 3125.66 |
| | 建筑业 $\underset{\sim}{X}_{3j}$ | 0<br>0 0 | 0<br>0 0 | 0<br>0 0 | 0<br>0 0 | 0<br>0 0 | 0<br>0 0 |
| | 运输邮电业 $\underset{\sim}{X}_{4j}$ | 14.06<br>12.689 15.501 | 36.00<br>32.49 39.69 | 25.025<br>22.572 27.604 | 2.983<br>2.689 3.291 | 36.00<br>32.49 39.69 | 114.068<br>102.93 125.776 |
| | 商业 $\underset{\sim}{X}_{5j}$ | 3.99<br>3.59195 4.40855 | 23.85<br>21.5246 26.2946 | 6.885<br>6.30396 7.70096 | 1.995<br>1.75356 2.25136 | 3.996<br>3.60639 4.40559 | 40.816<br>36.78048 45.0648 |
| | 合计 $(\underset{\sim}{U})$ | 600.02<br>541.5309 661.5009 | 2949.75<br>2662.1946 3252.0446 | 420.155<br>379.0509 463.1109 | 69.978<br>68.11256 77.20336 | 100.08<br>90.2734 110.2559 | 4189.91<br>3736.1625 4564.1156 |
| 新创造价值 | 工资与劳动报酬 $(\underset{\sim}{V})$ | 1040.06<br>1010.8450 1066.8763 | 390.15<br>405.8756 370.6802 | 89.98<br>99.3148 79.1976 | 50.008<br>48.9470 51.0800 | 79.992<br>77.4508 82.3808 | 1650.19<br>1642.4327 1650.1649 |
| | 社会纯收入 $(\underset{\sim}{M})$ | 259.92<br>252.6189 266.6216 | 1160.10<br>1206.9329 1102.2676 | 39.985<br>44.1329 35.1936 | 69.996<br>68.4015 71.3233 | 180<br>174.2817 185.3755 | 1710.001<br>1746.3679 1660.7816 |
| | 合计 $(\underset{\sim}{N})$ | 1299.98<br>1263.6189 1333.4979 | 1550.25<br>1612.8085 1472.9478 | 129.964<br>143.4472 114.3912 | 120.004<br>117.3485 122.3533 | 259.92<br>251.7325 267.7563 | 3360.101<br>3388.8046 3310.9465 |
| 总产值 $\underset{\sim}{X}$ | | 1900<br>1805 1995 | 4500<br>4275 4725 | 550<br>522.5 577.5 | 190<br>180.5 199.5 | 360<br>342 378 | 7600<br>7125 7875 |

续表

| 产品投入来源 | | 产品分配去向 最终产品 积累 $\underset{\sim}{Z}$ | 消费 $\underset{\sim}{W}$ | 合计 $\underset{\sim}{Y}$ | 总产值 $\underset{\sim}{X}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 物质生产部门物质消耗 | 农业 $\underset{\sim}{X_1}$ | (51.4044, 50.18, 48.7371) | (715.8256, 700.00, 678.6829) | (767.23, 750.179, 727.42) | (1805, 1900, 1995) |
| | 工业 $\underset{\sim}{X_2}$ | (503.0563, 487.988, 468.7666) | (1213.2737, 1176.932, 1130.5734) | (1716.33, 1664.92, 1599.34) | (4275, 4500, 4725) |
| | 建筑业 $\underset{\sim}{X_3}$ | (522.5, 550, 577.5) | (0, 0, 0) | (522.5, 550, 577.5) | (522.5, 550, 577.5) |
| | 运输邮电业 $\underset{\sim}{X_4}$ | (26.5364, 25.9763, 25.2220) | (51.0326, 49.9557, 48.5050) | (77.569, 75.932, 73.727) | (180.5, 190, 199.5) |
| | 商业 $\underset{\sim}{X_5}$ | (15.2609, 15.96, 16.6469) | (289.9585, 303.22, 316.2915) | (305.2195, 319.184, 332.9385) | (342, 360, 378) |
| | 合计 $(\underset{\sim}{U})$ | (1118.758, 1130.104, 1136.8726) | (2270.091, 2230.108, 2174.0428) | (3388.8486, 3360.215, 3310.9255) | (7125, 7500, 7875) |
| 新创造价值 | 工资与劳动报酬 $(\underset{\sim}{V})$ | | | | |
| | 社会纯收入 $(\underset{\sim}{M})$ | | | | |
| | 合计 $(\underset{\sim}{N})$ | | | | |
| 总产值 $\underset{\sim}{X}$ | | | | | |

$$[A_0]=[I-A_0']$$

$$=\begin{bmatrix} 1-0.1421 & -0.1844 & -0.0873 & 0 & -0.0056 \\ -0.0462 & 1-0.4578 & -0.6182 & -0.3421 & -0.1611 \\ 0 & 0 & 1-0 & 0 & 0 \\ -0.0074 & -0.0084 & -0.0455 & 1-0.0157 & -0.1000 \\ -0.0021 & -0.0653 & -0.0127 & -0.0105 & 1-0.0111 \end{bmatrix}$$

已知各部门的总产量如下：

农业　　工业　　建筑业　　运输邮电业　　商业

$$[X_i]=\left[\begin{pmatrix} & 1900 & \\ 1805 & & 1955\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 4500 & \\ 4275 & & 4725\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 550 & \\ 552.5 & & 577.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 190 & \\ 180.5 & & 199.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 360 & \\ 342 & & 378\end{pmatrix}\right]^{T}$$

则，按照FOTTRAN PROGRAN NO1，可求解各部门的最终产品量，或已知各部门最终产品量，按照FORTRAN PROGRAN NO2，可求解各部门的总产量或总产值。如表6-4-3所示。

## 五、结　　语

应用模糊集理论，建立了投入产出分析的模糊数学模型，对列昂节夫的投入产出模型作了这样的修正，输入的数不是普通实数而是模糊数（实数是它的特例）。通过编制FORTRAN程序设计和电算实例，论证了投入产出分模糊数学模型的正确性，其结果更加符合客观实际。该模糊数学模型可应用于全国、部门、地区，以及联合企业的投入产出分析。

# §6-5　投资系统的灰色量化决策[106]

1986年，邓聚龙提出了投资系统的灰色量化决策方法。论述了投资是经济系统的子系统，投资系统是本征性灰系统，即“软”的“抽象”的系统。对具体的投资系统，可以用灰色系统理论和方法，判断投资方向，评估投资效益，制定投资政策，进行投资决策，调整投资结构。多种应用实例证明了，投资系统的灰色量化决策方法，切合实际、满意度高，效果良好。

## 一、投资系统是灰色系统

灰色系统是指部分信息确知，部分信息未知或非确知的系统。部分信息非确知的元素称灰元，部分信息非确知的数称灰数，部分信息非确定的关系称灰关系。

投资是经济系统的子系统，投资系统中含有灰元、灰数、灰关系。货币是灰元，因为货币所代表的社会劳动与商品的数量都非确知。同样的商品在不同的时间、地点、条件下价格不同，因此，一定数量的钱能换来多少商品，也就会因不同的时间、地点、条件而产生变化。投资系统中经常遇到灰数，比如，国际复兴开发银行（IBRD）向人均国民生产总值为2500美元以下的成员国，提供利率为8.5%的贷款，借款期为10～15年。这里的2500美元以下，10～15年都是灰数；又比如称年产值5000万元以上，利税为1000万元以上的企业为大中型企业，这里5000万元以上，1000万元以上都是灰数。对某个项目进行投

资，一般说，只要投资的决策合理，资金使用得当，就会取得一定的效益。然而有哪些因素影响投资效益，因素之间有何关系，这些关系的数量表现如何等都不容易说清楚，这便是灰关系。

投资系统是没有物理原型的系统，我们称为本征性灰系统。本征性灰系统也就是“软”的“抽象”的系统。灰色系统的研究内容包括本征性灰色系统的分析、信息处理、建模、预测、决策等。对具体的投资系统来说，可以用灰色系统理论和方法，判断投资方向、评估投资效益、制定投资政策、进行投资决策，调整投资结构等。

## 二、投资方向的判断

合理的投资是保证国家重点行业，关键行业发展的前提，又是维系经济体制以及相应的经济结构、行业结构、企业结构、产品结构、技术结构的支柱。

长期来，常常按照主观设想的需要，来确定投资方向，从而导致了争项目、争投资、争吃国家大锅饭的投资饥渴症的出现。

应用灰色系统理论，可以利用实效为准绳，以量化结果为依据，判断投资方向。

我们将湖北省1950年至1983年 6 项收入，即国民收入、工业收入、农业收入、商业收入、交通收入、建筑业收入、与 5 项投资即固定资产投资、工业投资、农业投资、科技投资、交通投资的数据，按照灰色系统的关联系数与关联度公式作投资方向的量化研究。

1.关联系数公式

$$\xi_{ij}(K)=\frac{\min\limits_{i}\min\limits_{k}\left|X_0(K)-X_i(K)\right|+\xi\max\limits_{i}\max\limits_{k}\left|X_0(K)-X_i(K)\right|}{\left|X_0(K)-X_i(K)\right|+\xi\max\limits_{i}\max\limits_{k}\left|X_0(K)-X_i(K)\right|}$$

2.关联度公式

$$r_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}(K)$$

$$X_0=[X_0(1),\ X_0(2),\ \cdots,\ X_0(n)]$$

$$X_i=[X_i(1),\ X_i(2),\ \cdots,\ X_i(n)]\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5$$

$X_0$是参考数列，即某项收入历年来的数据。$X_i$是第$i$项投资历年来的数据列。$r_{ij}$是第$j$项投资对于第$i$项收入的关联度。$\xi_{ij}(K)$是$K$时刻第$j$项投资对于第$i$项收入的关联系数。

通过计算获得湖北省五项投资对六项收入的关联度矩阵如下：

| | 国民收入 | 工业收入 | 农业收入 | 商业收入 | 交通收入 | 建筑业收入 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 固定资产投资 | 0.8113 | 0.6417 | 0.8386 | 0.5629 | 0.8190 | 0.7949 |
| 工业投资 | 0.7698 | 0.6243 | 0.8279 | 0.5510 | 0.7790 | 0.8125 |
| 农业投资 | 0.6482 | 0.5782 | 0.71945 | 0.54277 | 0.6486 | 0.7139 |
| 科技投资 | 0.7432 | 0.8090 | 0.5880 | 0.6160 | 0.7070 | 0.584 |
| 交通投资 | 0.9200 | 0.6799 | 0.7346 | 0.5356 | 0.8750 | 0.613 |

从上述矩阵看出：0.8以上的关联度有下述几个：固定资产投资对国民收入0.8113；固定资产投资对农业收入0.8386；

固定资产投资对交通收入0.8190；工业投资对农业收入0.8279；工业投资对建筑业收入0.8125；科技投资对工业收入0.809；交通投资对国民收入0.9200；交通投资对交通收入0.8750。

其中，交通投资对国民收入的关联度为0.9200居首位。因为关联度是因素之间关联的程度或者说影响的程度。交通投资对国民收入的关联度最大，这表示对国民收入影响最大的投资是交通投资。因此，为了促进国民经济的发展，投资的重点应是交通行业。其次，固定资产对农业收入的关联度为0.8386居第二位，这表明农业是一个综合部门，它受到多种行业的影响；另一方面也表明一个部门的投资会对其他部门的收入有某种推动作用。所以，我们说投资是一个系统，不是一个孤立的因素。

此外，从矩阵六个列来看，与商业收入有关的第四列最小，该列关联度如下：固定资产投资与商业收入0.5629；工业投资与商业收入0.5521；农业投资与商业收入0.54277；科技投资与商业收入0.6160；交通投资与商业收入0.5356。这表明商业收入对各种投资的依赖性最小，或者说商业本身具有依靠内因而自我发展的能力，这种能力我们称为活力。所以，商业本身具有活力，不是投资重点，反之，倒是一个积累资金的部门。

## 三、投资效果的评估

对某个列入投资方案的项目，作效益预估是投资决策的重要依据；对某个建设项目作效益评估是投资监督的重要内容。比如世界银行的贷款程序中，就规定贷款项目纳入贷款方案后，将由世界银行组成的评估代表团到现场进行调查研究，并提出评估报告。

通常的评估方法是概率统计方法，但概率统计方法要求大量数据（越多越好），要求数据分布有规律，计算量大。我们建议用灰色系统理论的灰色统计与灰色聚类的方法进行评估。

若记1°，2°，…，$n$°为评估的项目，记1′，2′，3′，…，为评估指标，比如利税、创汇率、市场竞争能力、能源与原材料消耗等。记1，2，3，…为灰类，比如高效率类(1)、中效率类（2）、低效率类（3）。则在给出了白化权函数后，按下述公式：

$$\sigma_{ij}=\sum_{j=1}^{s} f_{jk}(d_{ij})\eta_{jk}$$

可求出第 $i$ 个评估项目属于第$K$类的权。上式中$d_{ij}$是第 $i$ 个项目对于第 $j$ 个评估指标的样本。$f_{jk}$是第 $j$ 个指标属于第$K$个灰类的白化权函数。$\eta_{jk}$是根据白化权函数$f_{jk}$等所算出的系数。如果通过计算得到三个灰类（1，2，3）的权分别为$\sigma_{i1}$、$\sigma_{i2}$、$\sigma_{i3}$，则其全体若构成第 $i$ 个项目的权向量$\sigma_i$：

$$\sigma_i=(\sigma_{i1},\ \sigma_{i2},\ \sigma_{i3})$$

若$\sigma_i$中$\sigma_{i3}$最大，则表示第$i$个项目属于第3灰类，即最低效率类。

例如某项目在指标1′，2′，3′的样本为80万元，40万元，10万元，其白化权函数按万元单位，如下图6-5-1所示。

据灰色聚类的计算得

$$\sigma_{11}=0.3336,\ \sigma_{12}=0.1334,\ \sigma_{13}=0.8557,$$

$$\sigma_1=(\sigma_{11},\ \sigma_{12},\ \sigma_{13})=(0.3336,\ 0.1334,\ 0.8557)$$

从$\sigma_1$中看出$\sigma_{13}=0.8557$最大，所以项目1°属于第3灰类，即低效率类。

图 6-5-1　项目评估

## 四、投　资　预　测

投资预测是指投资需求与供应的预测。具体的微观的投资需求是涉及市场、生产、销售、管理、体制等众多因素的问题，而宏观的投资需要则涉及到更多、层次更高、关系更复杂的因素，然而，宏观的程度越大，则灰度越大，互补作用越强，所以，我们仅限于宏观投资需求的研究。

用灰色系统理论的预测模型GM（1.1），可以作投资需求的宏观预测，其方法大意如下：

令$X^{\circ}$为某部门历年的投资数列，记为

$$X(0)=[X^{(0)}(1),\ X^{(0)}(2),\ \cdots,\ X^{(0)}(n)]$$

由于$X^{(0)}$是原始数据，杂乱无章，没有明显规律。按灰色系统理论，先将原始数据作累加生成，使其变为较为有规律再建模。记$X^{(1)}$为累加生成数列，$X^{(0)}$与$X^{(1)}$的关系如下式：

$$X^{(1)}(K)=\sum_{m=1}^{k}X^{(0)}(m),\quad X^{(1)}=[X^{(1)}(1),\ X^{(1)}(2),\ \cdots,\ X^{(1)}(n)]$$

在$X^{(1)}$与$X^{(0)}$的基础上建立数据矩阵$B$与$Y_N$，

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(X^{(1)}(1)+X^{(1)}(2)), & 1 \\ -\frac{1}{2}(X^{(1)}(2)+X^{(1)}(3)), & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots \\ -\frac{1}{2}(X^{(1)}(n-1)+X^{(1)}(n)), & 1 \end{bmatrix},\qquad Y_N=\begin{bmatrix} X^{(0)}(2) \\ X^{(0)}(3) \\ \cdots\cdots \\ X^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

通过$B$与$Y_N$求模型参数$a$，$u$

$$\begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY_N$$

用$a$，$u$建立$GM$（1.1）预测模型

$$\hat{X}^{(1)}(K+1)=\left(X_{(1)}^{(0)}-\frac{u}{a}\right)e^{-ak}+\frac{u}{a}$$

将模型值还原，得预测值$\hat{X}^{(0)}(K+1)$。

$$\hat{X}^{(0)}(K+1)=\hat{X}^{(1)}(K+1)-\hat{X}^{(1)}(K)$$

根据湖北省1950年到1983年有关数据，我们对有关部门的投资需求作了预测，其结果如下表。

| | | 投资需求量(亿元) | 收　入　(亿元) | 投资与收入之比 |
|---|---|---|---|---|
| 总投资 | 1990年 | 50～68 | 327～437 | 20%以下 |
| | 2000年 | 77～142 | 674～1059 | 10%左右 |
| 工业投资 | 1990年 | 27.6～52.8 | 108.865～179 | 25.3%～29.5% |
| | 2000年 | 39.6～113.9 | 301～476 | 13.1%～24% |
| 农业投资 | 1990年 | 0.3937～2.45 | 139.784～182.5 | 0.28%～1.34% |
| | 2000年 | 0.70～2.97 | 249～411 | 0.028%～0.722% |
| 交通投资 | 1990年 | 3.548～3.8 | 7.51～10.878 | 47.2%～34% |
| | 2000年 | 5.2～6.68 | 14.5～28 | 35.8%～23.8% |

为了开辟多种投资来源，建立多种投资方式，多方面地聚集资金，尽量多地动员社会资金来源满足国家建设的需要。因此，对银行储蓄额进行预测也是必要的。采用灰色预测模型$GM$（1.1）作这种预测，只要四个以上连续的储蓄额的数据，就可建立储蓄额的发展变化模型。曾对武汉市人民银行1978～1984年现金支出建立了如下的预测模型。

$$\hat{X}^{(1)}(K+1)=896127.8979e^{0.103249k}-740815.8979$$

预测精度较高。储蓄模型也就是上述型式的模型，只是参数不同。

## 五、动态投资乘数

1931年英国经济学家卡恩（R.F，Kaln）提出了投资乘数的概念，用来说明收入的增加对国民收入的影响。按控制论的术语，投资乘数即系统的增益（gaim）。取投资乘数$R$的极限值，即

$$R=dy/dI$$

$y$为收入，$I$为投资量，则$dy/dI$是动态投资乘数。

按灰色系统理论的建模，有下述模型：

$$dy/dI=u-ay$$

当知道了$y$相对$I$的变化序列，则上述模型的参数$a$、$u$可通过$GM$（1，1）模型的参数辨识方法得到。知道了$a$与$u$之后，上述模型便可用来预测$R$的发展变化，这时，$R=u-ay$。

上式表明动态投资乘数与收入成线性关系。

## 六、多层次投资决策

投资体制担负着所有制的组织和执行的作用。投资决策的方式是投资体制的具体体

现。在1983年波兰召开的大系统理论国际会议上，我们提出了多层次协调决策。1984年北京召开的中国——北美电力系统现代决策会议上，我们将上述灰色决策用于河南人民胜利渠渠道衬砌的重大决策中。

多层次决策的大意是这样：若将决策者按决策的信息、地位、态度、特长、职权，分为三个层次，即群众层、专家层、财政主管层。如果考虑1′，2′，3′，…，等 $n$ 个决策项目，并按照多投资（1类），中投资（2类），少投资（3类）等几个灰类进行决策。

群众层对各个项目的投资数可以自由地发表意见；专家层则基于自己的技术专长和学识以及所掌握的信息，侧重项目的选择；财政主管层则基于自己的职责，侧重投资灰类的判断。然后将三个层次的决策意向按某种准则进行综合，以得到一个协调了三个层次的意向的决策，这便是多层次决策。

在河南人民胜利渠的衬砌决策中，以“全衬砌”，“主渠、干渠、支渠衬砌”，“主渠，干渠衬砌”，“不衬砌”为四种决策项目，以1800万元以上为多投资，900万元左右为中投资，300万元以下为少投资，作为三个灰类。然后在广泛征求灌区群众意见后，按灰色统计形成群众层的决策（系数）矩阵。由水利专家们对几个衬砌方式作了论证，形成了几个专家层的决策向量。根据河南省新乡地区的财力确定了财政主管层对投资灰类的决策向量，然后用小中取大的保险决策，协调了专家层与群众层的决策意向，用灰色系统的关联分析确定了满意的衬砌项目与投资决策，最后形成的决策是：按1500万元左右的中投资对总干渠和干渠两级作衬砌。

## §6-6　工业系统技术进步的灰色预测

1985年，蒙万跃采用于宏义提出的技术进步计量模式，对湖北省全民所有制工业系统的技术进步进行了计算，运用灰色系统理论进行了预测分析，为湖北省的工业发展提供了必要的信息。

### 一、技术进步的计算

对技术进步进行预测，首先要对技术进步进行计量。从宏观的角度出发，采用下式对技术进步进行计量：

$$A(t)=\left(\frac{Y}{L}\right)^{1-\frac{K}{Y}}\cdot\left(\frac{K}{Y}\right)^{-\frac{K}{Y}} \qquad (6\text{-}6\text{-}1)$$

式中：$A(t)$——技术水平（技术进步）；$Y$——总产值；$K$——固定资产净值；$L$——在业职工人数（劳动力）。

公式（6-6-1）是在柯布-道格拉斯生产函数的基础上推导出来的。在资本主义国家采用柯布-道格拉斯生产函数来研究生产力、研究技术进步是比较普遍的，认为是一种比较科学和比较简单的方法。这种方法是在资本主义市场经济完全竞争的条件下，根据厂商均衡理论得出的。我们是社会主义国家，经济发展计划是以计划经济为主市场调节为辅，与资本主义国家的情况是不同的。但是，目前我们在经济工作中强调把经济搞活，强调效益，越来越注意采用某些市场经济的做法，所以，采用柯布-道格拉斯生产函数来研究技术进步，还是可以的。

根据（6-6-1）式计算，湖北省全民所有制工业从1972年至1982年的技术进步数据时间序列如表6-6-1。

技 术 进 步 数 据　　　　表 6-6-1

| 年　份 | 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 | 1978 | 1979 | 1980 | 1981 | 1982 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 技术水平 | 0.9621 | 0.9617 | 1.0135 | 1.155 | 0.9258 | 1.0026 | 1.17 | 1.0939 | 1.188 | 1.2450 | 1.2304 |

## 二、建立$GM$（1.1）模型进行预测

将上述技术水平的时间序列，按照灰色系统理论构造模块，使用微分拟合，建立预测的数学模型。这种方法的优点，一是可以减少时间序列的随机性，二是可以提高精度。

原数据用$x_i^{(0)}$，$i=1，2，\cdots$，表示

建立白色模块，用$x^{(1)}(i)$，$i=1，2，\cdots$表示，对$x^{(0)}(i)$作一阶累加生成得$x^{(1)}(i)$，例如，$x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)=0.9621$；$x^{(1)}(2)=x^{(0)}(1)+x^{(0)}(2)=0.9621+0.9617=1.9238$；$x^{(1)}(3)=x^{(1)}(2)+x^{(0)}(3)=1.9238+1.0135=2.9373$；$\cdots$。

$x^{(1)}(i)$，$i=1，2，\cdots$，的具体数据如下：$x^{(1)}(1)=0.9621$；$x^{(1)}(2)=1.9238$；$x^{(1)}(3)=2.9373$；$x^{(1)}(4)=4.0923$；$x^{(1)}(5)=5.0181$；$x^{(1)}(6)=6.0207$；$x^{(1)}(7)=7.1907$；$x^{(1)}(8)=8.2846$；$x^{(1)}(9)=9.4726$；$x^{(1)}(10)=10.7176$；$x^{(1)}(11)=11.948$。

构造$B$矩阵

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)), & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)), & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(3)+x^{(1)}(4)), & 1 \\ \vdots & \\ \frac{1}{2}(x^{(1)}(10)+x^{(1)}(11)), & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1.4430 & 1 \\ -2.4306 & 1 \\ -3.5148 & 1 \\ -4.5552 & 1 \\ -5.5194 & 1 \\ -6.6057 & 1 \\ -7.7377 & 1 \\ -8.8785 & 1 \\ -10.0951 & 1 \\ -11.3328 & 1 \end{bmatrix}$$

构造$y_N$向量

$y_N=[0.9617,\ 1.0135,\ 1.155,\ 0.9258,\ 1.0026,\ 1.170,\ 1.0939,\ 1.188,\ 1.2450,\ 1.2304]^T$

采用$GM$（1.1）模型，形式如下式：

$$\frac{dx_t^{(1)}}{dt}+ax_t^{(1)}=u \tag{6-6-2}$$

其时间函数为：

$$x^{(1)}(t)=\left(x^{(1)}(0)-\frac{u}{a}\right)e^{-at}+\frac{u}{a} \tag{6-6-3}$$

根据最小二乘法辨识参数向量为

$$\hat{a}=[a,\ u]^T=(B^TB)^{-1}B^Ty_N \qquad (6\text{-}6\text{-}4)$$

将$B$，$y_N$代入进行计算得：

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}-0.0272\\ 0.9295\end{bmatrix},\quad a=-0.0272,\ u=0.9295,$$

$$u/a=0.9295/-0.0272=-34.1728$$

令$x^{(1)}(0)=x^{(0)}(1)=0.9621$，将$u/a$、$x^{(1)}(0)$、$a$代入（6-6-3）式

$$x^{(1)}(t)=(0.9621+34.1728)e^{-0.0272t}-34.1728$$

或
$$x^{(1)}(k+1)=(0.9621+34.1728)e^{-0.0272k}-34.1728$$

$$x^{(1)}(k+1)=35.1349e^{-0.0272k}-34.1728$$

此即为预测模型。

按照预测模型计算，湖北省全民所有制工业，从1972年至1982年技术水平预测值如表6-6-2，根据表6-6-1和表6-6-2可得图6-6-1（图中虚线为预测值，实线为观测值）。

技术水平预测值　　表6-6-2

| 年份 | 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 | 1978 | 1979 | 1980 | 1981 | 1982 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 技术水平（预测值） | 0.9688 | 0.9955 | 1.0229 | 1.0512 | 1.10801 | 1.1099 | 1.1406 | 1.1719 | 1.2020 | 1.2418 | 1.2716 |

后验差检验：

观测数据均值：$\overline{x}=1.0682$，观测数据方差：

$$S_1^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})^2=0.01246$$

预测误差均值：
$$\overline{\varepsilon}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i=-0.02$$

预测误差方差：
$$S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i-\overline{\varepsilon})^2=0.00137$$

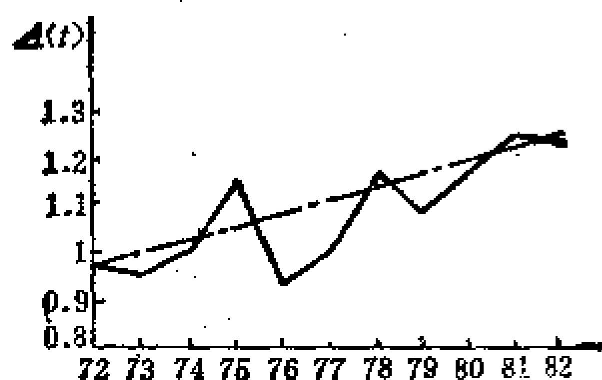



图 6-6-1　$A(t)$—技术水平；$t$—年份

后验差比值：
$$C=\frac{S_2}{S_1}=\frac{\sqrt{0.00137}}{\sqrt{0.01246}}=0.33$$

小误差频率：
$$P=P\{|\varepsilon_i-\overline{\varepsilon}|<0.6745S_1\}$$
$$=P\{|\varepsilon_i-\overline{\varepsilon}|<0.6745\times0.1116\}$$
$$=P\{|\varepsilon_i-\overline{\varepsilon}|<0.0753\}=1$$

根据后验差检验，$C=0.33<0.35$，$P=1>0.95$，预测精度的等级属于"好(good)"，预测模型是可信的，预测值是可用的。

按照预测模型计算，湖北省全民所有制工业的技术水平，从1983年到2000年的预测值如表6-6-3。

湖北省工业技术水平预测值　　表 6-6-3

| 年　份 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 技术水平（预测值） | 1.3067 | 1.3427 | 1.3797 | 1.4178 | 1.4569 | 1.497 | 1.5383 | 1.5808 | 1.6243 |
| 年　份 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 |
| 技术水平（预测值） | 1.6691 | 1.7151 | 1.7624 | 1.8110 | 1.861 | 1.9123 | 1.965 | 2.0191 | 2.0749 |

## 三、结 果 分 析

（1）从图6-6-1可看出：根据（6-6-1）式计算所得技术水平$A(t)$的变化情况，反映了从七十年代初到八十年代初政治运动，社会经济变化的实际情况。1972年至1976年间，政治运动起伏，经济遭到极大的破坏，陷于停滞，技术进步的波动也大。1976年后，经济情况好转，技术水平有了比较大的，比较稳定的提高。

（2）从图6-6-1还可看出，政治上比较动乱的时候，预测值与观测值相差比较大，政治局面安定时，预测值与观测值比较接近，今后政治上会更稳定，经济会稳步提高，可以相信，预测值与实际情况会更接近。

（3）按党的十二大提出的奋斗目标，到2000年产值翻两番。湖北省全民所有制工业总产值需要达到727.88亿元，根据湖北省历年统计资料分析，固定资产每年递增4.53%，劳动力每年递增5.8%是可以的。如果按照这个速度增长，到2000年，湖北省全民所有制工业固定资产净值为380.9347亿元，劳动力（职工人数）295.4578万人，则2000年的技术水平是2.15。这个数字与预测的数字接近。如果我们不断提高管理水平；加强技术培训提高职工素质；引进新技术，加强工业本身的技术改造，很好利用新的技术革命带来的好处，提高经济效益，到2000年，技术水平将会超过2.15，用同样多的投入资金和劳动力；得到的总产值将会超过翻两番的总产值。

## §6-7　农工业区划中多目标灰色局势决策[108]

1985年，王学萌应用灰色系统理论和方法，以山西省离石县为例，对综合农工业区域中的多目标局势决策，作了探讨，以便把产值、收入、效益等目标集作一体综合分析，从中求得一个较全面的好方案。

### 一、多目标局势决策的数学方法

1.决策元、决策向量与决策矩阵

决策是事件、对策及效果三者的总称。记事件为$a_i$，对策为$b_j$，其二元组合$(a_i, b_j)$称为局势，记为$S_{ij}=(a_i, b_j)$。意即用第$j$个对策$(b_j)$去对付第$i$个事件的局势。

在决策中，往往对某一类具有相近性的事件进行研究，而这类事件是以某个特定事件为核心的，这样一个事件集，就是核心事件的邻域，即以核心事件为白化事件的灰事件。

对付同一事件，可以有一类相近的对策，这些对策必有某个重点对策，围绕重点对策所构成的对策集称为某一事件的对策邻域，或者某一事件以重点对策为白化对策的灰对策集。灰事件集与灰对策集的二元组合，便是灰局势集。灰色局势是以特定的事件，特定的对策为核心组成的。我们在进行决策时，必需根据某些准则来处理相近性，并且应给相近性一个量化测度，称相近准则为决策目标，称相近测度为局势效果测度。

记局势$S_{ij}$与局势效果测度$r_{ij}$的全体

$$r_{ij}/s_{ij}=r_{ij}/(a_i,\ b_j) \tag{6-7-1}$$

为决策元。

若有事件$a_1$，$a_2$，…，$a_n$，有对策$b_1$，$b_2$，…，$b_m$，则对于同一事件$a_i$，可以用$b_1$，$b_2$……，$b_m$等$m$个对策去对付，于是构成

$$(a_i,\ b_1),\ (a_i,\ b_2),\ \cdots,\ (a_i,\ b_m) \tag{6-7-2}$$

等$m$个局势，这些局势相应的决策元可排成一行，便构成决策行。

$$\delta_i=\left[\frac{r_{i1}}{s_{i1}},\quad \frac{r_{i2}}{s_{i2}},\ \cdots,\quad \frac{r_{im}}{s_{im}}\right] \tag{6-7-3}$$

式中$r_{ij}$为局势$s_{ij}$的效果测度。

同样对于对策$b_j$可以用$a_1$，$a_2$，…，$a_n$去匹配其对应的决策元可排成一列，便构成决策列：

$$Q_j=\left[\frac{r_{1j}}{s_{1j}},\quad \frac{r_{2j}}{s_{2j}},\ \cdots,\quad \frac{r_{nj}}{s_{nj}}\right]^T \tag{6-7-4}$$

将决策行$\delta_i(i=1,\ 2,\cdots,n)$与决策列$Q_j(j=1,2,\cdots,\ m)$排列起来，便构成矩阵$M$：

$$M=\begin{bmatrix} r_{11}/s_{11} & r_{12}/s_{12} & \cdots & r_{1m}/s_{1m} \\ r_{21}/s_{21} & r_{22}/s_{22} & \cdots & r_{2m}/s_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1}/s_{n1} & r_{n2}/s_{n2} & \cdots & r_{nm}/s_{nm} \end{bmatrix} \tag{6-7-5}$$

则称$M$为决策矩阵，可记为$M(\delta_i,\ Q_j)$

2.效果测度

效果测度就是对各个局势所产生的实际效果进行比较的量度。对于时间序列来说，就是两比较序列在同一时刻的关联系数，计算公式为：

$$r_{ij}(t)=\frac{\Delta\min+\Delta\max}{\Delta_{ij}(t)+\Delta\max} \tag{6-7-6}$$

式中$\Delta\min$，$\Delta\max$分别为两比较序列之间的各个时刻相减的最小差值和最大差值（绝对值），$\Delta_{ij}(t)$是在任意$t$时刻的差值。

对于单点来说，效果测度可分为：

（1）上限效果测度，计算公式为

$$r_{ij}=u_{ij}/u_{\max}\qquad u_{ij}\leqslant u_{\max} \tag{6-7-7}$$

式中：$u_{ij}$——局势$S_{ij}$的实测效果；$u_{\max}$——局势$S_{ij}$所有实测效果的最大值，可见$r_{ij}\leqslant 1$。

（2）下限效果测度。计算公式为：

$$r_{ij}=u_{\min}/u_{ij}\qquad u_{ij}\geqslant u_{\min} \tag{6-7-8}$$

式中：$u_{\min}$——局势$s_{ij}$所有实测效果中的最小值。则$r_{ij}\leqslant 1$。

（3）中心效果测度计算公式为：

$$r_{ij}=\frac{\min\{u_{ij},\ u_0\}}{\max\{u_{ij},\ u_0\}} \tag{6-7-9}$$

式中：$u_0$——样本中的参考点。

在实际应用中，究竟采用那种效果测度，依目标的性质而定。如产值、效益之类是越大越好，可采用上限效果测度；如投资、灾变等越少越好，可用下限效果测度；对于降水、肥力等以适量为宜，可采用中心效果测度。

此外，对于有效益的时间序列，采用系统的稳态效果测度，需建立其$GM$动态模型求之。

3.多目标决策

目标数多于一个的决策为多目标决策或多目标灰色决策。决策就是在相近的一组局势中，选效果最优者，或者选与关键局势、核心局势最接近的一组局势。

当局势有几个目标时，则记第$K$个目标的效果测度为$r_{ij}^{(K)}$，其相应的决策元为$r_{ij}^{(K)}/S_{ij}^{(K)}$。为此有相应的决策向量$(\delta_i^{(K)},\ Q_j^{(K)})$及决策矩阵$M^{(K)}$。

$$M^{(K)}=\begin{bmatrix} r_{11}^{(K)}/S_{11}^{(K)} & r_{12}^{(K)}/S_{12}^{(K)}\cdots r_{1m}^{(K)}/S_{1m}^{(K)} \\ r_{21}^{(K)}/S_{21}^{(K)} & r_{22}^{(K)}/S_{22}^{(K)}\cdots r_{2m}^{(K)}/S_{2m}^{(K)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ r_{n1}^{(K)}/S_{n1}^{(K)} & r_{n2}^{(K)}/S_{n2}^{(K)}\cdots r_{nm}^{(K)}/S_{nm}^{(K)} \end{bmatrix} \tag{6-7-10}$$

那么，多目标的局势决策综合矩阵$M^{(\Sigma)}$为

$$M^{(\Sigma)}=\begin{bmatrix} r_{11}^{(\Sigma)}/S_{11}^{(\Sigma)} & r_{12}^{(\Sigma)}/S_{12}^{(\Sigma)}\cdots r_{1m}^{(\Sigma)}/S_{1m}^{(\Sigma)} \\ r_{21}^{(\Sigma)}/S_{21}^{(\Sigma)} & r_{22}^{(\Sigma)}/S_{22}^{(\Sigma)}\cdots r_{2m}^{(\Sigma)}/S_{2m}^{(\Sigma)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ r_{n1}^{(\Sigma)}/S_{n1}^{(\Sigma)} & r_{n2}^{(\Sigma)}/S_{n2}^{(\Sigma)}\cdots r_{nm}^{(\Sigma)}/S_{nm}^{(\Sigma)} \end{bmatrix} \tag{6-7-11}$$

矩阵的元素按下式计算：

$$r_{ij}^{(\Sigma)}=\sum_{K=1}^{N} r_{ij}^{(K)}/N \tag{6-7-12}$$

4.决策准则

决策就是挑选效果最好的局势。可由事件选择最好的决策，称为行决策，也可由对策匹配最适宜的事件，称为列决策。其方法是：

行决策：对于决策矩阵$M^{(\Sigma)}$在决策行$\delta_i$中取效果测度最大的决策元。

$$r_{ij*}^{(\Sigma)}=\max_j r_{ij}^{(\Sigma)}=\max\{r_{i1}^{(\Sigma)},\ r_{i2}^{(\Sigma)},\ \cdots,\ r_{im}^{(\Sigma)}\} \tag{6-7-13}$$

则$r_{ij*}^{(\Sigma)}/S_{ij*}$称为行决策元，$S_{ij*}$为最优决策局势，$b_j^*$是对付事件$a_i$的最优对策。

列决策：对于决策矩阵$M^{(\Sigma)}$在决策列$Q_j$中选效果测度最大的决策元。

$$r_{i*j}^{(\Sigma)}=\max_i r_{ij}^{(\Sigma)}=\max\{r_{1j}^{(\Sigma)},\ r_{2j}^{(\Sigma)},\ \cdots,\ r_{nj}^{(\Sigma)}\} \tag{6-7-14}$$

则$r_{i*j}^{(\Sigma)}/S_{i*j}$称为列决策元。$S_{i*j}$为最优决策局势，即$a_i^*$是对于对策$b_j$最适宜的事件。

根据行决策与列决策的结果，如有必要需建立优序化决策矩阵，再进行综合评判，选择最优决策。

## 二、灰色局势决策在农工业区划研究中的应用

将以上方法应用于山西省离石县综合农工业区划的研究中。该县需在已运用灰色多元分析方法划分为七个农工业区域的基础上，就选择发展种植业、林业、牡业、工副业四个

项目，按照产值、收入、经济效益三个目标进行多目标的灰色局势决策。

1.区域内各项目标的实际效果计算

根据该县1979年～1983年五年的序列统计资料，经换算求得各目标值如表6-7-1所示。

目 标 产 值　　　　表6-7-1

| 项目 | | 种植业 | | | 林业 | | | 畜牧业 | | | 工副业 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 产值 | 收入 | 效益 | 产值 | 收入 | 效益 | 产值 | 收入 | 效益 | 产值 | 收入 | 效益 |
| 分区 | Ⅰ | 128 | 123 | 1.36 | 53 | 0.55 | 2.68 | 33 | 22.4 | 0.04 | 4 | 3.90 | 0.37 |
| | Ⅱ | 212 | 117 | 0.75 | 99 | 0.90 | 1.62 | 59 | 4.4 | 0.53 | 25 | 14.0 | 2.54 |
| | Ⅲ | 281 | 98 | 1.03 | 197 | 1.14 | 3.33 | 94 | 5.3 | 0.15 | 10 | 4.9 | 1.42 |
| | Ⅳ | 508 | 84 | 0.82 | 680 | 0.95 | 3.89 | 156 | 5.0 | 0.44 | 24 | 4.7 | 0.60 |
| | Ⅴ | 1993 | 67 | 0.68 | 569 | 3.55 | 1.99 | 441 | 2.9 | 0.30 | 383 | 20.9 | 0.83 |
| | Ⅵ | 543 | 58 | 0.97 | 542 | 1.37 | 1.16 | 129 | 2.2 | 0.41 | 34 | 5.1 | 0.39 |
| | Ⅶ | 586 | 73 | 1.14 | 433 | 0.65 | 2.93 | 192 | 5.4 | 0.51 | 41 | 6.8 | 0.38 |

（1）产值：求得各分区各业每百亩土地的产值（元）

（2）收入：求得各分区各业人均年收入（元）

（3）经济效益：按效益＝产值－投入/投入计算；

利用表6-7-1统计计算数据便可构成各个目标的实际效果矩阵$u^{(K)}$。

$$u^{(K)}=[u_{ij}^{(K)}],\qquad K=1,2,3,\ i=1,2,\cdots,7,\ j=1,2,3,4。$$

2.效果测度的选择与效果测度矩阵计算

对于百亩产值、人均收入和经济效益三项指标均应选用上限效果测度，即产值越高越好，收入越多越好，效益越大越好。因此，各局势的效果测度$r_{ij}^{(K)}$用下式计算：

$$r_{ij}^{(K)}=u_{ij}^{(K)}/u_{\max}^{(K)} \qquad (6\text{-}7\text{-}15)$$

将电子计算机计算结果分别列成矩阵。

产值的效果测度矩阵为

$$M_1^{(1)}=\begin{bmatrix} 0.069/S_{11} & 0.026/S_{12} & 0.016/S_{13} & 0.002/S_{14} \\ 0.106/S_{21} & 0.049/S_{22} & 0.029/S_{23} & 0.012/S_{24} \\ 0.140/S_{31} & 0.098/S_{32} & 0.047/S_{33} & 0.005/S_{34} \\ 0.254/S_{41} & 0.341/S_{42} & 0.078/S_{43} & 0.012/S_{44} \\ 1.0/S_{51} & 0.295/S_{52} & 0.221/S_{53} & 0.192/S_{54} \\ 0.272/S_{61} & 0.271/S_{62} & 0.064/S_{63} & 0.017/S_{64} \\ 0.294/S_{71} & 0.217/S_{72} & 0.096/S_{73} & 0.020/S_{74} \end{bmatrix}$$

收入的效果测度矩阵为：

$$M^{(2)}=\begin{bmatrix} 1.000/S_{11} & 0.004/S_{12} & 0.182/S_{13} & 0.031/S_{14} \\ 0.951/S_{21} & 0.007/S_{22} & 0.035/S_{23} & 0.113/S_{24} \\ 0.796/S_{31} & 0.009/S_{32} & 0.043/S_{33} & 0.039/S_{34} \\ 0.682/S_{41} & 0.007/S_{42} & 0.040/S_{43} & 0.038/S_{44} \\ 0.544/S_{51} & 0.028/S_{52} & 0.023/S_{53} & 0.169/S_{54} \\ 0.471/S_{61} & 0.011/S_{62} & 0.017/S_{64} & 0.041/S_{64} \\ 0.593/S_{71} & 0.005/S_{72} & 0.043/S_{74} & 0.055/S_{74} \end{bmatrix}$$

经济效益的效果测度矩阵为

$$M^{(1)}=\begin{bmatrix} 0.349/S_{11} & 0.688/S_{12} & 0.010/S_{13} & 0.233/S_{14} \\ 0.194/S_{21} & 0.416/S_{22} & 0.136/S_{23} & 0.678/S_{24} \\ 0.264/S_{31} & 0.856/S_{32} & 0.038/S_{33} & 0.365/S_{34} \\ 0.210/S_{41} & 1.000/S_{42} & 0.113/S_{43} & 0.154/S_{44} \\ 0.174/S_{51} & 0.511/S_{52} & 0.077/S_{53} & 0.228/S_{54} \\ 0.249/S_{61} & 0.298/S_{62} & 0.105/S_{63} & 0.100/S_{64} \\ 0.293/S_{71} & 0.766/S_{72} & 0.131/S_{73} & 0.174/S_{74} \end{bmatrix}$$

3.计算多目标决策矩阵

利用$M^{(1)}$、$M^{(2)}$、$M^{(3)}$，按下列公式计算综合决策矩阵$M^{(Z)}$的各元素之值

$$r_{ij}^{(Z)}=\sum_{K=1}^{3} r_{ij}^{(K)}/3 \qquad (6\text{-}7\text{-}16)$$

将电子计算机计算结果排成矩阵则得多目标决策矩阵：

$$M^{(Z)}=\begin{bmatrix} 0.472/S_{11} & 0.240/S_{12} & 0.069/S_{13} & 0.085/S_{14} \\ 0.416/S_{21} & 0.157/S_{22} & 0.067/S_{23} & 0.268/S_{24} \\ 0.400/S_{31} & 0.321/S_{32} & 0.042/S_{33} & 0.136/S_{34} \\ 0.382/S_{41} & 0.449/S_{42} & 0.077/S_{43} & 0.068/S_{44} \\ 0.573/S_{51} & 0.278/S_{52} & 0.107/S_{53} & 0.196/S_{54} \\ 0.331/S_{61} & 0.193/S_{62} & 0.062/S_{63} & 0.052/S_{64} \\ 0.393/S_{71} & 0.329/S_{72} & 0.092/S_{73} & 0.083/S_{74} \end{bmatrix}$$

4.最优局势的选择

对决策矩阵$M^{(Z)}$，分别按行与列选择最优局势，先进行行决策，如

$$\delta_1=\{0.472/S_{11},\ 0.240/S_{12},\ 0.069/S_{13}\ \ 0.085/S_{14}\}$$

取最大值：$r_{1j*}^{(Z)}/S_{1j*}=\max_{j}\{r_{1j}^{(Z)}/S_{1j}\}=0.472/S_{11}$

同理：$r_{2j*}^{(Z)}/S_{2j*}=0.416/S_{21}$；$r_{3j*}^{(Z)}/S_{3j*}=0.40/S_{31}$；$r_{4j*}^{(Z)}/S_{4j*}=0.449/S_{42}$；

$r_{5j*}^{(Z)}/S_{5j*}=0.573/S_{51}$；$r_{6j*}^{(Z)}/S_{6j*}=0.331/S_{61}$；$r_{7j*}^{(Z)}/S_{7j*}=0.393/S_{71}$。

再按列决策，如

$$Q_1=\left\{\frac{0.472}{S_{11}},\ \frac{0.416}{S_{21}},\ \frac{0.400}{S_{31}},\ \frac{0.382}{S_{41}},\ \frac{0.571}{S_{51}},\ \frac{0.331}{S_{61}},\ \frac{0.393}{S_{71}}\right\}^{*}$$

取最大值. $r_{i*1}^{(Z)}/S_{i*1}=\max_{i}\{r_{i1}^{(Z)}/S_{i1}\}=0.571/S_{51}$

同理：$r_{i*2}^{(Z)}/S_{i*2}=0.449/S_{42}$；$r_{i*3}^{(Z)}/S_{i*3}=0.107/S_{53}$；$r_{i*4}^{(Z)}/S_{i*4}=0.268/S_{24}$。

归纳起来便可得出：

行最优局势有：$S_{11}$，$S_{21}$，$S_{31}$，$S_{42}$，$S_{51}$，$S_{61}$，$S_{71}$

列最优局势有：$S_{51}$，$S_{42}$，$S_{53}$，$S_{24}$

从以上行与列决策选择的最优局势中可见：$S_{51}$，$S_{42}$是共同的，即Ⅴ区发展种植业，Ⅳ区发展林业。但是也明显存在两个问题：1°，从行决策看几乎各区都以发展种植业为最优局势，从全局来看很不协调；2°，从列决策看，在一列内虽是最优局势，但全局来看效果测度仍然很低，如$S_{53}$即在Ⅴ区发展畜牧业其效果测度仅0.107，还不足$S_{51}$的1/5，因此对行、

列决策需作进一步协调和优化。

5.优序化决策矩阵与灰色局势决策

区划的决策是为确定各个农工业区域的主要发展方向。所以，首先对决策矩阵$M^{(2)}$按行进行优序化变换，即在一行内将效果测度按大小顺序排列求得$M_1^{(2)}$矩阵。再对$M_1^{(2)}$按列进行优序化变换得$M_2^{(2)}$。如未达到行、列优序化，可反复进行变换，直到行列全部元素优序化为止，便求得优序化决策矩阵$M^*$，该矩阵中效果测度从左到右，从上到下均为递减序列：

$$M^*=\begin{bmatrix} 0.573/S_{51} & 0.382/S_{41} & 0.196/S_{54} & 0.107/S_{53} \\ 0.472/S_{11} & 0.329/S_{72} & 0.157/S_{22} & 0.083/S_{74} \\ 0.449/S_{42} & 0.321/S_{32} & 0.136/S_{34} & 0.069/S_{13} \\ 0.416/S_{21} & 0.278/S_{52} & 0.090/S_{73} & 0.068/S_{44} \\ 0.400/S_{31} & 0.268/S_{24} & 0.085/S_{14} & 0.067/S_{23} \\ 0.393/S_{71} & 0.240/S_{12} & 0.077/S_{43} & 0.052/S_{64} \\ 0.331/S_{61} & 0.193/S_{62} & 0.062/S_{63} & 0.042/S_{33} \end{bmatrix}$$

根据优序化决策矩阵便可以进行多目标灰色局势决策，具体方法是：

（1）将优序化决策矩阵沿主对线方向将决策元划分为若干梯段。

（2）从上向下逐段按事件（农工业区域）依次选1～2个对策（发展项目），同时兼顾各业协调发展和全局效益。如在上面矩阵中首先选择了$S_{51}$，$S_{11}$两个最优局势，即确定V区和I区发展种植业，那么一般来说，下边的$S_{21}$，$S_{31}$，$S_{71}$，$S_{61}$就不再选了，而依次到下一段选择较好局势。

（3）在一个阶段内，一般可按等效选择。必要时，仍应比较效果测度的大小来定。

（4）做为灰色决策有一定的选择范围（灰色度），选择者可根据实际调查情况作些定性处理。

根据以上方法对离石县各农工业区域的灰色局势决策提出如下意见：

I区选择$S_{11}$（种植业），$S_{13}$（畜牧业）；

II区选择$S_{24}$（工副业），$S_{22}$（林业）；

III区选择$S_{32}$（林业），$S_{34}$（工副业）；

IV区选择$S_{42}$（林业），$S_{44}$（种植业）；

V区选择$S_{51}$（种植业），$S_{54}$（工副业）；

VI区选择$S_{61}$（种植业），$S_{62}$（林业）；

VII区选择$S_{72}$（林业），$S_{73}$（畜牧业）；

此外，根据优序化决策矩阵，下两个局势$S_{53}$（V区畜牧业），$S_{74}$（VII区工副业）可作进一步考虑。

## 三、简 单 结 论

（1）从定性研究到定性与定量相结合研究。

（2）由单目标决策到多目标决策。

（3）变行、列最优局势选择到优序化决策矩阵的灰色局势决策。

## §6-8 现代工厂地址选择的数学模型[109]

1983年，王成斌从系统的观点，分析了现代工厂地址选择是关于生产力布局及经济效益的重大决策，涉及到经济的和非经济的多种因素。按照最小成本和最大受益两类准则，建立了若干数学模型。通过实例的具体应用，表明了数学模型是处理厂址选择的一种科学方法。

### 一、厂址选择的因素

现代工厂是一个社会-经济-技术系统。如图6-8-1所示，中间的实线方框表示工厂的边界，虚线表示工厂的外部环境（社会和自然），箭头表示工厂同环境的关系。工厂从社会取得物料、能源和信息等（输入），在一定的社会因素和自然因素作用下，经过工厂内部的技术和社会过程（加工），供给社会有用的产品及服务（输出），并同社会互相影响、互相作用。这种由输入、加工、输出和社会反馈构成的开式系统，是一切工厂存在的普遍形态。图6-8-1中Ⅰ类输入构成生产成本，Ⅱ类输出本质上是一种社会耗费，通常称为社会成本。工厂把产品发送到消费地点，要付出运输费和其它周转费，这叫做分配成本。此三项成本都同厂址有直接关系。影响成本的大部分因素，可以用数字表示，故称为定量因素。选址不仅要考虑定量因素，还要考虑复杂的不易定量化的定性因素，如当地科研和工业力量、地方党政机关的领导精力、文化背景和教育情况、生活条件，群众对建厂的态度等。在定性因素中，尤其重要的是国家的方针政策，比如关于工业布局的方针、保护自然资源的方针，控制城市和旅游区污染的方针，开发工业落后地区的方针，大区工业配套的方针及引进外资的方针等。这些因素对工厂选址往往是极其重要的约束条件。

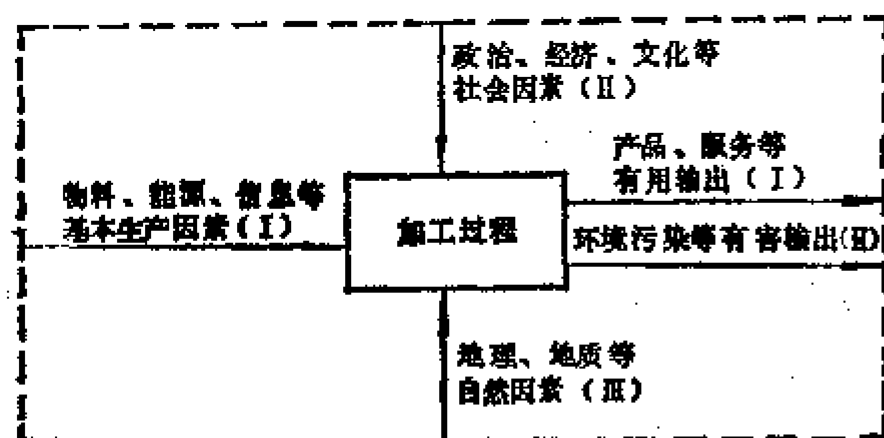



图 6-8-1 厂址选择关系

上述定量和定性因素中，任何备选地址都必须满足的若干因素，叫做先决因素或先决条件，比如根据战略需要和生产力布局，某些工业划定在特定地区兴办，某些工业必须接近原料产地和能源。所谓最佳厂址，就是在满足先决条件的各备选厂址中，按照一定标准挑选出最满意的厂址。

### 二、厂址选择的准则和数学模型

以下讨论两类选址决策的准则及其数学模型。第一类是简化模型，以工厂投产后年度

总支出（即年度总成本加均摊的基建费）为基础进行比较；第二类是通用模型，以工厂在经济寿命期内总受益的现值为基础进行比较。

1.简化模型

1）基本假定

（1）在各备选地址建厂，其规模、经济寿命都相同，并且保持均匀生产，年产量不变，因而可以按年度总成本进行比较。（2）在各备选地址建厂，基建工期都较短，不考虑基建投资年度分配的差异，因而可以按基建总投资进行比较。

2）决策准则和数学模型

准则1°：最佳厂址的基建投资年等价额，年度生产成本、年度分配成本之和最小，即年度总支出最小，经济效益最高。

令$V$=基建投资；$n$=工厂的经济寿命期（单位年），$S$=经济寿命期终了时工厂的残余价值；$C_p$=工厂满额生产时年度生产成本；$C_d$=工厂年度分配成本；$i$=基建贷款的年利率；$A$=基建投资的年等价额，即把基建投资加上相应的利息，按工厂受益期（经济寿命期）每年均匀偿付的数额。计算公式如下：

假定每年末偿付额为$A'$，则$n$年末连本带利所付总额$F$为：

$$F = A'[1+(1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^{n-1}]$$

即

$$F = A'\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \tag{6-8-1}$$

把$F$折算成第一年初一次投资额$V$，得

$$F = V(1+i)^n \tag{6-8-2}$$

由式（6-8-1）和（6-8-2）得

$$A' = V\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] \tag{6-8-3}$$

工厂在第$n$年末的残余价值$S$相当于当时的收入，按（6-8-1）折合为年度等价支出$A''$，得

$$A'' = -S\frac{i}{(1+i)^n-1} \tag{6-8-4}$$

将式（6-8-1）和式（6-8-4）两端分别相加，得

$$A = (V-S)\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]+Si \tag{6-8-5}$$

于是，本准则的数学表达式为

$$\min\left[(V-S)\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}+Si+C_p+C_d\right]_j \tag{6-8-6}$$

（6-8-6）式中方括号内各项之和代表年度总支出，足码$j$表示年度总支出是地址$j$的函数。

年度生产成本$C_p$包括材料费$C_m$、公共服务（水、电、气、设备维修等）费$C_u$、职工工资$C_w$和经常费（包括管理费、财产保险及各种杂支）$C_b$，即

$$C_p = C_m+C_u+C_w+C_b \tag{6-8-7}$$

将式（6-8-7）代入式（6-8-6），本准则可表达为

$$\min[(V-S)\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}+Si+C_m+C_u+C_w+C_b+C_d]_j \tag{6-8-8}$$

如果由于建厂给社会带来损失（如占用良田或造成土质恶化使农业减产），式（6-8-8）中还应计入社会成本；由于建厂给社会带来的附加益处（如改善道路减少了运输费），

则应作为负值社会成本计入式（6-8-8）。当然这是从国家角度考虑的，作为企业社会附加受益并不能收回。

**准则2°**：最佳厂址是年度总支出和各定性因素保持最佳平衡（即综合优点最大）的厂址。

在备选厂址中，如果定性因素差别很大，就不能忽视。但定性因素不能用货币表征，无法同定量因素直接比较。解决可比性的方法之一是引入一个新的无量钢数——优度，分别表示各厂址的两类因素在全部备选厂址中的相对优点（即相对价值）。显然，优度最小值为0，表示该因素对比评价结果无优点；优度最大值为1表示该因素相对地说具有100%优点。分别求出各厂址两类因素优度的加权和，其中加权值最大的地址为最佳厂址。令$M_{Bj}$ = 第$j$个地址定量因素的优度，$M_{Nj}$ = 第$j$个地址定性因素的优度，$a = M_B$的权值，$0 \leqslant a \leqslant 1$，则本准则的数学表达式为

$$\max[aM_{Bj} + (1-a)M_{Nj}] \qquad (6\text{-}8\text{-}9)$$

如果有$n$个备选厂址进行比较，则$\sum_{j=1}^{n} M_{Bj} = 1$。

令$C_{oj}$为第$j$个厂址相应的年度总支出，则其倒数$\frac{1}{C_{oj}}$可作为表征该厂址诸定量因素综合优点的一种绝对尺度。因此，第$j$个厂址的优度为

$$M_{Bj} = \frac{1}{C_{oj}} \div \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{C_{oj}} = \frac{1}{C_{oj}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_{oj}}} \qquad (6\text{-}8\text{-}10)$$

$M_{Nj}$按以下方法确定：根据各定性因素的相对重要性，在$m$个定性因素中，给予第$K$个因素以适当的权值$W_K$，并使$\sum_{K=1}^{m} W_K = 1$。

在$n$个备选厂址中，给予第$j$个地址的第$K$个因素以适当的分数$S_{jK}$，表示该因素在$n$个厂址中的相对优点，（按一定标准给分，最后将各地址同一因素的总分约化为1），即$\sum_{j=1}^{n} S_{jK} = 1$，则

$$M_{Nj} = \sum_{K=1}^{m} W_K S_{jK}, \quad \sum_{j=1}^{n} M_{Nj} = 1 \qquad (6\text{-}8\text{-}11)$$

把式（6-8-10）和式（6-8-11）代入式（6-8-10），则

$$\max\left[a\frac{1}{C_{oj}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_{oj}}} + (1-a)\sum_{K=1}^{m} W_K S_{jK}\right] \qquad (6\text{-}8\text{-}12)$$

**准则3°**：最佳厂址是满足先决条件下年度总支出最低的厂址。

一地址满足先决条件时，其优度为1，表示可作为备选地址，不满足时，其优度为0，表示该地址应当排除，没有中间情况。先决条件的总优度为各个先决条件优度之积。令$P_{jq}$ = 第$j$个地址第$q$个先决条件的优度，$M_{pj}$ = 第$j$个地址（共$r$个先决条件）的总优度，则

$$M_{pj} = \prod_{q=1}^{r} p_{jq} \qquad (6\text{-}8\text{-}13)$$

把式（6-8-13）同式（6-8-8）结合起来，本准则为

$$\min\left\{\frac{1}{\prod p_{jq}}\left[(V-S)\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} + Si + C_m + C_u + C_w + C_b + C_d\right]_j\right\} \qquad (6\text{-}8\text{-}14)$$

**准则4°：最佳厂址是满足先决条件下定量因素和定性因素保持最佳平衡的厂址。**

这是第一类选址准则的完整表述，前三个准则都是这一准则的特例。把式（6-8-13）同式（6-8-12）结合起来，本准则可表达为：

$$\max\left\{\prod_{q=1}^{r} P_{jq}\left[\alpha\frac{1}{C_{oj}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_{oj}}}+(1-\alpha)\sum_{K=1}^{m}W_K S_{jK}\right]\right\} \tag{6-8-15}$$

2.通用模型

在一般情况下，各备选地址的建厂工期并不相同，受益有早有晚；在建设期内每年投资分配也不相同，付息多少不一，投产后生产能力要逐步发挥，维修费逐年增加，加之其它原因，年度总支出是变动的。显然，在更接近实际的一般情况下，第一类模型会带来较大误差，下述第二类模型则没有第一类的限制。

令$T$＝基本建设工期；$V$＝基本建设投资的等价现值（计算现值以开始基建第一年初为准）；$v_t$＝第$t$年基本建设投资额，则

$$V=\sum_{t=1}^{T}v_t/(1+i)^t \tag{6-8-16}$$

如果在$T$年内每年投资额相同，均为$v_0$，则

$$V=v_0\frac{(1+i)^T-1}{i(1+i)^T} \tag{6-8-17}$$

令$R_t$＝工厂第$t$年的总收入，$C_{ot}$＝工厂第$t$年的总成本，则工厂在经济寿命期内总盈利的等价现值$P_0$为

$$P_0=\sum_{t=T+1}^{T+n}\frac{R_t-C_{ot}}{(1+i)^t}+\frac{S}{(1+i)^{T+n}}-\sum_{t=1}^{T}\frac{v_t}{(1+i)_t} \tag{6-8-18}$$

如果基建费年度分配相同，则式（6-8-18）变为

$$P_0=\sum_{t=T+1}^{T+n}\frac{R_t-C_{ot}}{(1+i)^t}+\frac{S}{(1+i)^{T+n}}-v_0\frac{(1+i)^T-1}{i(1+i)^T} \tag{6-8-19}$$

从式（6-8-18）和（6-8-19）可看出：对于相同的基建投资$V$，建设工期$T$越长，受益越晚，获利现值越少；在相同的条件下，学习期（由投产到达产经过的年数）越长，获利越小。

按照$P_0$进行评价，在$n$个备选地址中，第$j$个地址的优度可以用下式表示：

$$M'_{Kj}=P_{oj}\Big/\sum_{j=1}^{n}P_{oj},\quad \sum_{j=1}^{n}M'_{Kj}=1。$$

至此，我们可以建立第二类准则及数学模型：

**准则5°：最佳厂址在经济寿命期内总盈利最大。**

$$\max\left\{\sum_{t=T+1}^{T+n}\frac{R_t-C_{ot}}{(1+i)^t}+\frac{S}{(1+i)^{T+n}}-\sum_{t=1}^{T}\frac{v_t}{(1+i)^t}\right\}_j \tag{6-8-20}$$

**准则6°：最佳厂址是总盈利和定性因素保持最佳平衡的厂址。**

$$\max\left[\alpha\frac{P_{oj}}{\sum_{j=1}^{n}P_{oj}}+(1-\alpha)\sum_{K=1}^{m}W_K S_{jK}\right] \tag{6-8-21}$$

**准则7°：最佳厂址要求满足先决条件下总盈利最大。**

$$\max\left\{\prod_{q=1}^{r}P_{jq}\left[\sum_{t=T+1}^{T+n}\frac{R_t-C_{ot}}{(1+i)^t}+\frac{S}{(1+i)^{T+n}}-\sum_{t=1}^{T}v_t\frac{1}{(1+i)^t}\right]_j\right\} \tag{6-8-22}$$

准则8°：最佳厂址要求在满足先决条件下，总盈利和定性因素保持最佳平衡。

$$\max\left\{\prod_{q=1}^{r} P_{jq}\left[a\frac{P_{oj}}{\sum_{j=1}^{n}P_{oj}}+(1-a)\sum_{K=1}^{m}W_K S_{jK}\right]\right\} \quad (6\text{-}8\text{-}23)$$

## 三、计 算 举 例

例 1　有一机加工厂，生产能力已经确定，工厂经济寿命预计为20年，基建贷款年利率为 8 %。经调查有三个地址可供建厂，其定量因素如表（6-8-1）所列。假定基建工期相同，表中基建费是投产时的现值。按照简化模型评价选址。

定 量 因 素　单位（万元）　　表 6-8-1

| 厂　址 | 基建费 $V$ | 残　值 $S$ | 材料费 $C_m$/年 | 公共服务费 $C_u$/年 | 工　资 $C_w$/年 | 经常费 $C_b$/年 | 分配费 $C_d$/年 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 500 | 100 | 83 | 20 | 18 | 32 | 15.2 |
| 2 | 450 | 90 | 73 | 22 | 18 | 32 | 18.1 |
| 3 | 400 | 80 | 87 | 25 | 18 | 32 | 20 |

按公式（6-8-5）计算出各地址基建费等价额分别为：$A_1=48.8$，$A_2=43.9$，$A_3=39$。按公式（6-8-8）计算出各备选地址的年度总支出分别为：$C_{01}=217$，$C_{02}=207$，$C_{03}=221$，比较$C_{01}$，$C_{02}$，$C_{03}$之值，第二地址最佳，其次为第一地址。在第二地址建厂比第一地址每年多受益10万元，比第三地址每年多受益14万元。

例 2　条件同例 1 。考虑到表6-8-2所列的定性因素，并取定量因素与定性因素的权值之比为 5 比 2 。问上述三个地址哪个最优？

对各定性因素要靠主观判断其相对重要性。我们给出上列定性因素的权值$W_k$和各地址有关定性因素的评价给$S_{jk}$后，按公式（16-8-11）分别算出$M_{Nj}$如表6-8-3所示。

各地址定性因素对比情况　　表 6-8-2

| 地　址 | 当地教育程度 | 当地科研工业力量 | 当地生活条件 | 当地领导条件 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 差 | 差 | 差 | 很好 |
| 2 | 中 | 强 | 中 | 中 |
| 3 | 高 | 强 | 好 | 差 |

$M_{Nj}$　值　　表 6-8-3

| 地　址 | $W_1=0.1$ | $W_2=0.2$ | $W_3=0.2$ | $W_4=0.5$ | $M_{Nj}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $S_{11}=0.2$ | $S_{12}=0.2$ | $S_{13}=0.2$ | $S_{14}=0.7$ | $M_{N1}=0.450$ |
| 2 | $S_{21}=0.3$ | $S_{22}=0.4$ | $S_{23}=0.3$ | $S_{24}=0.2$ | $M_{N2}=0.270$ |
| 3 | $S_{31}=0.5$ | $S_{32}=0.4$ | $S_{33}=0.6$ | $S_{34}=0.1$ | $M_{N3}=0.280$ |

根据式（6-8-10），利用例1算得的$C_{01}$，$C_{02}$，$C_{03}$数据，可求出各地址定量因素的优度为：$M_{B1}=0.322$，$M_{B2}=0.344$，$M_{B3}=0.328$

已知　$\alpha=5/5+2=0.714$。按照式（6-8-9），各备选地址优度为：

第一地址：$0.714\times0.322+(1-0.714)\times0.450=0.366$

第二地址：$0.714\times0.344+(1-0.714)\times0.270=0.323$

第三地址：$0.714\times0.328+(1-0.714)\times0.280=0.316$

比较计算结果，显然第一地址最好，第二地址其次。

例 3　除例2给定条件外，考虑到当前和长远利益，要求该厂必须满足三个条件：①接近铁路干线，便于运输；②当地工业基础好，便于协作；③当地农业条件好，职工生活有保证。假定：第一条三个地址都满足；第二、三条只有第二、三地址满足。问哪个地址最好？

第一地址：$P_{11}=1$，$P_{12}=0$，$P_{13}=0$，$P_{11}P_{12}P_{13}=0$，

第二地址：$P_{21}=1$，$P_{22}=1$，$P_{23}=1$，$P_{21},P_{22},P_{23}=1$，

第三地址：$P_{31}=1$，$P_{32}=1$，$P_{33}=1$，$P_{31},P_{32},P_{33}=1$。

因此，第一地址被排除，只能在第二、三地址间进行选择。按例2的计算结果，第二地址的优度为0.323，第三地址的优度为0.316，显然应选第二地址建厂。

选址总是由大致范围的普查逐步缩小，直到具体定点，凡不符合先决条件之一的，在选址过程中已被排除，不会进入最后比较之列。所以上述八个数学模型中，理论上表达完备的是式（6-8-14），（6-8-15），（6-8-22），（6-8-23），而实际应用的则是式(6-8-8)，（6-8-12），（6-8-20）（6-8-21）。

工厂选址是经济的和非经济的综合决策；不管有多少影响因素，均可以区分为定量和定性两类。按综合优度最高进行取舍。模型本身是处理选址问题的一个科学方法，运用之妙，有赖于发挥人的主观能动性，取决于决策人的政策水平，经验和判断力。

## §6-9　生产工艺系统中模糊生产对应的经济分析[111]

1985年，陈国权、俞肇雄提出采用模糊生产可能集来表达生产工艺（特别是拟议中的新生产工艺）的模糊性；研究了生产的模糊可加性、超可加性、可乘性、可除性；凸性收益特性及它们之间的关系，揭示了这些特性的经济含义。应用模糊数学可以把专家估价和经济人的信心纳入公式化的经济分析之中。应用模糊数学可以使描述经济学和数理经济学汇合一起成为可能。

### 一、经济问题的模糊性

经济理论有两个极端，描述经济学和数理经济学。前者把经济现实看作一个整体，采用描述性的语言，叙说经济现象及其实质。后者则先假定一个经过大大简化了的模型，然后在这个模型上采用严格的方法细小求证可能得到的结论。模糊数学的出现使经济学的这两个方向的汇合成为可能。

当我们把经济学看作一种行为科学时，它所研究的是消费者、生产者、商人和制定政策的领导者在消费、生产、节约、投资、定价等方面的活动。虽然，经济行为和其他运动

一样，是在一定环境下进行并受到环境变化的影响，但是作为经济行为主体的人对刺激的反应和自动机不同。人们的动机和态度，取决于他们的口味、希望和影响他们对环境的感知及作出决策的过程。

经济学问题的复杂性、人们对环境和竞争对手了解不够，是经济问题的模糊性的另一来源。这种情况在预测未来时显得更突出。经济研究的主要目的是预测未来，而不是总结过去或描述现状。从此意义上来说考虑模糊因素成为不可避免的。

在讨论经济问题时，人们经常使用一些没有表达式的函数。需求函数就是其中之一。所谓需求函数是一种商品消费量与商品价格之间的关系。这个定义是在消费者的购买力已知并且不变的前提下作出的。但是在一个封闭的经济中，一种商品的生产与销售通过各种途径影响相关的工业生产和消费者的购买力。假如忽略去这些影响，需求函数的用处不大，至少不能可靠地用于价格的最佳化和生产的决策中。但是假如要把这些因素都考虑在内，那么需求函数只能是模糊的。

在古典经济理论中，消费者的平衡是在预算限制下最大化消费者的效用。预算线把可能的消费分为两类：一类是消费者财力所及的，另一类是消费者负担不起的。但实际上预算限制不是一种严格的限制。消费者未必精确知道自己现在有多少钱，他不能在每次买东西时拿出一张精确的帐单，而且他的消费-储蓄比例也是有弹性的。

这些例子也许能够使我们意识到模糊性是经济问题的固有特性，并理解为什么在经济学发展过程中，相当长的时期内许多杰出的经济学家要么只研究经济问题的趋向，要么只在抽象模型上做文章，都回避精确的数学方法。

我们希望有一种描述趋向同时又能保留一定程度的数量测量的模糊经济模型，会使经济理论在反映经济现实方面前进一步。

## 二、模 糊 生 产

我们定义商品束$\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$是$n$维欧几里德商品空间$X$中的一个矢量。其中$x_i$是第$i$（$i=1,2,\cdots n$）个商品的数量，正量表示生产过程的产出；负量表示投入。用$P(X)$表示$X$的普通子集的集合。

定义商品空间$X$的模糊子集$\underset{\sim}{A}$为模糊商品束，

$$\underset{\sim}{A}=\mu_1/\vec{a}_1+\cdots+\mu_j/\vec{a}_j \qquad (6\text{-}9\text{-}1)$$

其中：商品束$\vec{a}_1$，…，$\vec{a}_j$分别$\mu_1,\cdots,\mu_j$的隶属度属于模糊集合$\underset{\sim}{A}$；／是分离符；＋是联运算。

在现实世界上模糊商品束到处可见。例如，一个地区的农民可能会根据经验说：“如果不施肥，那么收成很差”；“如果施肥不过量，那么收成较好”。这里“没有肥料和很差的收成”以及“适量的肥料和较好的收成”都是模糊商品束。裁缝说：“我有70％的信心用30尺布做8条裤子”；0.7/(30尺布 8 条裤子)也是一个模糊商品束。

用$F(X)$记$X$中所有模糊子集的集合。

假如一个生产者用$k$种要素生产$l$种产品，将用$x_1$记$k$维的要素（投入）空间，用$x_2$记$l$维的产品（产出）空间，而商品空间为$n=(k+l)$维，记为$X=X_1\times X_2$。

一个模糊生产集$\underset{\sim}{T}$是商品空间的模糊子集，其隶属度函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x})：X\rightarrow[0.1] \quad (6\text{-}9\text{-}2)$$

隶属度函数描写生产者对$\underset{\sim}{T}$中每一个点可信程度的估值，或者说描写生产者对把该点变为现实的信心。图6-9-1表示一个用一种投入，生产一种产品的典型模糊生产集合。

下面我们定义并分析模糊生产集合的一些特性。

（1）模糊生产是可除的，假若

$$\alpha \underset{\sim}{T}\subset T，\ 0<\alpha<1 \quad (6\text{-}9\text{-}3)$$

这意味着一个可除的模糊生产集满足：

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(\alpha \underset{\sim}{T})\geqslant \mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x})，\quad 0<\alpha<1，\ \forall \vec{x}\in \underset{\sim}{T} \quad (6\text{-}9\text{-}4)$$

这一结果可证明如下：广用扩展原理，$f(\underset{\sim}{T})=\alpha \underset{\sim}{T}$，有

$$1/\alpha\cdot\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x})/\vec{x}=\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x})/\alpha\vec{x}$$

考虑式（6-9-4），得到$\mu_{f(\underset{\sim}{T})}(\alpha\vec{x})=\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x})\leqslant\mu_{\underset{\sim}{T}}(\alpha\vec{x})$

这意味着$f(\underset{\sim}{T})\subset\underset{\sim}{T}$，即$\alpha\underset{\sim}{T}\subset\underset{\sim}{T}$。可除的模糊生产集的例子如图6-9-2所示。可除性在这里意味着生产的规模可以减小而不会减低生产的效率及该生产点的可置信程度。

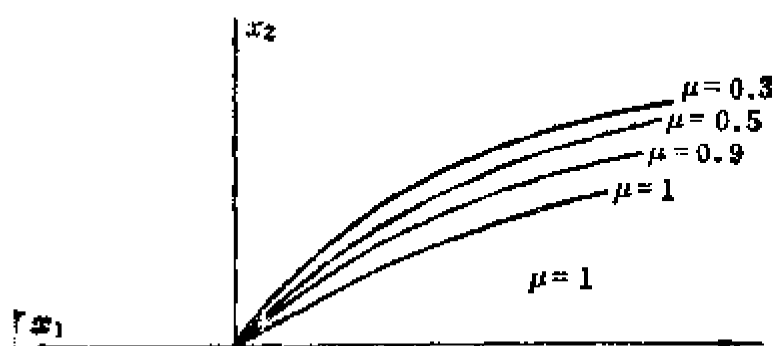


图 6-9-1 模糊生产集

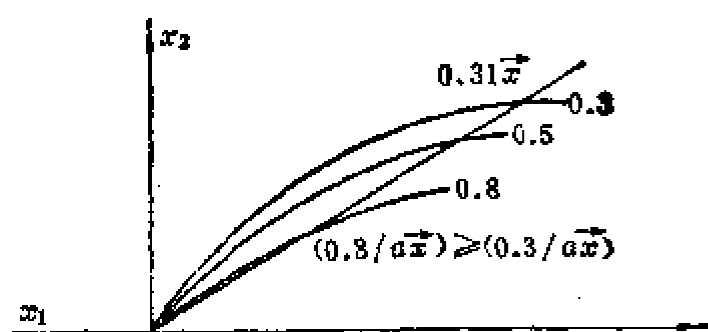


图 6-9-2 可除的模糊集

（2）假定不生产的可能性是模糊的。也就是说，或者$O\in\underset{\sim}{T}$，$\mu_{\underset{\sim}{T}}(o)=1$，或者$O\notin\underset{\sim}{T}$，$\mu_{\underset{\sim}{T}}(o)=0$。这里大写的$O$是商品空间的原点。不生产的可能性表示允许倒闭或退出行业。这在直观上是不模糊的概念。

（3）模糊生产是可乘的，若

$$K\underset{\sim}{T}\subset\underset{\sim}{T} \quad (6\text{-}9\text{-}5)$$

这里，$K\geqslant1$，这等价于说：模糊生产是可乘的，若

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(k\vec{x})\geqslant\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x})，\ k\geqslant1，\ \forall\vec{x}\in X \quad (6\text{-}9\text{-}6)$$

可乘的模糊生产集的例子见图6-9-3。模糊可乘性断言生产可以乘上一个大于1的实数而不损失生产效率和其可置信程度。

（4）生产是模糊可加的，若

$$\underset{\sim}{T}\dot{+}\underset{\sim}{T}\subset\underset{\sim}{T} \quad (6\text{-}9\text{-}7)$$

这里$\dot{+}$为算术加（扩展加）。这意味着

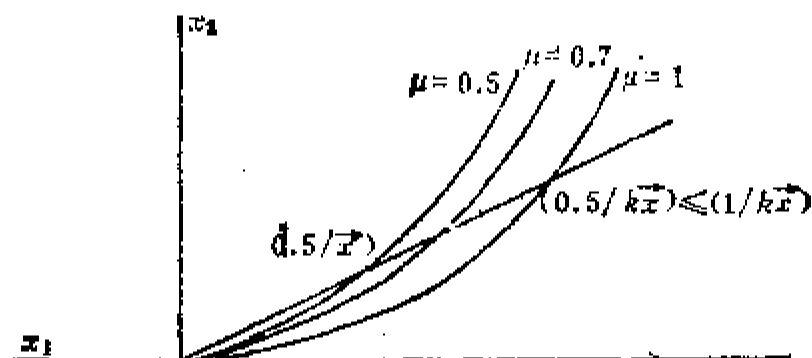



图 6-9-3　可乘的模糊生产集

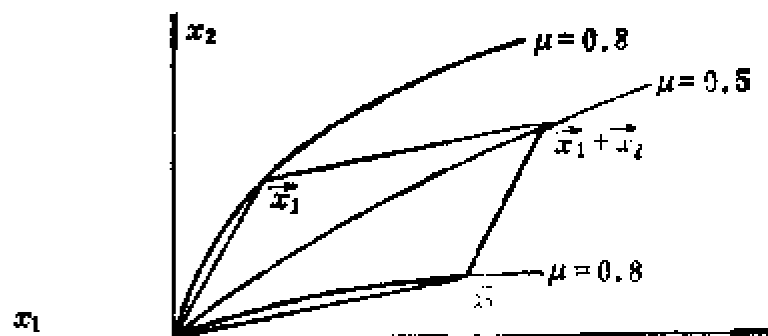



图 6-9-4　模糊可加生产集

$$\mu_{f(\underset{\sim}{T})}(\vec{x}_1 \dot{+} \vec{x}_2)=\mu_{\underset{\sim}{T}\dot{+}\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1 \dot{+} \vec{x}_2)=\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_2)\leqslant\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1+\vec{x}_2) \qquad (6\text{-}9\text{-}8)$$

换句话说，生产是模糊可加的，若对 $\vec{x}\in\underset{\sim}{T}$，则有

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1 \dot{+} \vec{x}_2\geqslant\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_2)$$

图6-9-4是一个模糊可加生产集的例子。

（5）生产是模糊凸的，

若　　$$\alpha\underset{\sim}{T}\dot{+}(1-\alpha)\underset{\sim}{T}\subset\underset{\sim}{T} \qquad (6\text{-}9\text{-}9)$$

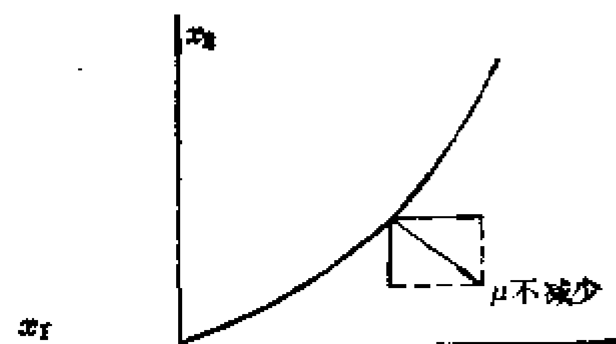



图 6-9-5　免费丢弃的生产

其中 $0\leqslant\alpha\leqslant1$，或者说，生产是模糊凸的，若

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(\alpha\vec{x}_1 \dot{+} (1-\alpha)\vec{x}_2)\geqslant\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1)\ \wedge\ \mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_2) \qquad (6\text{-}9\text{-}10)$$

这是因为：若（6-9-10）成立，则有

$$\mu_{f(\underset{\sim}{T})}(\alpha\vec{x}_1 \dot{+} (1-\alpha)\vec{x}_2)=\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_2)\leqslant\mu_{\underset{\sim}{T}}(\alpha\vec{x}_1 \dot{+} (1-\alpha)\vec{x}_2)$$

在凸的模糊生产中，两个生产状态线性组合后的隶属程度比原有两个隶属度中低的一个为高。凸的模糊生产比可加的模糊生产有更大的限制，因为当你想要把两个生产联合起来又不想损失可置信度，你必须按凸组合的方式减少两个生产的规模。

（6）设Ω是一个处于非负象限内的一般集合，生产存在免费丢弃的可能性，若

$$\underset{\sim}{T}-\Omega\subset\underset{\sim}{T} \qquad (6\text{-}9\text{-}11)$$

或　　$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}-\vec{p})\geqslant\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x})\qquad \vec{p}\in\Omega \qquad (6\text{-}9\text{-}12)$$

图6-9-5是一个存在免费丢弃可能性的生产。注意，在图6-9-5中投入是负的，一个负数减去一个正数导致绝对值的增加。

（7）模糊生产具有超可加性，若存在一个$\delta>0$，使

$$\underset{\sim}{T}\dot{+}\underset{\sim}{T}\dot{+}\delta\subset\underset{\sim}{T} \qquad (6\text{-}9\text{-}13)$$

换言之，对任何两个模糊生产状态 $\mu_1/\vec{x}_1$，和 $\mu_2/\vec{x}_2$，有一个生产状态 $\mu_3'/\vec{x}_3'$存在

$$\left.\begin{aligned}\vec{x}_3'>\vec{x}_3=\vec{x}_1 \dot{+} \vec{x}_2\\ \mu_3'>\mu_3=\mu_1\wedge\mu_2\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}9\text{-}14)$$

（8）模糊生产是规模的恒比、增比、减比收益的，假如模糊生产集的每个 $\alpha$ 截集相

应都是规模恒比、增比、减比收益的。

$\alpha$截集是普通集，因此，收益规律在$\alpha$截集上与传统经济学无异。

以上这些性质都是经济研究中最基本而重要的性质。免费丢弃的可能性与不生产的可能性意义直接无须解释。可除性、可乘性及规模的收益特性涉及生产的缩小和扩大的决策以及最优规模的确定等论题。可加性、超可加性以及凸性将在生产的合成以及投入最佳比（如劳力或资本的最优集约程度）的存在性的研究中用到。

## 三、模糊生产集的基本特性之间的关系

**定理 6-9-1** 若生产是模糊可加的且规模恒比收益的，那么生产是模糊凸生产。

**证** 规模的恒比收益导致 $\underset{\sim}{\mu_T}(\alpha\vec{x_1})=\underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x_1})$ 和$\underset{\sim}{\mu_T}((1-\alpha)\vec{x_2})=\underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x_2})$，利用可加性，则有

$$\underset{\sim}{\mu_T}(\alpha\vec{x_1}+(1-\alpha)\vec{x_2})\geqslant\underset{\sim}{\mu_T}(\alpha\vec{x_1})\wedge\underset{\sim}{\mu_T}((1-\alpha)\vec{x_2})=\underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x_1})\wedge\underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x_2}) \qquad (6\text{-}9\text{-}15)$$

这就是模糊凸性（见图6-9-6）。

**定理 6-9-2** 存在不生产可能性的凸生产是可除的生产。

**证** 由于生产是凸的，原点又包含在生产集合之内，故由 O到$\vec{x}$（$\vec{x}\in X$）之间任一点$\vec{x}'$，有，

$$\underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x}')\geqslant\min(\underset{\sim}{\mu_T}(o),\ \underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x})) \qquad (6\text{-}9\text{-}16)$$

但 $\underset{\sim}{\mu_T}(o)=1$，我们有

$$\underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x}')\geqslant\underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x}) \qquad (6\text{-}9\text{-}17)$$

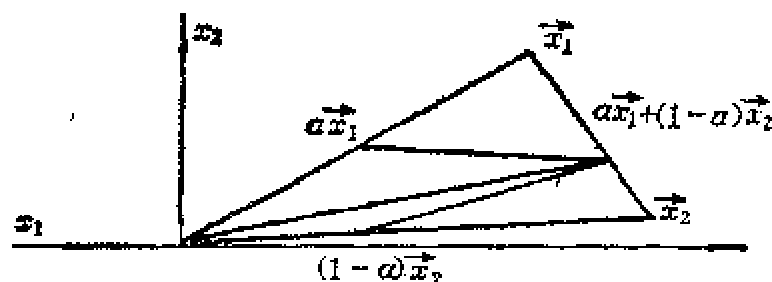


图 6-9-6 定理6-9-1的说明

按照扩展原理：$\underset{\sim}{\mu_{\alpha T}}(\alpha\vec{x})=\underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x})$ (6-9-18)

所以，

$$\underset{\sim}{\mu_{\alpha T}}(\vec{x})\leqslant\underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x}') \qquad (6\text{-}9\text{-}19)$$

令$\vec{x}'=\alpha\vec{x}$，我们得到

$$\underset{\sim}{\mu_T}(\alpha\vec{x})\geqslant\underset{\sim}{\mu_{\alpha T}}(\alpha\vec{x}) \qquad (6\text{-}9\text{-}20)$$

这就是生产可除性。

**定理 6-9-3** 同时具有可乘性和可除性的生产是规模恒比收益的生产。

**证** 要证明这一定理，只须证明等式

$$\underset{\sim}{\mu_T}(\alpha\vec{x})=\underset{\sim}{\mu_T}(x) \qquad (6\text{-}9\text{-}21)$$

在$\alpha<1$和$\alpha\geqslant1$之下都成立。$\alpha=1$时，（6-9-21）自然成立。

现令$\alpha>1$，可乘性导致

$$\underset{\sim}{\mu_T}(\alpha\vec{x})\geqslant\underset{\sim}{\mu_T}(\vec{x}) \qquad (6\text{-}9\text{-}22)$$

在$\alpha\vec{x}$上利用可除性，我们有

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\vec{x}\right)=\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x})\geqslant\mu_{\underset{\sim}{T}}(\alpha\vec{x}) \tag{6-9-23}$$

式（6-9-22）和（6-9-23）强迫

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x})=\mu_{\underset{\sim}{T}}(\alpha\vec{x}) \tag{6-9-24}$$

再令 $\alpha<1$，先使用可除性再使用可乘性，我们也能得到式（6-9-24）。而（6-9-24）说明生产是规模恒比收益的。

**定理 6-9-4** 具有模糊超加性和免费丢弃性的生产是模糊可加的生产。

**证** 超加性意味着

$$\underset{\sim}{T}\dot{+}\underset{\sim}{T}\dot{+}\delta\subset\underset{\sim}{T} \tag{6-9-25}$$

利用免费丢弃性去掉 $\delta$ 得到可加性。

**定理 6-9-5** 若模糊生产集的隶属度函数是连续的，那么强凸和可加的生产是超可加生产。

**证** 由于强凸性，两个生产状态的凸组合为

$$\vec{x}_3=\alpha\vec{x}_1\dot{+}(1-\alpha)\vec{x}_2\in\underset{\sim}{T} \tag{6-9-26}$$

并且，

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_3)>\min(\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1),\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_2)) \tag{6-9-27}$$

隶属度函数的连续性保证存在一个点 $\vec{x}_3'>\vec{x}_3$，该点上

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_3')>\min(\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1),\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_2)) \tag{6-9-28}$$

进一步，可加性导致

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(2\vec{x}_3')>\min(\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1),\quad\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_2)) \tag{6-9-29}$$

若 $\alpha=1/2$，那么 $2\vec{x}_3=\vec{x}_1+\vec{x}_2$，这样，$2\vec{x}_3'>\vec{x}_1\dot{+}\vec{x}_2$。这个条件加上式（6-9-29）就是超可加性。

这一定理中，隶属度函数的连续性的假定在模糊生产集的边缘上可以放宽。原因是：第一，存在不生产的可能性使强凸性和可加性不能兼容（见图6-9-7）；第二，若不存在不生产的可能性，强凸性和可加性迫使生产集中两矢量之和处于集合之内而不会在边界上（见图6-9-8）。

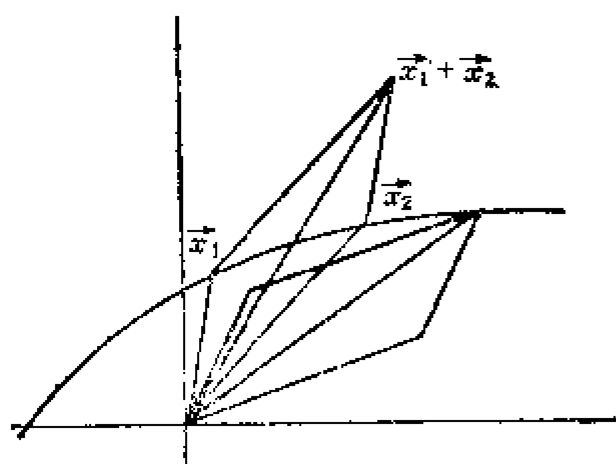



图 6-9-7 $\vec{x}_1\dot{+}\vec{x}_2$可能处于生产集的边界上但强凸性和可加性不兼容

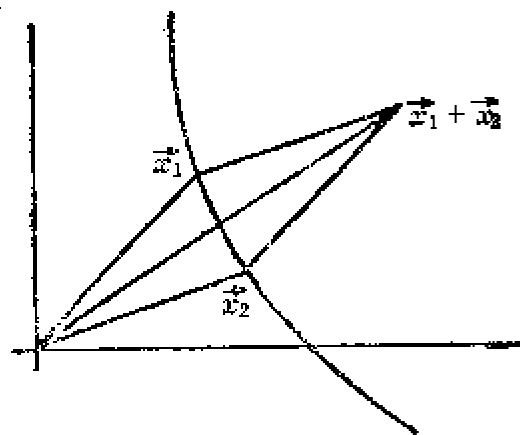



图 6-9-8 两矢量之和不处于边界上

**定理 6-9-6** 若在任何可置信之下生产是规模恒比收益的，那么模糊生产集是一个模糊凸锥，也就是对 $\forall \vec{x} \in \underset{\sim}{T}$，$\alpha > 0$

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(\alpha \vec{x}) = \mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}) \tag{6-9-30}$$

按照Lowen 的定义，一个模糊子集是一个模糊子空间，当且仅当对于所有属于$\underset{\sim}{T}$的$\vec{x}_1$和$\vec{x}_2$，以及实数$a$和$b$

$$\mu_{\underset{\sim}{T}}(a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2) \geqslant \min(\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_1),\quad \mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}_2)) \tag{6-9-31}$$

模糊子空间的必要和充分条件是：

（1）$\mu(o) = \mathrm{Sup}\{\mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x}),\ \vec{x} \in \underset{\sim}{T}\}$；

（2）$\forall \vec{x} \in \underset{\sim}{T}$ 且 $\alpha$ 是一个非负实数 $\mu_{\underset{\sim}{T}}(\alpha \vec{x}) = \mu_{\underset{\sim}{T}}(\vec{x})$；

（3）$\mu$ 是模糊凸的。

**定理 6-9-7** 若模糊生产是凸的，是规模恒比收益的，而且存在不生产的可能性，那么模糊生产集是一个模糊子空间。

模糊生产集是一个模糊凸锥或是一个模糊子空间的论断，将使一些复杂的经济问题简化，使在一般情况下没有解的问题变成可解。这个论断是为那些用到模糊生产对应的概念的经济问题的分析准备的。

**定理 6-9-8** 假定在每个确定的生产要素下，每个生产量是凸的正规模糊子集；又假定生产者对用一定数量的生产要素生产较多的产品总是有较大的信心；若生产者对规模恒比收益的信心在生产规模增大时相应地维持不变、增加或减少，那么生产是规模恒比、增比或减比收益的。

**证** 我们一直把模糊商品束的隶属度视为一种可置信度。在我们的问题中，这种置信程度可以理解为生产者实现一种生产的信心。既然在生产问题中，商品束是由一组投入和相应的一组产出构成的，那么商品束的隶属度可以用来表示生产者在这一组投入之下获得这一组产出的信心。

根据生产的规模收益特性可知：当生产是规模恒比收益的，生产在一定投入比例之下扩大规模，代表各生产状态的商品束将在商品空间中构成从原点出发的一根射线。对于一个一般的模糊生产可能集，其规模特性在各个部分可能是不同的。在这样一个生产可能集中，从原点引一条射线，射线上各点的隶属度在一些段落上可能不变，在一些段落上可能增加或减少。这代表在不同的生产规模下生产者对生产能获得恒比收益的信心随生产规模的变化而发生的不同变化。这一定理把生产者信心的这一变化与生产的规模收益特性联系起来。

因此，为证明这一定理，只须证明：若沿从原点出发的射线隶属程度维持不变、增加或减少，那么生产相应地是规模恒比、增比或减比收益的。

凸的和正规模糊产量使模糊生产集的 $\alpha$-截集的边缘不相交；按照假定，我们又知道在一个确定的投入量之下高的产出量总是对应于最多相等的隶属程度。再者，生产集的 $\alpha$-截集的边缘的规模恒比收益时，总是和一定斜率的射线重合；而由于变化率随着生产规模

的加大而加大（减少）、使增比（减比）收益生产集的$\alpha$-截集的边缘沿射线方向向上（向下）弯曲。

用$T_r(x_1,x_2)$记落在一条射线上的集合$\underset{\sim}{T}$的所有元素，而$T_\alpha(x_1,x_2)$记落在一个$\alpha$-截集边缘上的$\underset{\sim}{T}$的所有元素。容易看出，由于高的变化率（在增比收益的情况下）而有：

$$x_{2r}(x_1+\Delta x_1)<x_{2\alpha}(x_1+\Delta x_1)$$

式中，$(x_1+\Delta x_1,\ x_{2r})\in T_r$，$(x_1+\Delta x_1,\ x_{2\alpha})\in T_\alpha$

按假定$\mu_{\underset{\sim}{T}}(x_1+\Delta x_1,\ x_{2r})>\mu_{\underset{\sim}{T}}(x_1+\Delta x_1,\ x_{2\alpha})$

这样，在$(x_1+\Delta x_1)$处与射线相交的$\alpha$-截集边缘比在$x_1$上有更大的隶属度。图6-9-9以一个例子说明上述的论证。减比及恒比收益的情况以此类推。

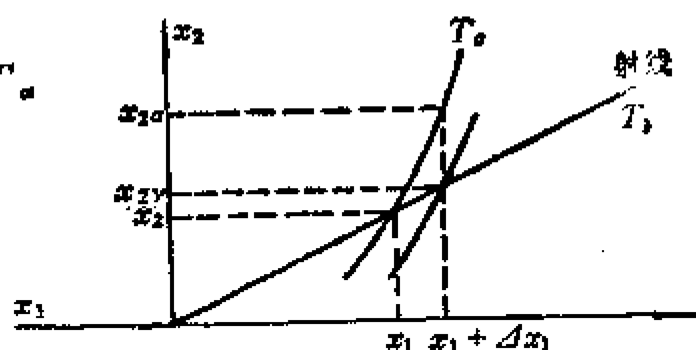



图 6-9-9　信心与收益特性

## 四、后　记

用数理方法研究经济问题，无论在西方，在苏联或东欧各国，都已经发展到非常深入、非常抽象的阶段。在这种情况下，试图用模糊数学来改造和发展这一套方法，从抽象入手似是比较可取的途径。不然，恐有避近就远之嫌，容易失去洞察力。但是，我们研究的目的在于应用，故在可能的条件下尽量减少抽象的程度。

生产是经济学中的中心问题之一，发展模糊数学必先小心定义一个模糊生产对应并较深入研究它的特性才能使进一步研究有一个基础。这是我们的目的。所定义及分析的特性都是生产问题中最基本的必不可少的特性；这些特性都有其确定的经济意义。随着研究的进一步展开，这些特性的含义将变得更明显。所得的初步结果，使我们看到模糊数学的应用至少能把专家估价以及经济人的信心纳入公式化的经济分析之中，我们相信这一点将会为更多的事实所证明。模糊数学的应用能为经济心理学与经济问题的数理分析的结果提供更多的可能性。

# 第七章

## 模糊数学在企业经营管理现代化中的应用

我国正在进行经济管理、体制改革，实行有计划的商品经济，实行计划指导下的市场调节，扩大企业经营管理自主权。现代企业已经由过去的单纯"生产中心型"转轨到"生产经营管理型"以及"科技经营管理型"。

由于企业经营管理系统是一个复杂的系统，影响因素众多、层次多、信息不足或不确知，人际关系复杂。要搞好一个企业的关键，一是领导会经营管理，善于用人，善于决策；二是要有现代化的科学经营管理方法。把模糊数学方法应用于企业经营管理的各个方面，拓广和发展了原用"十大科学管理方法"，使企业经营管理科学化、模型化、定量化、电脑化，形成更为完善的企业经营管理现代化方法，促进企业更加提高经济效益，提高竞争力和应变能力。

### §7-1 企业经营中多级模糊决策[114]

1984年，张弘、黄天任、徐爱新、葛明浩等利用对策论、模糊规划以及模糊动态规划理论，对企业经营多层决策系统的决策，提供了一种分级处理的方法。

经营对策对企业的未来发展具有深远的影响。特别是目标决策，乃是企业经营管理的战略决策，它的正确制订尤为重要。一般说来，企业经营管理活动的目标是经济效益，因此，测定盈亏临界点、设定利润目标，应是企业经营决策中的重要一环。但是，目标决策的制订不仅与企业的经营方针，生产方向、品种发展、产品价格等因素有关，而且还涉及到各种产品的产量分布问题。为了保证目标计划的实现，企业的决策者又必须对各项产品作出产量定额的决策，但它的条件通常不十分明确，因而称之为第一级模糊决策。

然而，企业的经营决策只是一方，影响决策的选择还存在着另一自然状态，就是与决策选择有关的客观环境，诸如同行业的竞争、供销问题等等。从决策的范畴来考虑，自然状态可看作是被对立的另一方所控制，因此在制订经营决策时，必须考虑另一方的抉择选择。显然，这是更为复杂的多因素决策问题，称之为第二级模糊决策。

必须指出，社会主义经济体制具有计划调节与市场调节相结合的方式。我们的计划调节，是通过指令性计划来进行的；我们的市场调节，是通过指导性计划和经济杠杆等进行调节的。因此，企业的经营决策，必须置于更高层的决策系统进行协调与平衡，这涉及到社会主义经济理论和政策性问题，称之为第三级模糊决策。

#### 一、第一级模糊决策

为了简化问题的讨论，把本层次的经营决策限定在合理安排产量方面，以期达到最大

的经济效益。鉴于在大多数情况下，限制条件不甚明确，故采用模糊规划与动态规划为宜。

1.数学模型

某单位同时生产几种产品：$u_1$，$u_2$，…，$u_n$。产品$u_i$的产量要求不低于$V_i$（$i=1$，2，…，$n$）；总产量$V$是一个常数（各种产品产量折合成标准单位计算）。另外，还应满足模糊约束条件：$c_1$，$c_2$，…，$c_g$，而每种模糊约束条件的权数为$a_1$，$a_2$，…，$a_g$，且$\sum_{i=1}^{g} a_i = 1$。

假设各种产品产量的分档均为$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_p$。

利用模糊统计方法，可得产品$u_i$的各档产量对各约束条件的隶属度，记为矩阵的形式：

$$\underset{\sim}{R}_i = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{g1} & r_{g2} & \cdots & r_{gp} \end{bmatrix}$$

由综合判定法可得到产品$u_i$的各档产量对于综合约束条件的隶属度：

$$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_g) \circ \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{g1} & r_{g2} & \cdots & r_{gp} \end{bmatrix} = (\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_p)$$

再以拟合法得到综合限制函数：$\underset{\sim}{A}_i(\lambda)$（$i=1$，2，…，$n$），由调查得到产品$u_i$的利润函数为：$f_i(\lambda)$（$i=1$，2，…，$n$）。

由模糊规划法得到产品$u_i$在限制$\underset{\sim}{A}_i(\lambda)$下，使利润函数取得最大值的解：$\lambda^*_{i_1}$，$\lambda^*_{i_2}$，…，$\lambda^*_{i k_i}$（$i=1$，2，…，$n$）。从产品$u_i$的最低产量$V_i$出发，按一定步长分档，直到max（$\lambda^*_{i_1}$，$\lambda^*_{i_2}$，…，$\lambda^*_{i k_i}$），再计算出各档产量的利润函数值$\eta_{ik}$（$k=1$，2，…，$r$；$i=1$，2，…，$n$），如下表7-1-1：

利　润　值　　表 7-1-1

| 产量＼产品 | $u_1$ | $u_2$ | ……… | $u_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lambda_1$ | $\eta_{11}$ | $\eta_{12}$ | ……… | $\eta_{1n}$ |
| $\lambda_2$ | $\eta_{21}$ | $\eta_{22}$ | ……… | $\eta_{2n}$ |
| ⋮ | …… | …… | …… | …… |
| $\lambda_r$ | $\eta_{r1}$ | $\eta_{r2}$ | ……… | $\eta_{rn}$ |

按动态规划法找出满足约束条件，使利润函数达到极大的产量的配比值，即为该单位之极佳决策。

2.实例

某单位生产三种产品$u_1$，$u_2$，$u_3$；每种产品的最低产量为$V_1=100$，$V_2=60$，$V_3=$

140；最高总产量为$V=520$；模糊限制条件为$c_1$，$c_2$，$c_3$；权数为$a_1=a_2=a_3=\frac{1}{3}$；求产量的最佳分布。

**解**：经模糊统计得

$$\underset{\sim}{R}_1=\begin{bmatrix}1 & 0.90 & 0.78 & 0.70 & 0.50 & 0.40\\ 1 & 0.86 & 0.74 & 0.65 & 0.45 & 0.35\\ 1 & 0.87 & 0.64 & 0.55 & 0.30 & 0.27\end{bmatrix}$$

其中，分档为$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_6)=(240,\ 280,\ 360,\ 400,\ 480,\ 600)$，

故有　　$(a_1,\ a_2,\ a_3)\underset{\sim}{R}_1=(1,\ 0.88,\ 0.72,\ 0.63,\ 0.50,\ 0.34)$

从而得限制函数：

$$\underset{\sim}{A}_1(\lambda)=\begin{cases}1 & \lambda\leqslant 240\\ 2^{\left(1-\frac{1}{240}\right)}, & \lambda>240\end{cases}$$

利润函数为：

$$f_1(\lambda)=\begin{cases}0, & \lambda\leqslant 100\\ \dfrac{\lambda-100}{80}\cdot e^{\left(\frac{\lambda}{180}-1\right)}, & 100<\lambda\leqslant 180\\ 1, & 180<\lambda\leqslant 220\\ e^{\left(1-\frac{\lambda}{220}\right)}, & \lambda>220\end{cases}$$

由模糊规划得模糊判决：

$$\underset{\sim}{A}_{1f_1}(\lambda)=\begin{cases}1, & 180\leqslant\lambda\leqslant 220\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当$\lambda_1^*$取[180, 220]中任意整数值时，$\underset{\sim}{A}_{1f_1}(\lambda)$取得最大值。因而本产品的最佳产量为[180, 220]中任意整数值。

同样可得产品$u_2$的限制函数和利润函数：

$$\underset{\sim}{A}_2(\lambda)=\begin{cases}1 & \lambda\leqslant 160\\ 2.5^{\left(1-\frac{1}{160}\right)} & \lambda>160\end{cases}$$

$$f_2(\lambda)=\begin{cases}0 & \lambda\leqslant 80\\ 1.5\cdot\dfrac{\lambda-80}{90}e^{\left(\frac{\lambda}{140}-1\right)} & 80<\lambda\leqslant 140\\ 1 & 140<\lambda\leqslant 180\\ e^{\left(1-\frac{\lambda}{180}\right)} & \lambda>180\end{cases}$$

模糊判决为：

$$\underset{\sim}{A}_{2f_2}(\lambda)=\begin{cases}1 & 140\leqslant\lambda\leqslant 160\\ 2.5^{\left(1-\frac{\lambda}{160}\right)} & 160<\lambda\leqslant 180\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

所以，当$\lambda_2^*$取[140，160]中的任一整数值时，$\underset{\sim}{A}_{2,r_2}(\lambda)$取得最大值。因而本产品的最佳产量为[140，160]中任意整数值。

产品$u_3$的限制函数与利润函数为

$$\underset{\sim}{A}_3=\begin{cases}1 & \lambda<240\\ 3^{\left(1-\frac{\lambda}{240}\right)} & \lambda\geqslant 240\end{cases}$$

$$f_3(\lambda)=\begin{cases}0 & \lambda\leqslant 240\\ 1.2\cdot\dfrac{\lambda-140}{140}\,e^{\left(\frac{\lambda}{260}-1\right)} & 140<\lambda\leqslant 260\\ 1 & 260<\lambda\leqslant 300\\ e^{\left(1-\frac{\lambda}{300}\right)} & \lambda>300\end{cases}$$

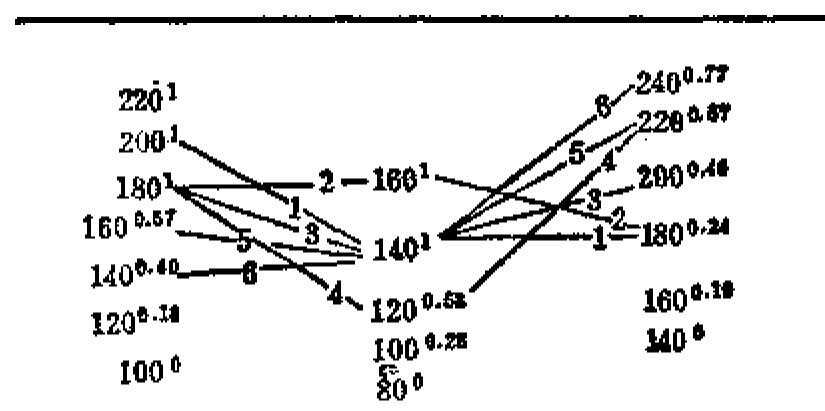
模糊判决为

$$\underset{\sim}{A}_{3,r_3}(\lambda)=\begin{cases}3^{\left(1-\frac{\lambda}{240}\right)} & 240\leqslant\lambda\leqslant 260\\ 0 & 其它\end{cases}$$

所以，当$\lambda_3^*=240$时，$\underset{\sim}{A}_{3,r_3}(\lambda)$取得最大值，因而产品$u_3$的最佳产量为240。

但$\min\lambda_1^*+\min\lambda_2^*+\lambda_3^*=180+140+240=560>V$，再由动态规划（令步长为20）得到各种产品产量之可行配比（表7-1-2），计算出每条可行配比路径的利润总值(7-1-3)。

**产品产量分配　　表 7-1-2**




**每条可行配比路径的利润总值　表 7-1-3**

| $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | 利 润 总 值 |
|---|---|---|---|
| $200^1$ | $140^1$ | $180^{0.24}$ | $1+1+0.24=2.24$ |
| $180^1$ | $160^1$ | $180^{0.24}$ | $1+1+0.24=2.24$ |
| | $140^1$ | $200^{0.40}$ | $1+1+0.40=2.40$ |
| | $120^{0.58}$ | $220^{0.57}$ | $1+0.58+0.57=2.17$ |
| $160^{0.67}$ | $140^1$ | $220^{0.57}$ | $0.67+1+0.57=2.24$ |
| $140^{0.40}$ | $140^1$ | $220^{0.57}$ | $0.40+1+0.77=2.17$ |

由表7-1-3看出，该单位产品之产量分配（表7-1-4）。

为了适应变化的需要，可选择若干（譬如四个）产量的可行决策作为备用（表7-1-5）。

**单位产品产量分配　　表 7-1-4**

| 品　种 | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|
| 产　量 | 180 | 140 | 200 |

**可行决策（产量）　　表 7-1-5**

| 品种 / 决策 | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | 180 | 140 | 200 |
| $S_2$ | 200 | 140 | 180 |
| $S_3$ | 180 | 160 | 180 |
| $S_4$ | 160 | 140 | 220 |

## 二、第 二 级 模 糊 决 策

产品的销售由于自然状态的多因素干扰，在时间系列上不可避免地会出现波动，诸如

市场需要的倾向性变动、偶然性波动、季节性波动以及商业循环性的波动等影响。因此，企业的经营决策应根据市场预测能够及时地进行调整。不仅如此，在新形势下，尤其需要注意市场的竞争。因此，完善的企业经营决策，应构成多种方案、有限的策略集合。

事实上，在每一局对策中，企业的“得失”必定与全体有关企业所取定的一组策略有关。换句话说，一局对策结束时，某个企业的“得失”是全体有关企业所取定的一组策略的函数，通常称作“得失函数”。对于确定的一组策略子集，可以相应得到一个“得失矩阵”。企业经营的决策者，根据得失矩阵可制定第二级模糊决策。

设由第一级模糊决策得到的决策集为$\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$，并根据市场调查与预测得到的得失矩阵为$A$，则利用对策论中的经典方法，即可求得最优混合策略$X=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$。

**例** 由上例中的策略集$\{S_1, S_2, \cdots, S_4\}$，并设定得失矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

便可解得混合策略为$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$。

## 三、第三级模糊决策

来自各相关企业部门的第二级模糊决策，集中到上级机构，尚需统筹安排，特别要考虑国际市场的竞争。因此，更高层的经营决策，往往需要选定某个或某几个有利于外销任务完成的厂点，以它们的混合策略作为最高层经营决策的追逐目标。记作

$$\underset{\sim}{G}_N=\frac{a_1}{S_1}+\frac{a_2}{S_2}+\cdots+\frac{a_n}{S_n}。$$

而对其它单位的决策目标，则采取协调策略，以确保总的追逐目标之实现。

设甲有策略集$X=\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$，乙有策略集$u=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$，在时刻$t$，甲采取的策略为$X_t$，而限制条件为乙采取的策略$u_t$，则下一时刻甲采取的策略由$X_t$与$u_t$所决定，记作

$$X_{t+1}=f(X_t, u_t) \qquad (t=0, 1, 2\cdots)$$

每一时刻$t$，$u_t$要接受的模糊限制为$\underset{\sim}{C}_t$。要追逐的模糊目标为$\underset{\sim}{G}_N$。

任一序列$(u_0^*, u_1^*, \cdots, u_{N-1}^*)$使

$\underset{\sim}{D}(u_0, u_1, \cdots, u_{N-1})=\min(\underset{\sim}{C}_0(u_0), \underset{\sim}{C}_1(u_1), \cdots, \underset{\sim}{C}_{N-1}(N-1), \underset{\sim}{G}_N(X_N))$

达到最大值，称之为给定系统的最优决策序列。而$(u_0^*, u_1^*, \cdots, u_{N-1}^*)$的求法是对$k$从$N-1$到0迭代计算。

$\underset{\sim}{G}_k=\max(\min(\underset{\sim}{C}_k(u_k), \underset{\sim}{G}_{k+1}(f(X_k, u_k))) \quad (k=N-1, N-2, \cdots, 0)$，对每一个$k$，求出使

$$\min(\underset{\sim}{C}_k(u_k), \underset{\sim}{G}_{k+1}(f(X_k, u_k)))=\underset{\sim}{G}_k(X_k)$$

成立的$u_k^*$，则$(u_0^*, u_1^*, \cdots, u_{N-1}^*)$即为系统的最优决策序列。

注意，$u_k$依赖于$X_k$，若$u_k$是单值的，则记

$$u_k^* = P_k(X_k) \qquad (k = N-1,\ N-2,\ \cdots,\ 0)$$

称为策略函数。

若已知$P_k(X_k)$，$(k=0,\ 1,\ 2\cdots,\ N-1)$，对于给定的$X_0$，则最优决策序列为：

$$u_0^* = P_0(X_0)$$

$$u_1^* = P_1(X_1^*) \quad (X_1^* = f(X_0,\ u_0^*))$$

$$u_2^* = P_2(X_2^*) \quad (X_2^* = f(X_1^*,\ u_1^*))$$

………………………………………………

$$u_{N-1}^* = P_{N-1}(X_{N-1}^*) \quad (X_{N-1}^* = f(X_{N-2}^*,\ u_{N-2}^*))。$$

例　设甲有四个策略$X=\{S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4\}$，乙有三个策略$u=\{C_1,\ C_2,\ C_3\}$，若$X_{t+1}$对$X_t$，$u_t$的依赖关系$X_{t+1}=f(X_t,\ u_t)$为：

| $X_{t+1}$ \ $X_t$ / $u_t$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $C_1$ | $S_4$ | $S_4$ | $S_1$ | $S_2$ |
| $C_2$ | $S_2$ | $S_1$ | $S_4$ | $S_2$ |
| $C_3$ | $S_4$ | $S_3$ | $S_2$ | $S_1$ |

模糊限制为：

$$\underset{\sim}{C}_0 = 0.21/C_1 + 0.35/C_2 + 0.44/C_3$$

$$\underset{\sim}{C}_1 = 0.29/C_1 + 0.30/C_2 + 0.41/C_3$$

$$\underset{\sim}{C}_2 = 0.31/C_1 + 0.40/C_2 + 0.29/C_3$$

$$\underset{\sim}{C}_3 = 0.43/C_1 + 0.27/C_2 + 0.30/C_3$$

模糊目标为：

$$\underset{\sim}{G}_4 = 0/S_1 + 0.5/S_2 + 0.5/S_3 + 0/S_4$$

求最优决策序列。

解：$k=3$，将模糊目标代入$X_{t+1}=f(X_t,\ u_t)$得

$$\underset{\sim}{G}_4(f(X_3,\ u_3)) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

再计算

$$\min(\underset{\sim}{C}_3(u_3),\ \underset{\sim}{G}_4(f(X_3,\ u_3))) = \begin{bmatrix} 0.43 & 0 & 0 & 0.43 \\ 0.27 & 0 & 0 & 0.27 \\ 0 & 0.30 & 0.30 & 0 \end{bmatrix}$$

故得　$\underset{\sim}{G}_3(X_3) = (0.43,\ 0.30,\ 0.30,\ 0.43)$

所以　$u_3^* = P_3(X_3)$为

| $X_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $u_3^*$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_1$ |

$k=2$:

$$\underset{\sim}{G}_3(f(X_2,\ u_2))=\begin{bmatrix}0.30 & 0.43 & 0.43 & 0.30\\ 0.30 & 0.43 & 0.43 & 0.30\\ 0.43 & 0.30 & 0.30 & 0.43\end{bmatrix}$$

$$\min\left(\underset{\sim}{C}_2(u_2),\ \underset{\sim}{G}_3(f(X_2,\ u_2))\right)=\begin{bmatrix}0.30 & 0.31 & 0.31 & 0.30\\ 0.30 & 0.40 & 0.40 & 0.30\\ 0.29 & 0.29 & 0.29 & 0.29\end{bmatrix}$$

故得 $\underset{\sim}{G}_2(X_2)=(0.30,\ 0.40,\ 0.40,\ 0.30)$

$u_2^*=P_2(X_2)$为

| $X_2$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $u_2^*$ | $C_1$或$C_2$ | $C_2$ | $C_2$ | $C_1$或$C_2$ |

$k=1$:

$$\underset{\sim}{G}_2(f(X_1,\ u_1))=\begin{bmatrix}0.40 & 0.30 & 0.30 & 0.40\\ 0.40 & 0.30 & 0.30 & 0.40\\ 0.30 & 0.40 & 0.40 & 0.30\end{bmatrix}$$

$$\min\left(\underset{\sim}{C}_1(u_1),\ \underset{\sim}{G}_2(f(X_1,\ u_1))\right)=\begin{bmatrix}0.29 & 0.29 & 0.29 & 0.29\\ 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.30\\ 0.30 & 0.40 & 0.40 & 0.30\end{bmatrix}$$

故得 $\underset{\sim}{G}_1(X_1)=(0.30,\ 0.40,\ 0.40,\ 0.30)$

$u_1^*=P_1(X_1)$为

| $X_1$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $u^*$ | $C_2$或$C_3$ | $C_3$ | $C_3$ | $C_2$或$C_3$ |

$k=0$

$$\underset{\sim}{G}_1(f(X_0,\ u_0))=\begin{bmatrix}0.40 & 0.30 & 0.30 & 0.40\\ 0.40 & 0.30 & 0.30 & 0.40\\ 0.30 & 0.40 & 0.40 & 0.30\end{bmatrix}$$

$$\min\left(\underset{\sim}{C}_0(u_0),\underset{\sim}{G}_1(f(X_0u_0))\right)=\begin{bmatrix}0.21 & 0.21 & 0.21 & 0.21\\ 0.35 & 0.30 & 0.30 & 0.35\\ 0.30 & 0.40 & 0.40 & 0.30\end{bmatrix}$$

故得 $\underset{\sim}{G}_0(X_0)=(0.35,\ 0.40,\ 0.40,\ 0.35)$

$u_0^* = P_0(X_0)$为

| $X_0$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_0^*$ | $C_3$ | $C_3$ | $C_3$ | $C_2$ |

设定$X_0 = S_2$

则有
$$u_0^* = P_0(X_0) = P_0(S_2) = C_3;$$
$$X_1^* = f(X_0,\ u_0^*) = f(S_2,\ C_3) = S_3;$$
$$u_1^* = P_1(X_1^*) = P_1(S_3) = C_3;$$
$$X_2^* = f(X_1^*,\ u_1^*) = f(S_3,\ C_3) = S_2;$$
$$u_2^* = P_2(X_2^*) = P_2(S_2) = C_2;$$
$$X_3^* = f(X_2^*,\ u_2^*) = f(S_2,\ C_2) = S_1;$$
$$u_3^* = P_3(X_3^*) = P_3(S_1) = C_1。$$

因此最优决策序列为

$$(S_2,\ C_3) \to (S_3,\ C_2) \to (S_2,\ C_2) \to (S_1,\ C_1)$$

若$X_0$取$S_1$，$S_3$或$S_4$，算法同上，则可得到最优决策序列集。那么采用最优决策序列集中任一方案，均可达到企业经营的决策目标。

## §7-2　管理系统的模糊诊断[116]

1986年，吴卫国提出了一个管理系统的Fuzzy诊断的数学模型，并在生产部门进行了实际运用，收到了一定的效果。

### 一、问 题 的 提 出

管理系统的经济效益可以用一群包含生产收益、生产消耗、资金运用的指标来描述。这样一群指标是管理系统中各子系统及各子系统中各单元相互作用、相互依赖、共同努力的结果。往往一个指标牵涉到很多部门（子系统），一个部门及其内部的单元又对指标群中的好多个指标作出不同程度的贡献。既然指标群是管理系统中各子系统及子系统各单元的共同奋斗，并作出不同程度的贡献的结果，那么能否用这样一个指标群来对管理系统中各子系统及子系统各单元进行客观诊断和评判呢？这是我们所要探讨的中心问题。

### 二、数 学 模 型

设一个管理系统$C$由几个子系统$c_1$，$c_2$，…，$c_n$组成，是诊断的对象，用$C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$表示。

在管理系统的指标群中共有$m$个指标，称为指标集，是诊断分析的信息和依据，用$U$表示，$U = \{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$，$x_i$为第$i$个指标值。

对管理系统诊断后所获得的结果有$l$个等级，称为诊断结果集，用$V = \{v_1,\ v_2, \cdots, v_l\}$表示。由于管理系统是主体控制客体并使之适合主体的控制系统，因此诊断结果，即系统的优良程度的评定级别，可由主体来决定。

在实际的管理系统中，指标集中的任一指标值与诊断的 $l$ 个结果间的关系是Fuzzy的，我们称这个关系

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1, v_1) & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1, v_2) & \cdots & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1, v_l)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_m, v_1) & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_m, v_2) & \cdots & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_m, v_l)\end{bmatrix}\in F(U\times V)$$

为指标集与诊断结果的Fuzzy关系，其中$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_i, v_j)$叫做具有关系$\underset{\sim}{R}$的程度，具体的Fuzzy关系$\underset{\sim}{R}$由系统的主客观状态所决定的，一般可通过专家经验统计决定。

另外，管理系统中的$n$个子系统对其指标群中各指标的贡献程度是不同的，即$\forall c_i\in C$，对$U=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$存在一个贡献程度分配，由于管理系统的复杂性，这个贡献程度的分配实质上也就是$C$与$U$的一个模糊关系，用$\underset{\sim}{a}$表示，则

$$\underset{\sim}{a}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}\in F(C\times U)$$

其中$a_{ij}=\mu_a(c_i, x_j)$表示子系统$c_i\in C$对指标值$x_j\in U$的贡献程度。

在管理系统的诊断中，决策者要知道的是各子系统的优良程度（即$C$与$V$的Fuzzy关系）以便进行决断，这个关系用$\underset{\sim}{B}$表示，由Fuzzy关系的合成定义知：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{a}\circ\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1v_1),\cdots & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1v_l)\\ \vdots & \cdots\ \vdots\\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_mv_1),\cdots & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_mv_l)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl}\end{bmatrix}$$

其中 $b_{ik}=\bigvee_{j=1}^{m}(a_{ij}\wedge\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_j,v_k))$表示子系统$c_i$与诊断$v_k$的相关程度。由于管理系统的指标群是一个有机的整体，是各贡献程度不同的子系统共同努力的结果，往往指标的变化直接反映着某些子系统的努力程度。因此，在Fuzzy关系的合成运算中采用$\vee$，$\wedge$ 运算必将"泯没"许多信息。为兼顾管理系统的特殊性，采用加权平均型运算代替最大，最小运算。即 $b_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\cdot\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_j, v_k)$，$\sum$表示对$m$个数在$\oplus$运算下求和，且 $a\oplus b=\min(1, a+b)$。

比较$\underset{\sim}{B}$中列向量各元素的数值大小，不难得到下列二个最优准则：

1.先进评定最优准则

对$\underset{\sim}{B}$中第一列的各数值依大小排列，若$b_{i1}>b_{j1}$，$i, j=1, 2, \cdots, n$，$i\neq j$，则$c_i$先进程度优于$c_j$；若$b_{i1}=\max\{b_{11}, b_{21}, \cdots, b_{n1}\}$，则$c_i$为最优先进子系统。

2.子系统最优整改准则

对$\underset{\sim}{B}$中最后列的数值依大小排列，若$b_{il}>b_{jl}$，则整改$c_i$优于整改$c_j$，若 $b_{il}=\max\{b_{1l}, b_{2l}, \cdots, b_{nl}\}$，则整改$c_i$最优。

## 三、管理系统诊断分析实例

我们以无锡市县联营毛条厂的梳条车间作为一个管理系统进行诊断分析。据纺织行业的管理经验，一个车间的管理系统（$C$）由设备管理子系统（$c_1$），工艺管理子系统($c_2$)和操作运转管理子系统（$c_3$）组成，即$C=\{c_1, c_2, c_3\}$。

根据纺织工业部的标准及车间设备生产能力，考核梳条车间的工作好坏共有 6 个主要指标，指标情况及分档由表7-2-1给出：

指 标 及 分 档　　　　表 7-2-1

| 指 标 | 月产量$x_1$（吨） | 精梳机台年产量$x_2$（吨） | 一等品率$x_3$（%） | 用毛率$x_4$（%） | 完好率$x_5$（%） | 准期率$x_6$（%） |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 一 档 | 100 | 34 | 94 | 128 | 95 | 95 |
| 二 档 | 80 | 32 | 92 | 131 | 90 | 90 |
| 三 档 | 60 | 30 | 90 | 134 | 85 | 85 |

注：生产原料为国毛

因此，其指标集为$U=\{x_1, x_2, \cdots, x_6\}$。

依据我们日常的管理经验及决策的需要，定义一个诊断结果集$V=\{$正常，较正常，不正常$\}=\{v_1, v_2, v_3\}$。

我们根据日常生产经验，定义$\underset{\sim}{R}$中的各隶属函数为：

对于日产量$x_1$：

$$v_1: \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1, v_1)=\begin{cases}1 & 100\leqslant x_1\\ x_1-80/20 & 80\leqslant x_1<100\\ 0 & x_1<80\end{cases}$$

$$v_2: \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1, v_2)=\begin{cases}0 & 100\leqslant x_1\\ 100-x_1/20 & 80\leqslant x_1<100\\ x-60/20 & 60\leqslant x_1<80\\ 0 & x_1<60\end{cases}$$

$$v_3: \mu_{R}(x_1, v_3)=\begin{cases}0 & 80\leqslant x_1\\ 80-x_1/20 & 60\leqslant x_1<80\\ 1 & x_1<60\end{cases}$$

对于精梳机台年产量$x_2$：

$$v_1: \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2, v_1)=\begin{cases}1 & 34\leqslant x_2\\ x_2-32/2 & 32\leqslant x_2<34\\ 0 & x_2<32\end{cases}$$

$$v_2: \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2, v_2)=\begin{cases}0 & 34\leqslant x_2\\ 34-x_2/2 & 32\leqslant x_2<34\\ x_2-30/2 & 30\leqslant x_2<32\\ 0 & x_2<30\end{cases}$$

$$v_3:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2,\ v_3)=\begin{cases}0 & 32\leqslant x_2\\ 32-x_2/2 & 30\leqslant x_2<32\\ 1 & x_2<30\end{cases}$$

对于一等品率$x_3$：

$$v_1:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_3,\ v_1)=\begin{cases}1 & 94\leqslant x_3\\ x_3-92/2 & 92\leqslant x_3<94\\ 0 & x<92\end{cases}$$

$$v_2:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_3,\ v_2)=\begin{cases}0 & 94\leqslant x_3\\ 94-x_3/2 & 92\leqslant x_3<94\\ x_3-90/2 & 90\leqslant x_3<92\\ 0 & x_3<90\end{cases}$$

$$v_3:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_3,\ v_3)=\begin{cases}0 & 92\leqslant x_3\\ 92-x_3/2 & 90\leqslant x_3<92\\ 1 & x_3<90\end{cases}$$

对于用毛率$x_4$：

$$v_1:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_4,\ v_1)=\begin{cases}1 & 100<x_4\leqslant 128\\ 131-x_4/3 & 128<x_4\leqslant 131\\ 0 & 131<x_4\end{cases}$$

$$v_2:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_4,\ v_2)=\begin{cases}0 & 100<x_4\leqslant 128\\ x_4-128/3 & 128<x_4\leqslant 131\\ 134-x_4/3 & 131<x_4\leqslant 134\\ 0 & 134<x_4\end{cases}$$

$$v_3:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_4,\ v_3)=\begin{cases}0 & x_4\leqslant 131\\ x_4-131/3 & 131<x_4\leqslant 134\\ 1 & 134<x_4\end{cases}$$

对于完好率$x_5$：

$$v_1:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_5,\ v_1)=\begin{cases}0 & 95\leqslant x_5<100\\ x_5-90/5 & 90\leqslant x_5<95\\ 1 & x_5<90\end{cases}$$

$$v_2:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_5,\ v_2)=\begin{cases}0 & 95\leqslant x_5<100\\ 95-x_5/5 & 90\leqslant x_5<95\\ x_5-85/5 & 85\leqslant x_5<90\\ 0 & x_5<85\end{cases}$$

$$v_3:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_5,\ v_3)=\begin{cases}0 & 90\leqslant x_5\\ 90-x_5/5 & 85\leqslant x_5<90\\ 0 & x_5<85\end{cases}$$

对于准期率$x_6$：

$$v_1:\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_6,\ v_1)=\begin{cases}1 & 95\leqslant x_6<100\\ x_6-90/5 & 90<x_6<95\\ 0 & x_6<90\end{cases}$$

$$v_2: \underset{\sim}{\mu_R}(x_6, v_2) = \begin{cases} 0 & 95 \leqslant x_6 < 100 \\ 95 - x_6/5 & 90 \leqslant x_6 < 95 \\ x_6 - 85/5 & 85 \leqslant x_6 < 90 \\ 0 & x_6 < 85 \end{cases}$$

$$v_3: \underset{\sim}{\mu_R}(x_6, v_3) = \begin{cases} 0 & 90 \leqslant x_6 \\ 90 - x_6/5 & 85 \leqslant x_6 < 90 \\ 1 & x_5 < 85 \end{cases}$$

请有丰富经验的梳条车间管理同志对如下子系统各项指标的贡献作出的权重为（表7-2-2）：

**权 重 值** 表 7-2-2

| 子系统 | 月产量 | 精梳机台年产量 | 一等品率 | 用毛率 | 完好率 | 准期率 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 设 备 | 0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.3 | 0.7 | 0.8 |
| 工 艺 | 0.3 | 0.2 | 0.5 | 0.4 | 0.1 | 0.05 |
| 操 作 | 0.4 | 0.6 | 0.3 | 0.3 | 0.2 | 0.15 |

即：

$$\underset{\sim}{a} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.7 & 0.8 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0.05 \\ 0.4 & 0.6 & 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.15 \end{bmatrix}$$

现根据今年6月份车间的一组指标来对车间进行诊断分析6月份指标值。6月份的各指标值如表7-2-3。

**6 月 份 指 标 值** 表 7-2-3

| 月产量$x_1$ | 精梳机台年产量$x_2$ | 一等品率$x_3$ | 用毛率$x_4$ | 完好率$x_5$ | 准期率$x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 55.4吨 | 30.04吨 | 100% | 152.14% | 100% | 100% |

将表中数据代入矩阵$\underset{\sim}{R}$并计算得

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.02 & 0.98 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

进行Fuzzy关系的复合运算得

$$\underset{\sim}{B} = a \circ R = \begin{bmatrix} 1 & 0.004 & 0.796 \\ 0.65 & 0.004 & 0.895 \\ 0.6 & 0.01 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{设备} \\ \text{工艺} \\ \text{操作} \end{matrix}$$

（列依次为：正常、较正常、不正常）

由准则2知对梳条车间的整顿工作必须从运转操作入手最优。事实上该车间在85年6月份前，运转操作法无人管理，挡车工不按工作法工作，在车间的坏车统计分析中，有70%的坏车是由操作不当引起的，可见诊断分析与实际情况是相符合的。

1986年7月份在上级公司领导的帮助下，车间特别加强了运转管理，采取了块块管理，质量承包到个人等措施并每班增加了一个运转机工，同时抽调专人搞操作法管理。结果7月份车间的主要指标优于上个月。其对比数据如下（表7-2-4）。

指标数据对比　　表7-2-4

| 月　份 | 月产量$x_1$ | 精梳机台年产量$x_2$ | 一等品率$x_3$ | 用毛率$x_4$ | 完好率$x_5$ | 准期率$x_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 55.4吨 | 30.04吨 | 100% | 152.14% | 100% | 100% |
| 7 | 84.2吨 | 51.08吨 | 100% | 149.84% | 71.4% | 100% |

## §7-3　合资经营企业谈判的目标规划模型及经济评价[119]

1986年，顾培亮、刘起、殷淑俨、赵允兴等就中外合资经营企业项目的谈判过程应用系统工程方法作了初步尝试。以中国××-外国×××合资经营企业的谈判作为背景，提出了目标规划和综合经济评价两个模型，并利用该谈判的真实资料和数据进行了模型运算，证明所提模型是可行的，计算结果是令人满意的。

### 一、谈判模型的设计思想

中外合资经营企业谈判工作的核心是项目的可行性研究及其方案的综合评价工作。主要研究解决在满足市场需求和提高工艺技术等前提下，使企业的投资获利最大为目的的重大决策问题。为了解决这一问题，设计了如图7-3-1所示的程序框图。它的基本思想是根据一定的市场需求、资源条件、政策及其他约束条件等，由目标规划模型得出方案，对此方案进行经济分析。经济分析包括拟定不同的资金筹措计划，现金流出计算、销售收入、预测计算成本，最后算出利润。由于在资金筹措计划中有外商投资，在多数情况下，外商还以技术转让为资本投入企业，因此，使得中外利润分成模式更加复杂。

综合评价包括财务评价、灵敏度分析和国民经济效益分析。通过综合评价得出结论性的评价报告。若对综合评价的结论不满意，则需调整方案，重新输入模型进行运算。在得到了可行方案后，要进一步研究是否还存在其他的可行方案，以便为谈判提供更多的方案。

依照上述方法，我们将获得的多个可行方案，按决策者的意愿排出最佳、佳、次佳…的顺序。并以此为序与外商谈判。力争在较前面的方案上达成协议。若此顺序中没有方案可与外商达成协议或在谈判过程中获取了一些新信息需及时处理时，则将谈判中断或将得到的情况再输入模型进行运算，随时为决策者提供方案。

### 二、目标规则模型

目标规划模型是一种多目标决策模型，通过目标规划模型的求解为决策者提供满意解。目标规划模型表述如下：求一组$x_j$，使得目标函数：$F=\{g_1(y^+,y^-,x)+g_2(y^+,y^-,$

$x$）$+\cdots+g_m$（$y^+$，$y^-$，$x$）}达到极小。满足于：

$$f_i(x)-y_i^++y_i^-=b_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

$$h_t(y^+,\ y^-)-y_t^++y_t^-=b_t, t=m+1, m+2, \cdots, m+T$$

$$x_j,\ y_i^+,\ y_i^-,\ y_t^+,\ y_t^-\geqslant 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

其中：$x_j$为第$j$个决策变量；$y_i^+$，$y_t^+$为正偏差变量；$y_i^-$，$y_t^-$为负偏差变量；$f_i(x)$为决策变量函数；$h_t(y^+,\ y^-)$为偏差变量函数。

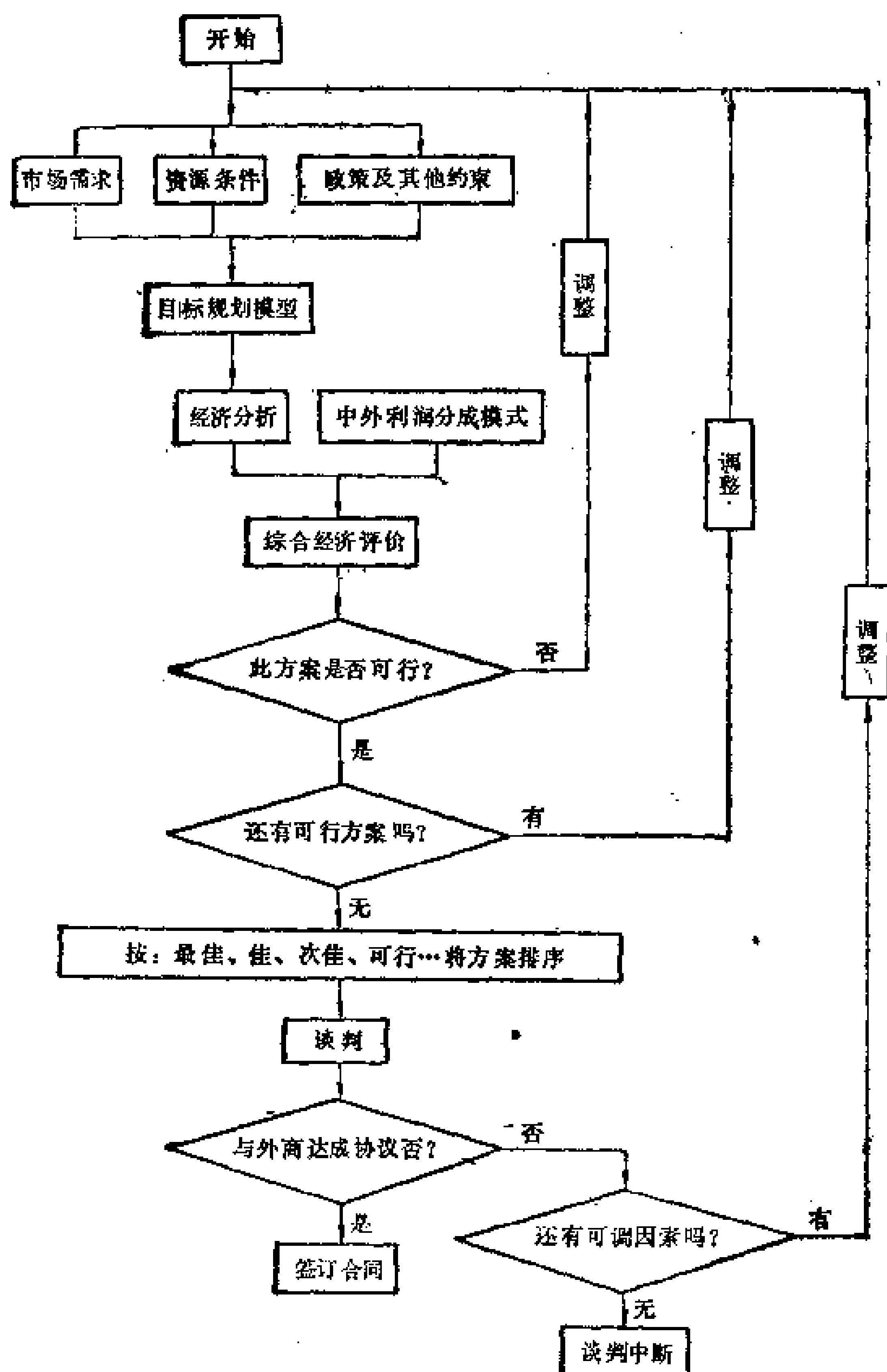



图 7-3-1 谈判系统模型示意图

## 三、综合经济评价

综合经济评价是对目标规划模型求解得出的方案并进行经济效果的评价，从而断定此方案是否可行。它包括三个部分：财务评价，灵敏度分析和国民经济效益评价。

1.财务评价

财务评价主要是评价企业投资后，通过经营活动获得的经济效益如何，是否有利可图。由于企业是中外合资，因此，不但要对企业从整体上进行财务评价，而且还要分别评价中方和外商各自的经济利益情况。

财务评价可遵循的指标很多，我们采用了一个静态指标（即还本期）和四个动态指标（即投资回收期、净现值、净现值率和内部回收率）。分述如下：

（1）还本期（$T$），其数学表达式$\sum_{t=0}^{T} C_t = 0$，其中$C_t$表示第七年现金流量。还本期代表的含义是用本项目赚得的净利润偿还原来投资支出所需的时间。

（2）投资回收期（$Z$），其数学表达式$\sum_{t=0}^{Z} \frac{C_t}{(1+I)^t} = 0$，其中$I$为贴现率。投资回收期代表的含义是用本项目按照预先确定的利率贴现而赚得的净利润，偿还原来投资支出所需的时间。

（3）净现值（$NPV$），其数学表达式$NPV = \sum_{t=0}^{N} \frac{C_t}{(1+I)^t}$，其中$N$为工程项目经营的年限。净现值代表的含义是本项目经营的全部年限内，每一年各项现金流量按预先确定的利率贴现而得的总和。

（4）净现值率（$NPVR$），其数学表达式为

$$NPVR = NPV \Big/ \sum_{t=0}^{N} \frac{D_t}{(1+I)^t},$$

其中$D_t$为第七年投资额。净现值率代表的含义是本项目每单位投资的现值获取的净现值数额。投资的现值是指全部项目经营年限内每一年投资按固定的利率贴现而得的总和数额。

（5）内部回收率（$IRR$），其数学表达式：

$$\sum_{t=0}^{N} \frac{C_t}{(1+IRR)^t} = 0$$

内部回收率代表的含义是使本项目在全部经营期限内流入的现金现值等于流出的现金现值时的贴现率。换言之，是使本项目在全部经营期限内净现值为零的贴现率。

当然，对于不同的建设项目，财务评价使用的指标可以不同，可进行增、减调整。

2.灵敏度分析

通过灵敏度分析可以看出该项目获取的利润随着产品的销售单价、单位成本和销售数量等的变化而变化的程度。或者说后者的变化对利润的灵敏程度，所用的指标仍可以是财务评价中的指标。本模型的灵敏度分析分别计算当产量下降10%，销售单价下降10%和材料费上升10%时，企业的五项经济指标各为多少。

按照产量下降10%进行灵敏度分析的步骤是：

（1）调整目标规划与产量有关的参数，并求解调整后的目标规划模型。

（2）根据此解计算税前利润（由经济分析和中外利润分成模式子程序算出），然后计算现金流量程序中相应的变量。

（3）运行综合经济评价程序，计算五项经济指标。

按销售单价下降10%进行灵敏度分析的步骤是：

（1）重新计算各产品的利润系数。

（2）重新设利润目标，调整原目标规划中各个与销售价有关的系数，构成新的目标规划模型求解。

（3）按照新目标规划的解计算五项经济指标。

按材料费上升10%进行灵敏度分析的步骤相同。

3.国民经济效应的评价

除仍采用财务评价来评判国民经济的直接收益外，还要考虑本项目对增加国民经济总产值，对工业体系布局，对工业技术进步的影响等方面所产生的社会效益。

## 四、企业经营目标规划模型的讨论

1.目标规划模型的求解思想

目标规划模型结构与线性规划模型结构相似，但求解的思想有差别。线性规划立足于求最优解，而目标规划立足于求满意解。

线性规划的最优是数学意义上的最优，其实质是求极值点和极值。线性规划最优解的经济含义是在可能的范围内充分地消耗资源使得所追求的某一目标在此点达极值。显然，在多目标决策问题中用线性规划求解，其含义就变成了以牺牲其他一些本来也是决策者追求的目标为代价来换取某一目标到达极值，有时线性规划的最优解背离了实际上的最佳方案，这是与决策者的“多个目标兼顾”意愿相违背的。特别是在相互矛盾的目标同时存在时，这一问题更为突出。实际上对于一个多目标兼顾的可行方案来讲，尽管它未达到线性规划的最优解（权值），然而却可能是被决策者采纳的满意解。

2.企业经营的目标规划解题步骤

本企业项目的目标规划解题步骤如图7-3-2所示。首先从线性规划入手，分析并找出制约和影响企业经营活动的主要因素，设计线性规划模型求解，通过分析研究线性规划的解。然后编制计划目标方案，确定各目标的优先序、优先权，建立多个目标的目标规划模型及其偏离系数。通过对这些偏离的研究，使我们对已编制的计划目标的合理性和达到这些目标的可能性及困难程度有了进一步的认识。对于存在偏差的计划目标，为了消除偏差可用一系列子目标，并可采用目标规划的方法解决。

在目标规划求解的过程中，偏差变量的数值可指导规划的调整。通常可以设想若干方案，有些方案看来难以实现，但又不知道如何调整才能费力最小地实现这些方案。目标规划可定量地进行分析并找出解决途径。这个方案不但给出了线性规划可以给出的生产安排计划，而且还给出了完成此计划方案所必须达到的一系列指标和达标措施。显然，目标规划为企业经营管理过程实现目标管理也打下了一个初步基础。

此外，还常会遇到这种情况，当对要研究的问题还没有较深的认识时，构成一组约束条件可能本身是不相容的；即无可行域，因而无可行解。线性规划不给出在无解的条件下参数调整的方向和大小，而此时人们恰恰最关心的是如何得到可行解，即当前的约束条件与获得可行域尚存多大的差距。

3.目标规划求解方法的讨论

目标规划与线性规划具有相同的数学形式，因此求解线性规划的方法——单纯形法可被移植于目标规则中，但由于目标规划对诸目标规定了不同优先序和优先权，从而使检验

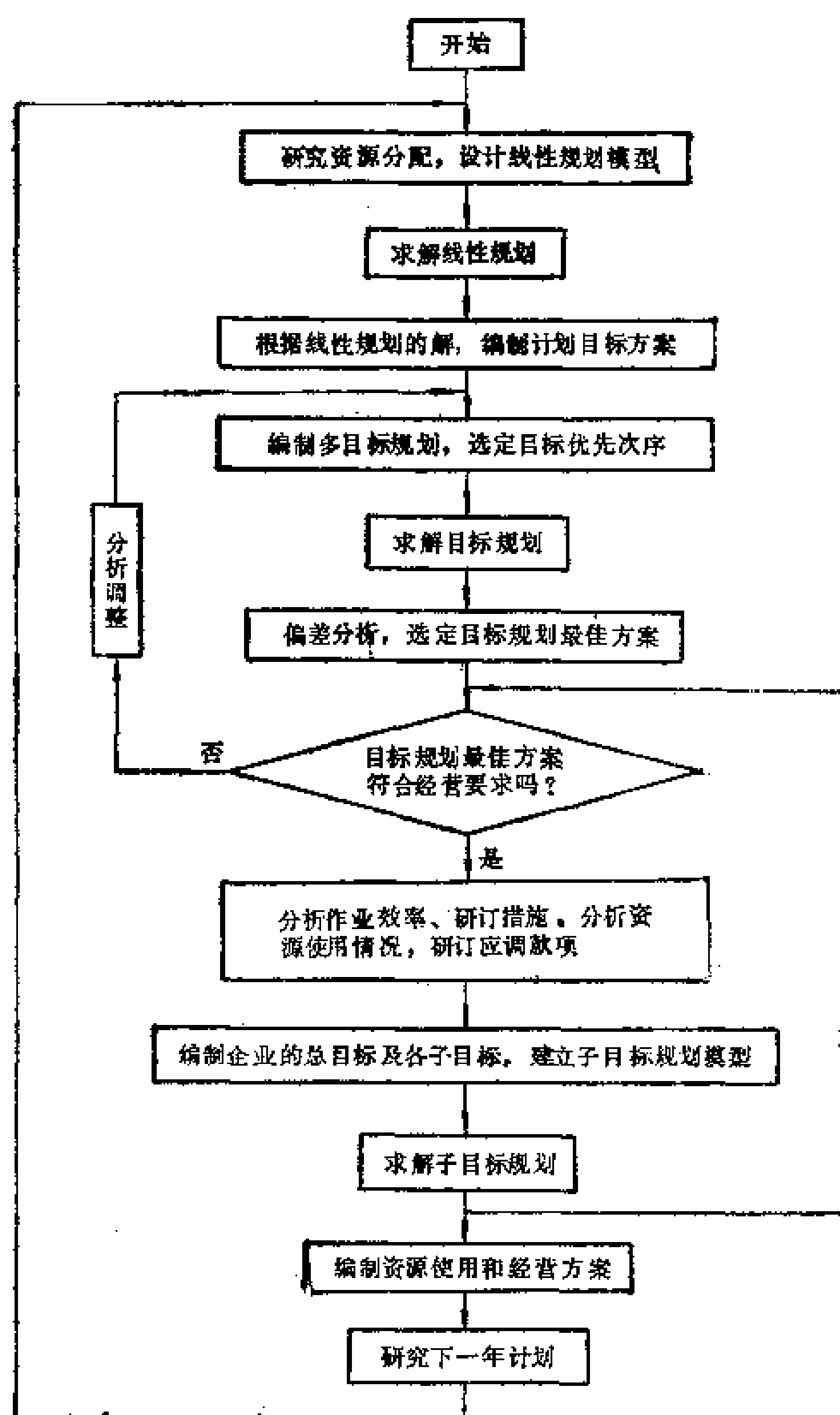



图 7-3-2 制定企业经营的目标规划流程框图

数复杂化。

在目标规划中，作了如下假设：设$P_i$为优先序，$W_i$为优先权，则无论$W_{i+1}$为多么大的有限数值时，恒有$P_i > W_{i+1}P_{i+1}$，记作$P_i \gg P_{i+1}$，$i=1, 2, \cdots, n-1$。

在此假设下，原线性规划单纯形表中的检验数$\sigma_j = C_j - Z_j$，则构成了判别矩阵。可用总体判别准则和层序判别准则确定应换的基变量，进行旋转迭代并判别迭代是否已达终点。

两种判别准则的实际经济意义可以作这样的描述，在$P_i \gg P_{i+1}$的前提下，就目标函数的极小化的数学意义而言，用总体判别准则求得的解优于用层序判别准则求得的解。但就其欲达决策者寻求“满意解”的思想而言，用总体判别准则求得的解所代表的经济含义，不一定比用层序判别准则求得的解更优。目标规划虽解决了线性规划模型的目标单一问题，但仍在一定程度上存在着“根据总体判别准则下的最优而并不一定是我们所期望的实际上的最优”。这主要是因为在建立目标规划模型时作了$P_i \gg P_{i+1}$这样的假设，而这

种假设与客观事实有时会不相符。譬如，我们将某一目标规划问题中的利润目标规定为$P_1$级，投资目标为$P_2$级。根据总体判别准则求解很可能得出$op_1+ap_2$,其中$a$是一个很可观的大数，而层序判别准则计算的结果可能为$ap_1+bp_2$，其中$a$是一个不大的正数，$b$是一个比$a$小得多的数。从目标规划的数学意义出发，必然有$op_1+ap_2<ap_1+bp_2$，因此得出结论：总体判别准则下的解为最优。然而，从其代表的经济含义出发，决策者往往认为层序判别准则的解尽管使得利润目标稍有差距，但大幅度地降低了投资，作为牺牲一定利润的代价换取了投资的大量减少，可能在某种条件下是值得的，决策者会采取这种尽管就目标规划的数学意义上不优而实际上更满意的方案。因此，层序判别准则的经济含义是表明在总体判别准则下已最优的条件下，要继续减少低序目标的偏差，较高序的目标要付出多大的代价。显然这种分析对决策者来说是很有意义的，所以，在求解目标规划问题时这两种判别准则都必须采用，并对比分析两种准则下解的差异，为决策者提供信息。

## 五、实 例 分 析

本实例选用中国××-×国×××合资经营企业的真实谈判数据资料，说明本谈判模型的运行情况。

1.项目概况

本项目是拟建生产某大型专用设备公司，由中国××和×国×××投资建设。通过建立合营企业，中、外双方都各有追求目标。

中国××方面的目的是：（1）引进国外先进技术，使产品迅速达到国际先进水平；（2）使现有工厂全面改造；（3）改善经营管理；（4）提高经济效益；（5）使部分产品进入国际市场。

×国×××方面的目的是：（1）进入中国这个具有巨大潜力的该种专用设备的市场；（2）使用廉价的资源和劳动力，降低产品的销价，提高在国际市场上的竞争力；（3）在合营期间，通过技术转让和分红等途径，获得较大的利润收入。

通过初步可行性研究，设想合营企业设三个车间和两个施工队，即电机车间（产品为专用电机和普通电机）；机械车间（产品为机械和减速机）；专用设备车间（产品为由专用电机和机械配套组装的专用设备总机）；安装队（提供安装服务），维修队（提供维修服务）。

各车间生产的各产品在国内市场均可作为本厂最终产品出售，但在国际市场上只有专用设备总机可作为最终产品出售。

2.目标规划模型及求解

本企业合营十年。所以分别求如下目标规划模型十年中的每年度的解。设$x_1,x_2,\cdots,x_7$分别代表专用电机、普通电机、机械、减速机、专用设备总机的产量及安装、维修的数量。

1）确定目标

根据预测和本工程项目的特点以及中国××的现状分析，结果认为有如下十五个目标：税前利润目标（$b_1$）；材料总耗量目标（$b_2$）；人力总耗量目标（$b_3$）；市场需求及其他特殊要求目标（$b_4\sim b_{10}$）；固定资产总占用目标（$b_{11}$）；流动资金总占用目标（$b_{12}$）；创外汇目标（$b_{13}$）；对$b_4$负偏差控制目标（$b_{14}$）；对$b_8$负偏差控制目标（$b_{15}$）。

2）确定优先序及优先权

根据决策者的意图和这十五个目标所处的客观地位的分析确定选用五个优先序级，即，$p_1>p_2>p_3>p_4>p_5$。税前利润目标（$b_1$）为$p_1$级；市场需求及其他特殊要求目标（$b_4\sim b_9$）为$p_2$级，其中$b_8$的优先权$W_8^+=3$，$b_9$的优先权$W_9^+=2$；固定资产总占用目标（$b_{11}$）为$p_3$级；流动资金总占用目标（$b_{12}$）为$p_3$级；人力总耗量（$b_3$）为$p_4$级；创外汇（$b_{13}$）为$p_5$级。

3）确定目标函数

$\min F(y)=p_1y_1^-+p_2(y_4^-+y_5^-+y_6^-+y_7^-+3y_8^++2y_9^+)+p_3(y_{11}^++y_{12}^+)+p_4y_3+p_5y_{13}^-$。

4）建立各目标约束方程（确定$a_{ij}$和$b_i$）

$a_{1j}$表示单位第$j$种产品所创的税前利润值。

$a_{2j}$表示单位第$j$种产品所消耗的材料数。

$a_{3j}$表示单位第$j$种产品所消耗的人力数。

$a_{11j}$表示单位第$j$种产品所占用的固定资产数。

$a_{12j}$表示单位第$j$种产品所占用的流动资金额。

$b_1\sim b_{14}$表示某年度该企业的十五个目标。

通过预测得企业将在各个年度中$a_{ij}$的数值并结合企业经营意图确定了$b_i$的数值。得到如下关系式：

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5+a_{16}x_6+a_{17}x_7-y_1^++y_1^-=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4+a_{25}x_5+a_{26}x_6+a_{27}x_7-y_2^++y_2^-=b_2\\
&a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4+a_{35}x_5+a_{36}x_6+a_{37}x_7-y_3^++y_3^-=b_3\\
&x_1-x_5-y_4^++y_4^-=b_4\\
&x_2-y_5^++y_5^-=b_5\\
&x_3-x_5-y_6^++y_6^-=b_6\\
&x_4-y_7^++y_7^-=b_7\\
&x_5-y_8^++y_8^-=b_8\\
&x_6-y_9^++y_9^-=b_9\\
&x_7-y_{10}^++y_{10}^-=b_{10}\\
&a_{111}x_1+a_{112}x_2+a_{113}x_3+a_{114}x_4+a_{115}x_5+a_{116}x_6+a_{117}x_7-y_{11}^++y_{11}^-=b_{11}\\
&a_{121}x_1+a_{122}x_2+a_{123}x_3+a_{124}x_4+a_{125}x_5+a_{126}x_6+a_{127}x_7-y_{12}^++y_{12}^-=b_{12}\\
&a_{135}x_5-y_{13}^++y_{13}^-=b_{13}\\
&y_4^-+y_{14}^-=b_{14}\\
&y_6^-+y_{15}^-=b_{15}
\end{aligned}
$$

下面以第三年度对企业的预测和决策确定的各数值说明模型的运行情况。

第三年度目标规划：

目标函数：$\min F(y)=p_1y_1^-+p_2(y_4^-+y_5^-+y_6^-+y_7^-+3y_8^++2y_9^+)+p_3(y_{11}^++y_{12}^+)+p_4y_3^++p_5y_{13}^-$。

满足于：

$$
\begin{aligned}
&-0.400x_1-0.116x_2-0.491x_3-0.195x_4+14.772x_5+1.773x_6+1.207x_7-y_1^++y_1^-=13000\\
&2.845x_1+0.441x_2+2.809x_3+0.742x_4+31.76x_5+0.415x_6+0.324x_7-y_2^++y_2^-=28000\\
&1.354x_1+0.21x_2+1.243x_3+0.328x_4+5.695x_5+4.307x_6+0.433x_7-y_3^++y_3^-=8510\\
&x_1-x_5-y_4^++y_4^-=700\\
&x_2-y_5^++y_5^-=320\\
&x_3-x_5-y_6^++y_6^-=70\\
&x_4-y_7^++y_7^-=620\\
&x_5-y_8^++y_8^-=800\\
&x_6-y_9^++y_9^-=176\\
&x_7+y_{10}^-=503\\
&1.396x_1+0.294x_2+3.074x_3+0.132x_4+16.335x_5-y_{11}^++y_{11}^-=2000\\
&2.734x_1+0.342x_2+2.7x_3+0.686x_4+30.779x_5+2.356x_6+0.527x_7-y_{12}^++y_{12}^-=30500\\
&9.175x_5\qquad y_4^-+y_{14}^-=10\\
&y_6^-+y_{15}^-=5
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, \cdots, x_7\geqslant 0$, $y_i^+$, $y_i^-\geqslant 0$, $i=1, 2, \cdots, 15$

计算结果：

$x_1=1614.6$，$x_2=320$，$x_3=984.6$，$x_4=620$，$x_5=914.6$，$x_6=176$，$x_7=503$

$y_1^+=9254.4$，$y_2^+=1355.4$，$y_3^+=114.6$，$y_{11}^+=3912.3$，

$y_{12}^+=5967.6$，$y_{13}^+=391.8$，$y_{14}^-=10$，$y_{15}^-=5$

其他目标偏差变量为0。

根据以上计算结果得知，耗用材料、耗用人力、专用设备总机产量、占用固定资产、占用流动资金及创外汇额均超出了原目标。

对于各种资源的超出应找出解决的途径，如增加人力、物力，扩大资金来源，加强销售环节等，或通过技术改造等措施降低相应的$a_{ij}$的数值，以保证达到各项目标。当通过采取相应措施后解决了超过原定目标的问题，则此方案为一可行方案。若通过分析研究尚无解决超出目标的方法，则须调整相应的目标，构成新的目标规划并重新求解，重复前述过程。

3.综合评价

1）财务评价

通过运算得出五项经济指标的结果，见表7-3-1。由表7-3-1看出，资金筹措方式采用全部投资（总投资）比采用部分投资（自有资本）、部分贷款、部分租赁方式的经济效应低。

中、外合营企业的经济效益　　表 7-3-1

| 资金筹措方式 | T(年) | Z(年) | NPV(千元) | NPVR | IRR |
|---|---|---|---|---|---|
| 总投资 | 5.97 | 7.32 | 56240 | 0.38 | 30.04% |
| 自有资本 | 4.80 | 5.90 | 59834 | 1.25 | 41.24% |

表7-3-1给出了合营企业的经济效益。表7-3-2列出中国××和×国×××各自的经济效益。

中、外合营双方各自的经济效益　　　　表 7-3-2

| 投 资 者 | T(年) | Z(年) | NPV(千元) | NPVR | IRR |
|---|---|---|---|---|---|
| 中国×× | 6.53 | 8.15 | 14723.3 | 0.76 | 20.88% |
| 外国××× | 5.28 | 6.30 | 13559.2 | 2.17 | 32.97% |

按照中外利润分成模式分别计算中国××和×国×××的现金流入。中国××的现金流入为分红、厂房及设备租赁利息总和。×国×××的现金流入为分红、技术转让费和租赁利息。

按照资金筹措计划分别计算中外的现金流出。中方的现金流出为分年投资和分年度租赁厂房和设备。外方的现金流出为分年投资、分年租赁设备及技术转让中不能收回费用。

2 ）灵敏度分析

按照本项目经营期内产量下降10%或销售价下降10%后，中、外合营企业及各方经济效益如何按前述步骤计算，结果见表7-3-3，表7-3-4。

产品销售价降低10%中、外双方各自经济效益　　　　表 7-3-3

| 投 资 者 | T(年) | Z(年) | NPV(千元) | NPVR | IRR |
|---|---|---|---|---|---|
| 中国×× | 7.51 | 9.77 | 1005.8 | 0.06 | 12.79% |
| 外国××× | 6.05 | 7.32 | 6903.5 | 1.11 | 24.85% |

产品销售价降低10%中、外双方合营企业的经济效益　　　　表 7-3-4

| 资金筹措 | T(年) | Z(年) | NPV(千元) | NPVR | IRR |
|---|---|---|---|---|---|
| 总 投 资 | 9.01 | 9.66 | 10710.5 | 0.075 | 15.46% |
| 自有资本 | 9.01 | 9.43 | 14304.2 | 0.338 | 18.64% |

注：产品下降10%的计算雷同，故从略。

3 ）国民经济效益评价

采用与财务评价相同的方法进行国民经济效益分析，结果见表7-3-5。

中、外双方合营企业对我国国民经济的效益　　　　表 7-3-5

| T(年) | Z(年) | NPV(千元) | IRR |
|---|---|---|---|
| 8.02 | 9.54 | 4252 | 14.35% |

4 ）对中国××-×国×××谈判结果的看法

各种计算中各参数均采用真实数据，通过模型的运行确定了谈判的方案，并对此进行了综合评价。在此基础上可以提出如下几个观点：

（ 1 ）中国××-外国×××合营企业应以生产专用设备总机为主的生产方向，

（2）从财务分析看出中国××的经济效益不错，因此本项目经济上可行。其中外方的$IRR$达30%以上，中方为20%，似乎中外利润分成外方偏高。

（3）从灵敏度分析看出合营双方在承担经营风险上不平等。如，当销售价降低10%时，中方的$IRR$由原来的20.88%降为12.79%，下降的比率为38.7%；而外方的$IRR$由原来的32.97%降为24.85%，下降的比率为24.6%。况且在销售价降低10%时，中方的经济效益已经很低了（一般认为利率12%以下，投资的意义就不大了），然而外方仍以24.85%的高利率盈利，这显然不平等，因此有必要进行调整。可按照图7-3-1再进行。

（4）国民经济收入较低，$IRR$仅为14.35%。

通过上述分析使我们对提出的方案在技术经济方面有较全面的认识，找出应进一步调整的因素，通过调整后重新运算，得出新的可行方案，获得一系列的谈判方案。

### 六、结　论

（1）选用目标规划模型解决中外合资经营企业谈判这样一个多目标问题是合适的，而且在谈判中能表现出较大的灵活性，能充分地反映决策者的意图。

（2）本谈判模型用系统分析的方法可为谈判决策者提供多个可行方案，并能将谈判中获得的信息及时反馈，不断为决策者提供新方案。

（3）调整哪些因素更有效，如何用对策观点加强谈判中的针对性需进一步研究。

## §7-4　一台设备$n$个工件多目标排序的模糊产生式系统[122]

1986年，陈大海、潘裕焕、薛劲松首次描述了一种求解单台设备$n$个工件多目标排序的模糊产生式系统。这种系统是根据人工智能的产生式搜索原理，将各种单一目标最优或近似最优排序的启发式算法作为产生式规则，利用最小模糊算子作为测试条件而构成的。它不仅能得到多目标排序的折衷解，在许多情况下还可改善单一目标启发式算法解的精度。

### 一、排序的特性

排序问题是组合优化理论中应用很广的课题。人们在所有离散工件加工、机器维修、计算机动态文件分配的调度和计划管理中，都会遇到各种不同类型的排序问题。据统计，目前已提出近94种排序模型。其中，最有代表性的就是一台设备$n$个工件的情况。

由于绝大多数排序问题属于所谓非多项式NP（Non-Polynomial）问题，因此，尽管多年来世界上许多科学工作者为了得到它们的多项式算法，曾付出过巨大努力，却收效甚微。

如，仅20个工件在一台设备上的全部加工顺序就有2,430,902,008,176,640,000个。若计算机每秒能产生并比较其中的100万个方案，为了从中找到满足某一指标函数的最优或近似最优排序，也需要77，147年的时间。因此，七十年代后国内外一系列重要工作均是以启发式方法为基础，寻求各种单一指标下的近似算法的。

然而，在实际的生产调度和计划管理中，绝大多数情况需要综合考虑一个作业排序的许多性能指标，如延误交工时间最短，延期交工零件最少，零件平均加工时间最短等。即

需要求解多目标函数的最优或近似最优加工顺序。这将极大增加问题求解难度。目前仍未解决。

我们根据人工智能的产生式搜索原理，将各种求解单一目标最优或近似最优排序的启发式算法作为产生式规则，利用具有非线性隶属函数的最小模糊算子为测试条件，从而构成一种求解一台设备$n$个工件的多目标排序的模糊产生式系统。它在搜索同时满足多个目标函数的排序时，将根据条件测试结果，选择相应的启发式规划，对记录搜索状态的数据库进行操作，使搜索能沿着那些被认为是最有希望的区段扩展。

我们应用实例，在HP-1000小型机上求解两个指标函数的排序问题，均获得令人满意的结果。同时，计算量并无显著增加，可在小型机上求解大规模问题（例如$n=50$）。

## 二、一台设备$n$个工件的多目标排序问题

设有$n$个工件$J_1$，$J_2$，…，$J_n$在一台设备上加工。其各自的加工时间为$P_1$，$P_2$，…，$P_n$；应该交工日期为$d_1$，$d_2$，…，$d_n$。

我们以数字1，2，…，$n$的排列$\overline{\omega}=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$表示某一加工次序；用$f_i(\overline{\omega})$表示排列$\overline{\omega}$下第$i$个性能指标的值，$i\in I=\{1, 2, \cdots, r\}$。于是，问题归结为寻求某一排列$\overline{\omega}$，使广义综合集结函数$F(\overline{\omega})=U(f_1(\overline{\omega}), f_2(\overline{\omega}), \cdots, f_r(\overline{\omega}))$达到最小，即

$$\min_{\overline{\omega}\in\Omega}\{F(\overline{\omega})=U(f_1(\overline{\omega}), f_2(\overline{\omega}), \cdots, f_r(\overline{\omega}))\} \qquad (7\text{-}4\text{-}1)$$

这里，$\Omega$是$J=\{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$的全排列集合，共有$n!$个元；$F(\overline{\omega})$称为目标函数，使$F(\overline{\omega})$达到最小的排列$\overline{\omega}^*$称为最优排列。

## 三、产生式系统的启发规则

人们在生产实践中，已总结出一台设备排序问题的上百条性能指标和相应的启发式算法。我们提出的模糊产生式系统将这些启发式算法当作搜索规则，用来求解多目标作业排序，用这种方式组织起来的产生式系统，每条规则都相对独立，便于扩充。可根据实际需要随时进行补充和修正。

现介绍三种作为搜索规则的单一目标下的启发式算法。

规则1：使工件延期交工时间最短的启发式算法。

若仅考虑一个目标函数$f_1(\overline{\omega})$为工件总的延误交工时间，于是，问题就变成如何将$J_1$，$J_2$，…，$J_n$安排一个加工顺序，使总延误时间最短。

令$L_i$表示工件$J_i$在任何顺序下的延误时间，$C_i$为在该顺序下$J_i$的完工时间。若$d_i\geqslant C_i$，显然$J_i$的延误时间$L_i=0$；若$d_i<C_i$，则$L_i=C_i-d_i$，所以，

$$L_i=\max(0, C_i-d_i)=\max\{C_i, d_i\}-d_i, \quad i=1, \cdots, n \qquad (7\text{-}4\text{-}2)$$

因此，上述问题可表述为

$$\min_{\overline{\omega}\in\Omega} f_1(\overline{\omega})=\min_{\overline{\omega}\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}L_{\overline{\omega}_i}=\min_{\overline{\omega}\in\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\max\{C_{\overline{\omega}_i}, d_{\overline{\omega}_i}\}-\sum_{i=1}^{n}d_{\overline{\omega}_i}\right) \qquad (7\text{-}4\text{-}3)$$

求解（7-4-3）式的启发式算法如下：

步骤1：开始时令$W=0$，取使$n$个数

$$\max\{p_i,\ d_i\} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{7-4-4}$$

中达到最小的工件排在第一位，记为$J_{\omega_1}$。

步骤2：假设$(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots\omega_k)$已取定，令$W=p_{\omega_1}+p_{\omega_2}+\cdots+p_{\omega_k}$，并取使$n-k$个数

$$\max\{W+p_i,\ d_i\} \quad 1\leqslant i\leqslant n,\ i\neq\omega_1,\ \cdots,\ \omega_k \tag{7-4-5}$$

中达到最小的工件排在$k+1$位，记为$J_{\omega_{k+1}}$。

步骤3：令$k+1\rightarrow K$，返回步骤2，直到$k=n$为止。

规则2：使延期交工零件个数最少的启发式算法。

若仅考虑目标函数$f_2(\overline{\omega})$为延期交工零件个数，应如何将$J_1$，$J_2$，…，$J_n$安排一个加工顺序，使总的延期交工的零件个数最少。

同样令$C_i$为$J_i$在任一顺序下的完工时间，$C_i=\sum_{k=1}^{i}p_k$。定义：

$$D_i=\begin{cases}1 & C_i-d_i>0\\ 0 & C_i-d_i\leqslant 0\end{cases} \tag{7-4-6}$$

我们的目的是寻找某一$\overline{\omega}$，使$f_2(\overline{\omega})$最小。

$$\min_{\overline{\omega}\in\Omega} f_2(\overline{\omega})=\min_{\overline{\omega}\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}D_i^{\overline{\omega}} \tag{7-4-7}$$

其中$D_i^{\overline{\omega}}$为在$\overline{\omega}$下的$D_i$值。求解(7-4-7)式的启发式算法为：

步骤1：将$J_1$，$J_2$，…，$J_n$按其应交工期$d_1$，$d_2$，…，$d_n$从小到大排列，即

$$d_1^{\omega'}\leqslant d_2^{\omega'}\leqslant\cdots\leqslant d_n^{\omega'} \tag{7-4-8}$$

$\omega'$称为初始排列。

步骤2：从$\omega'$中找到第一个须延期交工的零件，记为$J_l^{\omega'}$。若无这种零件，$\omega'$就是最优排列。

步骤3：从$J_1^{\omega'}$，$J_2^{\omega'}$，…，$J_l^{\omega'}$中除去加工时间最长的零件$J_k^{\omega'}$，即$p_k^{\omega'}=\max_i p_i^{\omega'}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$，然后，对$J_1^{\omega'}$，$J_2^{\omega'}$，…，$J_{k-1}^{\omega'}$，…，$J_n^{\omega'}$这$n-1$个零件继续施行步骤2。如此循环，每次循环就除去一个延期交工的零件，直到余下的零件中再没有需延期交工的零件为止。

规则3：使停工损失最小的启发式算法。

若工件$J_i$在等待加工期间每单位时间产生的停工损失为$m_i$，试将$J_1$，$J_2$，…，$J_n$安排一加工顺序，使总停工损失$f_3(\overline{\omega})$最小。

同样令$J_1^{\omega}$,$J_2^{\omega}$,…,$J_n^{\omega}$是工件的任一排列。若按此排列加工，工件$J_j^{\omega}$被加工完毕的时间$C_j^{\omega}=p_1^{\omega}+p_2^{\omega}+\cdots+p_j^{\omega}$。故产生的损失$m_jC_j^{\omega}=m_j(p_1^{\omega}+p_2^{\omega}+\cdots+p_j^{\omega})$。为此，我们需求解

$$\min_{\overline{\omega}\in\Omega} f_3(\overline{\omega})=\min_{\overline{\omega}\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}m_jc_j^{\overline{\omega}}=\min_{\overline{\omega}\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}m_j\sum_{k=1}^{j}p_k^{\overline{\omega}} \tag{7-4-9}$$

其启发式算法为选择一排列，使得

$$p_1^{\bar{\omega}} / m_1^{\bar{\omega}} \leqslant p_2^{\bar{\omega}} / m_2^{\bar{\omega}} \leqslant \cdots \leqslant p_n^{\bar{\omega}} / m_n^{\bar{\omega}} \quad (7\text{-}4\text{-}10)$$

## 四、产生式系统的模糊测试条件

以上分别论述了三种求解单一目标下加工顺序的启发规则。但在实际应用中，真正有意义的是得到同时满足上述多个目标的最优或近似最优解。在离散多目标问题中，很难求得严格最优解。因此，一般都是求出接近最优的有效解或非劣解，并从中找出一个选好解。然而，直接求出非劣解集将引起计算量的“指数爆炸”。

我们利用H.Leberling提出的最小模糊算子为测试条件，产生式系统将根据条件测试结果给出启发信息，选择相应的操作规则，使搜索沿着那些被认为最有希望的区段扩展。为了计算有希望的节点，采用了双曲正切隶属函数作为估价函数

1.最小模糊算子

前面描述的多目标排序问题

$$\min_{\bar{\omega} \in \Omega}\{F(\bar{\omega}) = U(f_1(\bar{\omega}),\ f_2(\bar{\omega}),\ \cdots,\ f_r(\bar{\omega}))\} \quad (7\text{-}4\text{-}11)$$

若将其所有目标函数以其相应的隶属函数表征：

如

目标函数——→隶属度函数

| | |
|---|---|
| $f_1(\bar{\omega})$ | $\mu_{f_1}(\bar{\omega})$ |
| ⋮ | ⋮ |
| $f_r(\bar{\omega})$ | $\mu_{f_r}(\bar{\omega})$ |

则我们的任务就是要通过它们相应的隶属度函数找出同时满足所有目标函数的解。广义综合集结函数

$$\mu_D(\bar{\omega}) = \mu_D(\mu_{f_1}(\bar{\omega}),\ \mu_{f_2}(\bar{\omega}),\ \cdots,\ \mu_{f_r}(\bar{\omega})) \quad (7\text{-}4\text{-}12)$$

(7-4-11)式变为

$$\max_{\bar{\omega} \in \Omega}\{\mu_D(\bar{\omega}) = \mu_D(\mu_{f_1}(\bar{\omega}),\ \mu_{f_2}(\bar{\omega}),\cdots,\ \mu_{f_r}(\bar{\omega}))\} \quad (7\text{-}4\text{-}13)$$

定义 $\bar{\omega}^* \in \Omega$是(7-4-13)式的最优解，当且仅当

$$\bigwedge_{\bar{\omega} \in \Omega} \mu_D(\bar{\omega}) \leqslant \mu_D(\bar{\omega}^*) \quad (7\text{-}4\text{-}14)$$

为了确定广义综合集结函数$\mu_D(\bar{\omega})$，引入Zadeh的最小模糊算子：

$$\bigwedge_{\bar{\omega} \in \Omega} \mu_D(\bar{\omega}) := \min_j(\mu_{f_j}(\bar{\omega})) = \min(\mu_{f_1}(\bar{\omega}),\ \cdots,\ \mu_{f_r}(\bar{\omega})) \quad (7\text{-}4\text{-}15)$$

于是，得到极大极小问题

$$\max_{\bar{\omega}} \min_j(\mu_{f_j}(\bar{\omega})) \quad \bar{\omega} \in \Omega,\ j = 1,\ \cdots,\ r \quad (7\text{-}4\text{-}16)$$

并假设：

（1）对每个目标$f_1$，…$f_j$，…，$f_r$均存在一个唯一确定的最优解$\overline{\omega}_1^0$,…,$\overline{\omega}_j^0$，…，$\overline{\omega}_r^0$，即

$$\bigwedge_{\overline{\omega}\in\Omega} f_1(\overline{\omega})\geqslant f_1(\overline{\omega}_1^0):=f_1^0,\ \cdots,\ f_j(\overline{\omega})\geqslant f_j(\overline{\omega}_j^0):$$

$$=f_j^0,\cdots,f_r(\overline{\omega})\geqslant f_r(\overline{\omega}_r^0):=f_r^0 \qquad (7\text{-}4\text{-}17)$$

（2）对于各目标函数的最优解以下关系成立

$$\overline{\omega}_j^0\neq\overline{\omega}_i^0 \quad i\neq j,\ i,\ j=1,\ \cdots,\ r$$

2.目标函数的隶属度函数

我们采用了双曲正切函数作为目标函数的隶属度函数，以便对搜索过程中出现的各个节点给出综合估价。对第$j$个目标函数$f_j(\overline{\omega})$（$j=1$，…，$r$）对应的双曲正切隶属度函数定义如下：

$$\begin{cases}\mu_{f_j}(\overline{\omega})=\dfrac{1}{2}\tanh(Y)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{Y}-e^{-Y}}{e^{Y}+e^{-Y}}+\dfrac{1}{2}\\ Y=\dfrac{1}{2}[(f_j^m+f_j^0)-f_j(\overline{\omega})]\cdot\alpha_j\end{cases} \qquad (7\text{-}4\text{-}18)$$

其中：$f_j^m=\max\{f_j(\overline{\omega}_1^0)\cdots,f_j(\overline{\omega}_{j-1}^0),\ \cdots,\ f_j(\overline{\omega}_r^0)\}$；$\alpha_j$是一参量。

3.参数矢量$\tilde{\alpha}$的确定

参数$\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)^T$是人为给定的一组矢量。在非确定性环境中，它们可根据人们对各目标函数的重视程度或根据益损期望值具体确定。如果已知各性能指标的效用值，它们就是一组加权系数。

在未知目标函数的益损期望值和效用值时，可按优化潜力进行加权处理，即

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r=1\\ \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}=\dfrac{f_2^m-f_2^0}{f_1^m-f_1^0}\\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots\\ \dfrac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r}=\dfrac{f_r^m-f_r^0}{f_{r-1}^m-f_{r-1}^0}\end{cases} \qquad (7\text{-}4\text{-}19)$$

计算实例中，就是采用这一处理方法。

## 五、启发式搜索策略

提出的产生式系统采用启发式搜索策略

（1）利用前述的单目标启发式算法$R_1$，$R$，…，$R_r$；分别求出各指标函数的最优解或近似最优解：$\overline{\omega}_1^0$，$\overline{\omega}_2^0$，…，$\overline{\omega}_r^0$，及其性能指标：$f_1^0,f_2^0,\cdots f_r^0$。并根据(7-4-17)，(7-4-19)式计算$f_j^m$及$\alpha_j$，$j\in I=\{1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$。

（2）将工件$J_1$，…，$J_n$按其应交工期$d_1\cdots$，$d_n$从小到大排列，得到初始顺序$\overline{\omega}^1$，放入记忆搜索状态的数据库中，记为$DB_{\overline{\omega}}^1$。

（3）为了确定最优或近似最优排序$\overline{\omega}^*$中的第$i$个工件，对记忆排列$\overline{\omega}^{i-1}$的数据库

状态$DB_{\bar{\omega}}^{i-1}$，分别应用$R_1$，…，$R_r$，得到$r$个排列$\bar{\omega}_1^i$，$\bar{\omega}_2^i$，…，$\bar{\omega}_r^i$。

（4）分别计算$f_1(\bar{\omega}_1^i)$，$f_2(\bar{\omega}_2^i)$，…，$f_r(\bar{\omega}_r^i)$及$\mu_{f_1}(\bar{\omega}_1^i)$，$\mu_{f_2}(\bar{\omega}_2^i)$，…，$\mu_{f_r}(\bar{\omega}_r^i)$。

（5）求出满足（7-4-16）式的$\bar{\omega}_j^i(j=1,\cdots,r)$并放入数据库，记为$DB_{\bar{\omega}}^i$。这时，数据库$DB_{\bar{\omega}}^i$将把$\bar{\omega}_j^i$的第$i$个工件作为最优或近似最优排列$\bar{\omega}^*$中的第$i$个工件确定下来。这相当于根据条件测试（满足式（7-4-16)，选择适当的规则（$R_j$）进行操作（图7-4-1）。

（6）令$i \leftarrow i+1$，返回3，直至$i=n$为止。数据库$DB_{\bar{\omega}}^n$中记录的即为满足多目标函数的最优或近似最优排列$\bar{\omega}^*$

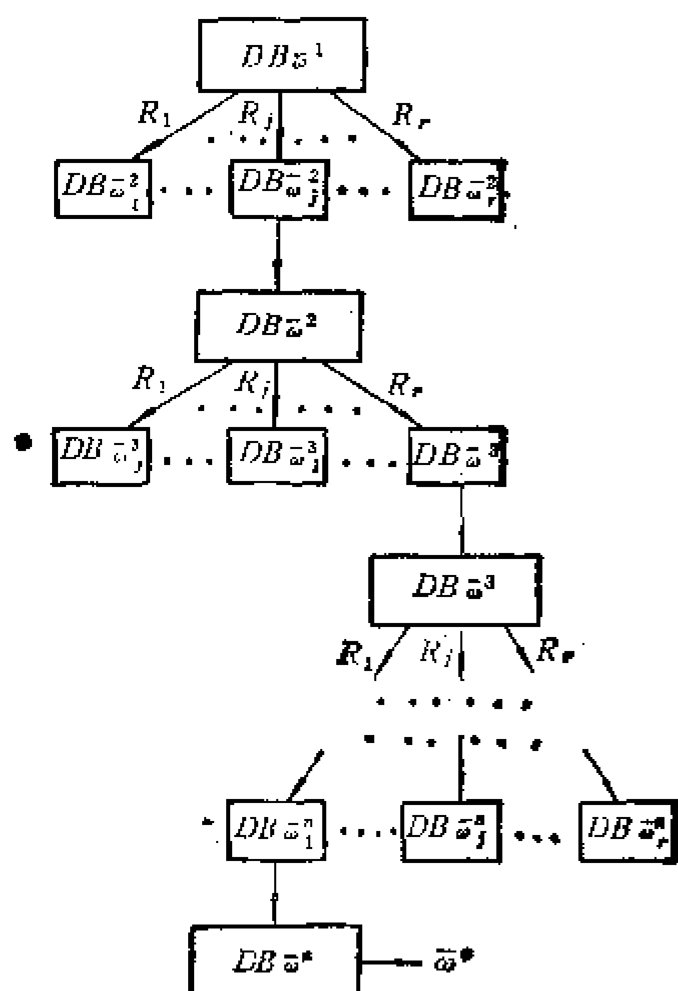



图 7-4-1 模糊产生式系统的搜索策略

## 六、应 用 举 例

应用实例在HP-1000小型机上求解两个目标函数[$f_1(\bar{\omega})$——最小延误时间；$f_2(\bar{\omega})$——最少延期工件]的排序问题。结果表明，模糊产生式系统不仅能得到同时满足两个性能指标的折衷解，而且许多情况下还可以改善单目标排序解的精度。

例 1 工件$J_i$（$1 \leqslant i \leqslant 8$）的加工时间及应交工期$d_i$如表7-4-1所示。

单目标启发式算法的解分别是：

$\bar{\omega}_{(1)}=(J_3J_5J_6J_7J_2J_1J_4J_8)$； $\bar{\omega}_{(2)}=(J_3J_5J_7J_2J_6J_4J_8J_1)$

模糊产生式系统的解为$\bar{\omega}_{FP}=(J_3J_6J_7J_2J_5J_1J_4J_8)$。

它们各自的性能指标如表7-4-2所示。

加 工 时 间 及 应 交 工 期　　表 7-4-1

| 工　件 | $J_1$ | $J_2$ | $J_3$ | $J_4$ | $J_5$ | $J_6$ | $J_7$ | $J_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 加工时间$p_i$ | 15 | 10 | 8 | 20 | 5 | 14 | 6 | 28 |
| 应交工期$d_i$ | 33 | 30 | 10 | 20 | 13 | 22 | 27 | 35 |

性 能 指 标　　表 7-4-2

| 解的性能指标 | 求解方法 | | |
|---|---|---|---|
| | 最小化延误时间算法 | 最小化延误工件个数算法 | 模糊产生式系统 |
| 总延误时间$f_1(\bar{\omega})$ | 178 | 221 | 175 |
| 延期工件个数$f_2(\bar{\omega})$ | 6 | 4 | 4 |

**例 2** 工件$J_i$（ $1\leqslant i\leqslant 8$ ）的加工时间$p_i$及应交工期$d_i$如表7-4-3所示：

**加 工 时 间 及 应 交 工 期** 表 7-4-3

| 工 件 | $J_1$ | $J_2$ | $J_3$ | $J_4$ | $J_5$ | $J_6$ | $J_7$ | $J_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 加工时间$p_i$ | 1 | 10 | 6 | 3 | 8 | 4 | 6 | 7 |
| 应交工期$d_i$ | 8 | 35 | 9 | 11 | 25 | 6 | 20 | 28 |

单目标启发式算法的解分别是：

$\overline{\omega}_{(1)}=(J_6J_1J_3J_4J_7J_5J_8J_2)$； $\overline{\omega}_{(2)}=(J_6J_1J_4J_7J_8J_2J_3J_5)$

模糊产生式系统的解为$\overline{\omega}_{FP}=(J_6J_1J_4J_3J_7J_8J_5J_2)$

它们各自的性能指标如表7-4-4所示。

**性 能 指 标** 表 7-4-4

| 解的性能指标 | 求解方法 | | |
|---|---|---|---|
| | 最小化延误时间算法 | 最小化延误交工个数算法 | 模糊产生式系统 |
| 总延误时间$f_1(\overline{\omega})$ | 25 | 48 | 25 |
| 延期工件个数$f_2(\overline{\omega})$ | 5 | 2 | 3 |

**例 3** 这是一个50个工件的大型排序问题，其可行解共有50! 个。直接求出满足多目标折衷解是不可能的。而利用模糊产生式系统达到了这个目的。现给出所得到的解的性能指标，如表7-4-5。

**性 能 指 标** 表 7-4-5

| 解的性能指标 | 求解方法 | | |
|---|---|---|---|
| | 最小化延误时间算法 | 最小化延期交工工件个数算法 | 模糊产生式系统 |
| 总延误时间$f_1(\overline{\omega})$ | 8230 | 17143 | 9333 |
| 延期工件个数$f_2(\overline{\omega})$ | 46 | 42 | 44 |

从表7-4-5看出，模糊产生式系统得到的解（9333，44）是同时满足$f_1(\overline{\omega})$和$f_2(\overline{\omega})$的折衷解。

## 七、结 语

由于单一指标的启发式算法均为多项式算法，即

$$f_H(D_i,\ n)=p_i(n) \qquad (7\text{-}4\text{-}20)$$

其中$f_H(D_i,\ n)$是启发式算法求解$D_i$问题所需的运算次数；$D_i$为单目标排序问题（$i=1,\ \cdots,\ r$）；$n$是工件个数；$p_i(\cdot)$是任意多项式。

设模糊产生式系统求解多目标排序问题$D'$的运算次数为$f_{FP}(D',\ r,\ n)$，则

$$f_{FP}(D',\ r,\ n)=\sum^{r}p_i(n)+\sum^{r-1}[p_i(n-1)+p_i(n-2)+\cdots+p_i(2)] \quad (7\text{-}4\text{-}21)$$

其中$r$表示目标函数的个数。显然，

$$f_{FP}(D',\ r,\ n)\leqslant 2\times(\sum^{r}p_i(n))+r\times c \quad (7\text{-}4\text{-}22)$$

仍为多项式。其中$c$为常数。

从（7-4-21）、（7-4-22）式可见，产生式系统仍为好算法。如在HP-1000小型机上求解例3中50个工件的多目标排序，$CPU$时间为5分23秒。

本文提出的模糊产生式系统是人工智能原理在多目标排序问题中的初步尝试，它对解决离散工件加工的调度、计划管理、机器维修，计算机文件分配等实际问题，都有较大的应用价值。

## §7-5 全面质量管理中的模糊因果分析[125]

1986年，吴卫国根据模糊数学理论并结合质量分析的特点，提出一种分析影响产品质量因素主次的Fuzzy数学模型，并应用于毛纺行业，取得满意效果。

TQC中的四大支柱之一是PDCA管理循环，在这个循环中$P$即寻找质量问题，分析原因主次，制订实施步骤是TQC成败的关键。然而，如何能科学地完成这关键的一步呢？尽管依靠QC小组提供的信息所绘制的石川图能一目了然地反映出产品质量的因果关系，但据此寻找占优势的原因往往需要花费较长的时间，并且这种寻找目前仍处于定性阶段。存在上述现象的主要原因是：由于生产系统的复杂性所带来的因果关系的模糊性。我们试图借助Fuzzy数学的方法定量地处理这种因果模糊关系，以求得PDCA管理循环中关键步的一种科学算法。

### 一、数学模型及分析

任何产品的某个质量指标的反常，总能依靠专业知识科学地用一组基本质量反常来表述。例如，纺织行业的纱条粗细不均率质量指标，其反常可由下列一组基本反常组成：（短片段不匀，中片段不匀，长片段不匀，非周期性不匀）。

用$q_i$表示基本反常，$Q$表示基本反集合，则

$$Q=\{q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n\} \quad (7\text{-}5\text{-}1)$$

也称（7-5-1）式为质量指标的反常空间。

对于实际生产中的一个质量反常$\underset{\sim}{A}$一般并非是一个基本反常，往往不同程度地包含着几个或更多的基本反常。因此，$\underset{\sim}{A}$是反常空间中的一个模糊子集。记

$$\underset{\sim}{A}=\{a_1,\ a_2,\cdots,a_n\} \quad (7\text{-}5\text{-}2)$$

并称$a=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$为$\underset{\sim}{A}$的模糊向量，其中$a_i\in[0,1]$ $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，$a_i$的意义为$\underset{\sim}{A}$包含$q_i$的程度。特别，当，

$$\underset{\sim}{A}=\begin{Bmatrix}1,2,\cdots,i-1,i,i+1,\cdots,&n\\0,0,\cdots,\ 0&1,0,\ \cdots,\ 0\end{Bmatrix}$$

则$\underset{\sim}{A}=q_i$，$\underset{\sim}{A}$蜕化为一个基本反常。对于$\underset{\sim}{A}$包含$q_i$的程度，即$a_i$的取值一般专业技术人员或有经验的工人就能给出较理想的数值。

另外，影响某一质量指标的诸因素可用4M1E（即man，machine，material，method，environment）法则决定一级因素集。然后通过QC小组分析二级，三级因素集等，它们分别表示为：

$$\left.\begin{array}{l}V^{(1)}=\left\{\begin{matrix}人 & 机 & 料 & 法 & 环\\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{matrix}\right\}\\ V^{(2)}=\{v_{j1},\ v_{j2},\ \cdots,\ \}j=1,2,\cdots,5\\ V^{(3)}=\{v_{jk_1},v_{jk_2},\ \cdots\}j=1,2,\cdots,5,k=1,2,\cdots\end{array}\right\} \quad (7\text{-}5\text{-}3)$$

上述各级因素可用石川图明确表示出来（见图7-5-1）。现着手建立一级模型。质量指标中的各个基本反常往往是众多因素决定的，这些因素中有主次因素。因此，反常空间中的任一元与因素集的各个元存在一定的关系，仅其程度不同。由于生产系统的复杂性，这种关系往往是模糊的，将这种模糊关系记为：

$$\underset{\sim}{R}^{(1)}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & r_{n4} & r_{n5}\end{bmatrix} \quad (7\text{-}5\text{-}4)$$

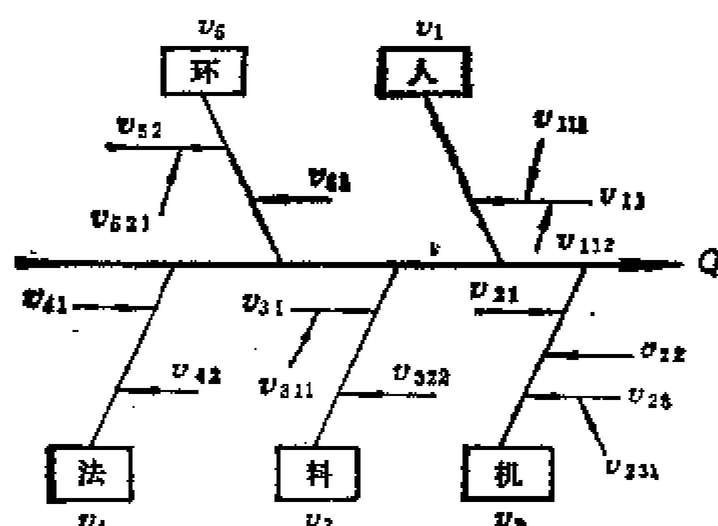



图 7-5-1 石川图

矩阵中$r_{ij}(i=1,2,\ \cdots,\ n,j=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$表示基本反常$q_i$与因素元$V_i$的关系程度，$r_{ij}\in[0,1]$，$\sum\limits_{i=1}^{n}r_{ij}=1$，$r_{ij}=1$，表示$q_i$与$V_i$完全相关，$r_{ij}=0$表示$q_i$与$V_i$不相关。

我们进行因果分析的目的是寻找实际的质量反常$\underset{\sim}{A}$的影响因素及其主次。其数学提法为：给定$\underset{\sim}{R}$、$\underset{\sim}{A}$寻$\underset{\sim}{A}$与$V$的关系。记为

$$\underset{\sim}{b}_A^{(1)}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_5)$$

其中$b_j$表示因素$V_i$影响质量反常$\underset{\sim}{A}$的程度。由模糊变换理论可知：

$$\underset{\sim}{b}_A^{(1)}=a\circ\underset{\sim}{R}^{(1)}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\circ\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & r_{n4} & r_{n5}\end{bmatrix}=(b_1,b_2,\cdots,b_5) \quad (7\text{-}5\text{-}5)$$

式中：$b_j=\bigvee\limits_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij})$。

（7-5-5）式为Fuzzy分析的一级数学模型，简记为$P_1$，比较$\underset{\sim}{b}_A^{(1)}$中各元的大小，便得到$P_1$主次准则：

若$b_j=\max\{b_1b_2\cdots b_5\}$，则$V_i$为$\underset{\sim}{A}$的主要因素。

若$\underset{\sim}{b}_A^{(1)}$中各元的大小为$b_2>b_1>b_3>b_5>b_4$，则影响$\underset{\sim}{A}$的各因素主次依次为$v_2,v_1,v_3$，

$v_3$，$v_4$，其中$v_2$影响程度最大，$v_4$最小。

在某些复杂的情况下，即使寻找到一个主要因素$v_i \in V$，但由于还存在许多子因素影响着$v_j$，即$v_j=(v_{j_1}, v_{j_2}, \cdots, v_{j_m})$。因此，必须借助二级模型来分析，以便找到可控因素。其建模步骤：

（1）建立反常空间与二级因素集Fuzzy关系矩阵

$$\underset{\sim}{R}_j^{(2)}=\begin{bmatrix} r_{1j_1}, & r_{2j_2}, & \cdots, & r_{1j_m} \\ r_{2j_1} & r_{2j_2} & \cdots & r_{2j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{nj_1} & r_{nj_2} & \cdots & r_{nj_m} \end{bmatrix}$$

（2）由模糊变换理论得二级数学模型$P_0$为

$$\underset{\sim}{b}_A^{(2)}=a\circ \underset{\sim}{R}_j^{(2)}=(b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_m}) \qquad (7\text{-}5\text{-}6)$$

式中：$b_{j_k}=\bigvee_{i=1}^{n} a_i \wedge r_{ij_k}$表示$\underset{\sim}{A}$与子因素$v_{j_k}$的相关程度。(7-5-6)式称为二级数学模型$P_2$，依靠$p_2$同样可得到$P_3$主次准则。在更复杂的情况下，仿此可建立$P_n$等。

我们仅对$P_1$数学模型作分析，由$b_j=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i \wedge r_{ij})$式可见：

（1）因素$v_i$影响质量反常$\underset{\sim}{A}$的程度$(b_j)$同时取决于$a_i$与$r_{ij}$，并且，若$v_i$影响$\underset{\sim}{A}$的程度很大，则，这个反常$\underset{\sim}{A}$中包含基本反常$q_i$的程度$a_i$应很大，且该基本反常与因素$v_i$的关系程度$r_{ij}$也很大，两者缺一不可，这个结论与我们的实际工作是吻合的；

（2）当且仅当$a_i=r_{ij}=1$时，$b_j=1$。它的意义为：如果实际的质量反常是一个基本反常，而这个基本反常又与因素$v_j$完全相关，那么，实际的质量反常就与因素$v_i$完全相关。可见这是一种最简单的因果分析，即所谓分明因果分析，它是Fuzzy因果分析的一个特例。

## 二、实　例

这里以毛纺行业制条生产中的主要质量指标之一——毛条单位长度重量不匀率作为例子加以分析和应用。

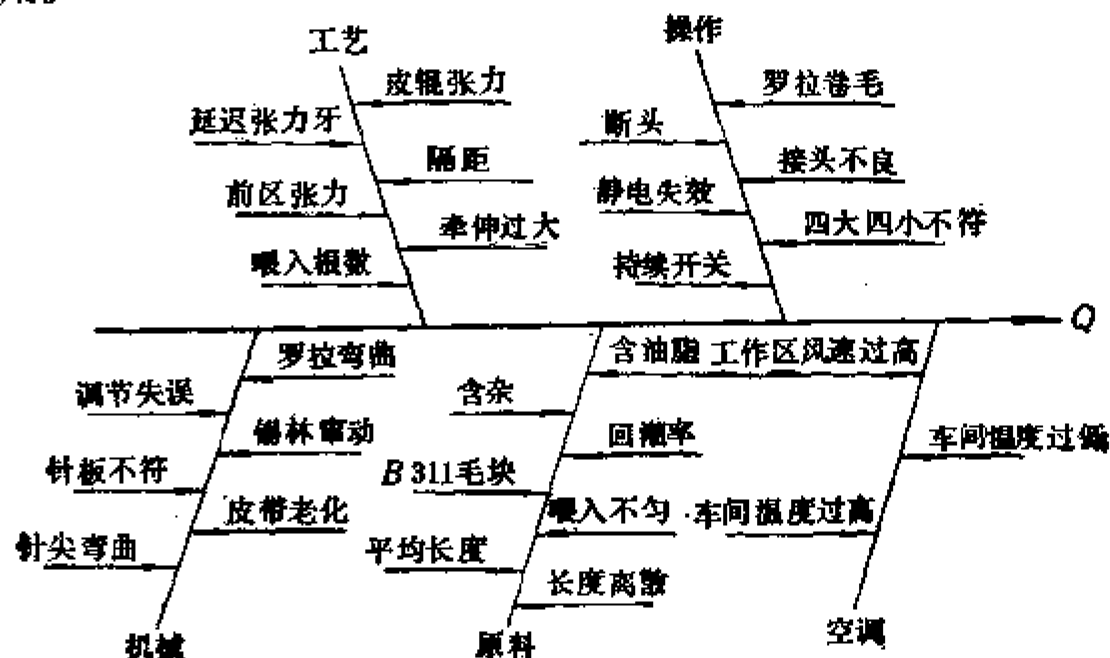



图 7-5-2　重量不匀率因果图

依据毛纺学专业知识及实际工作经验，该指标的基本反常空间为：

$$Q=\begin{Bmatrix}\text{短片段不匀} & \text{中片段不匀} & \text{长片段不匀} & \text{非周期性不匀}\\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4\end{Bmatrix}$$

由4M1E法则得一级因素集为：

$$V^{(1)}=\begin{Bmatrix}\text{机械} & \text{工艺} & \text{操作} & \text{原料} & \text{空调}\\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{Bmatrix}$$

其中$v_1\sim v_5$还包括若干子因素，详见图7-5-2。该图由车间QC小组议定。

与有关工程技术人员、车间QC小组人员一起反复讨论得$Q$与$V$的模糊关系为

$$\underset{\sim}{R}^{(1)}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.07 & 0.03\\ 0.25 & 0.4 & 0.25 & 0.1 & 0\\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0\\ 0.25 & 0.2 & 0.3 & 0.21 & 0.15\end{bmatrix}\begin{matrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{matrix}$$

（列依次对应 $v_1$ $v_2$ $v_3$ $v_4$ $v_5$）

通过QC小组的讨论知，在日常生产中最常见也最麻烦的重量不匀率质量指标反常为：$\underset{\sim}{A}\triangleq$竹节条。并且$\underset{\sim}{A}$不是$Q$中的一个基本反常，它不同程度地包含着$Q$中的各个基本反常。通过讨论得到它的模糊向量为：

$$\underset{\sim}{A}=a=(0.6\ \ 0.2\ \ 0.05\ \ 0.15)$$

现将$\underset{\sim}{R}^{(1)}$及$a$代入一级数学模型$P_i$中得：

$$\underset{\sim}{b}_A^{(1)}=a\circ\underset{\sim}{R}^{(1)}=(0.6\ \ 0.2\ \ 0.05\ \ 0.15)\circ\begin{bmatrix}0.4 & 0.05 & 0.4 & 0.3 & 0.4\\ 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0 & 0\\ 0.05 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0\\ 0.25 & 0.15 & 0.2 & 0.7 & 0.6\end{bmatrix}$$

$$=(0.4\ \ 0.2\ \ 0.4\ \ 0.3\ \ 0.4)$$

由$P_i$上次准则知，引起$\underset{\sim}{A}$的主要因素为机械、操作，空调，而工艺与原材料相对较次要。然而到此为止，我们还不能决定可控因素。因为作为主要因素中的某一个，尚有许多子因素存在，而这些子因素却能直接控制，故我们必须进行二级Fuzzy分析。由图7-5-2可知：

$$v_1=\begin{Bmatrix}\text{罗拉弯曲} & \text{锡林窜动} & \text{皮带老化} & \text{调节失误} & \text{针板不符} & \text{针尖弯曲}\\ v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} & v_{16}\end{Bmatrix}$$

$$v_3=\begin{Bmatrix}\text{罗拉卷毛} & \text{接头不良} & \text{断头} & \text{持续开关} & \text{静电失效} & \text{四大四小不符}\\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{35} & v_{36}\end{Bmatrix}$$

$$v_5=\begin{Bmatrix}\text{湿度过高} & \text{温度过低} & \text{工作区风速过高}\\ v_{51} & v_{52} & v_{53}\end{Bmatrix}$$

并经QC小组分析知$v_1$，$v_3$，$v_5$与$Q$的Fuzzy关系分别为

$$\underset{\sim}{R}_1^{(2)}=\begin{bmatrix}0.8&0.2&0&0&0&0\\0.2&0.1&0.7&0.7&0.8&0.8\\0&0&0.1&0.1&0&0\\0&0.7&0.2&0.2&0.2&0.2\end{bmatrix};\ \underset{\sim}{R}_3^{(2)}=\begin{bmatrix}0.9&0&0&0&0.3&0\\0.1&0&0&0&0&0\\0&0&0.3&0&0&1\\0&1&0.7&1&0.7&0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R}_5^{(2)}=\begin{bmatrix}0.9&0.1&0\\0.1&0.2&0\\0&0&0.7\\0&0.7&0.3\end{bmatrix}。$$

从而由二级数学模型得：

对于机械因素：

$$\underset{\sim}{b}_A^{(2)}=a\circ\underset{\sim}{R}_1^{(2)}=(0.6\ \ 0.2\ \ 0.05\ \ 0.15)\circ\begin{bmatrix}0.8&0.2&0&0&0&0\\0.2&0.1&0.7&0.7&0.8&0.8\\0&0&0.1&0.1&0&0\\0&0.7&0.2&0.2&0.2&0.2\end{bmatrix}$$

$$=(0.6\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.2)$$

可见在机械方面引起$\underset{\sim}{A}$的主要原因是罗拉弯曲。

对于操作因素：$b_A^{(2)}=a\circ\underset{\sim}{R}_3^{(2)}=(0.6\ \ 0.15\ \ 0.15\ \ 0.15\ \ 0.15\ \ 0.05)$可见在操作方面引起$\underset{\sim}{A}$的主要原因是罗拉卷毛。

对于空调因素：$\underset{\sim}{b}_A^{(2)}=a\circ\underset{\sim}{R}_5^{(2)}=(0.6\ \ 0.2\ \ 0.15)$

可见在空调方面引起$\underset{\sim}{A}$的主要原因是湿度过高。

综合上述分析可知常见的质量反常竹节条$\underset{\sim}{A}$的主要可控因素是罗拉弯曲，罗拉卷毛及湿度过高，这一结论与日常生产所总结的经验是一致的。

### 三、结　语

在TQC中进行Fuzzy因果分析应注意以下几点：

（1）质量反常空间是建筑在一定的专业知识和丰富的实践经验基础上的，因此一定要请有经验的专业技术人员反复商定；

（2）寻找常见的质量反常并建立相应的模糊向量，这一步一般通过QC小组分析即可确定。

（3）建立Fuzzy关系矩阵是关键的一步，要同技术人员和有经验的工人集体商定。

按以上三步骤后，实际的对质量反常的因果主次分可由计算机完成，并且可随时报告出质量反常的主要原因。

## §7-6　企业财务决策支持系统及实施[126]

1986年，邹刚、高峰运用投入产出模型探讨企业财务决策支持系统(DSS)，并在首都水泥厂实施，取得了良好效果。

财务管理是利用财务信息反映的经济过程而施行的管理。财务管理的内容包括资金管理、成本管理等。在现代企业中，财务信息对企业的有效管理是必不可少的。企业计划、组织协调和控制生产活动的功能，在很大程度上依赖于财务系统的效率。企业的经济活动，财务信息系统和财务管理系统三者之间的关系可用图7-6-1所示：

在企业活动的上述三个子系统中形成相互联系，相互制约关系。决策效率、管理水平的高低依赖于三个方面：（1）系统Ⅰ的状况；（2）财务信息系统能提供信息的及时可靠性与完备性，（3）财务管理系统的综合信息处理能力。在小生产条件下，子系统Ⅰ规模小、变化少、结构简单。因此，系统所含信息量极少，其他两种子系统完全没有必要独立出来。而在社会化大生产条件下，企业内部各种物质和资金流量错综复杂，简单原始的子系统Ⅰ、Ⅲ不能保证充足的信息供应，及时做出决策。当前我国大多数企业中财务系统多为手工或半手工操作，财务信息的收集、处理、加工利用能力很弱，无法适应现代化管理的需要。

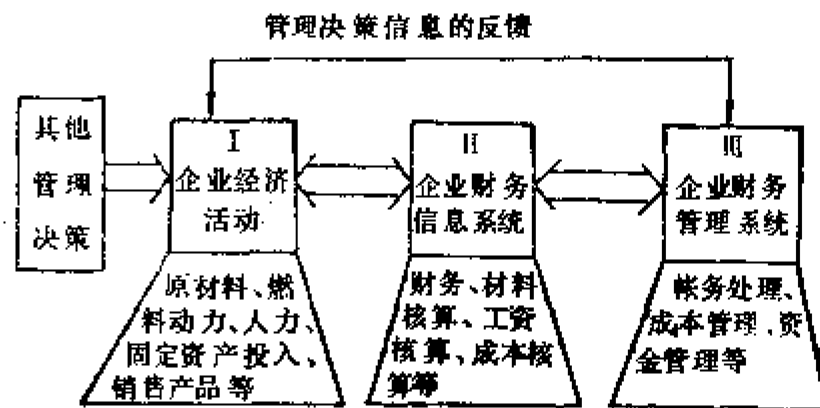



图 7-6-1 企业经济活动、财务信息系统和财务管理系统关系

中国人民大学、建材部无锡自动化研究所和首都水泥厂联合承担了首都水泥厂的企业财务管理信息系统的科研项目。该项目的目标是使水泥厂的整个财务管理信息系统计算机化，并在模拟手工操作的基础上，广泛应用系统优化的分析方法形成企业财务决策支持系统（DDS）。经过半年的开发，该系统已进入并行运行阶段，并初步取得良好的效果。在从事该系统成本分析模块的开发中，应用投入产出分析，进行了各种优化分析工作。

水泥厂财务管理信息系统可以分成三大功能模块，其系统整体功能模块划分见图7-6-2。

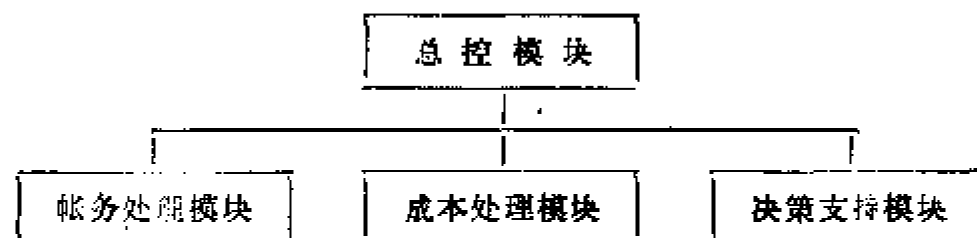



图 7-6-2 水泥厂财务管理信息系统

## 一、企业投入产出模型的建立

水泥厂的生产工艺过程类似冶金企业，整个生产过程包括多个相互连接的步骤．各个生产阶段之间采取“正向联系”。生产工艺过程如图7-6-3所示：由于只存在“正向联系”，而且产成品、半成品构成简单，因此，水泥厂投入产出表比较容易编制。

设企业的生产过程可以划分为几个相对独立的阶段，按照具体的问题，不同阶段可以按具有独立形态的半成品、成品划分，也可以以车间为单位划分，或进一步归集为以总厂的分公司所属各厂为单位划分。具体情况应视生产过程的性质和问题的特征确定。

根据实际观测或依据企业的信息系统，得到时期$T$内各个阶段间的实物流量矩阵如下：

企业内部流量矩阵　　表 7-6-1

| 流出＼流入 | 阶段1 阶段2……阶段 n | 期初库存（包括在产品） | 期末库存（包括在产品） | 库存变化 | 最终产品 | 总产品 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 阶段 1<br>⋮<br>阶段 n | $W_{11}$ $W_{12}$……$W_{1n}$<br>⋮<br>$W_{n1}$ $W_{n2}$……$W_{nn}$ | | | $Z_1$<br>⋮<br>$Z_n$ | $Y_1$<br>⋮<br>$Y_n$ | $X_1$<br>⋮<br>$X_n$ |

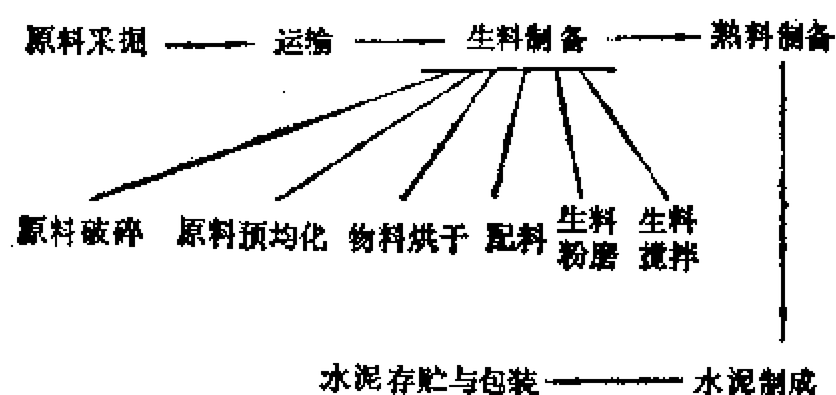



图 7-6-3　水泥生产工艺过程

在横向上有以下平衡式

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} W_{ij} + Z_i + Y \qquad (7\text{-}6\text{-}1)$$

令$a_{ij} = W_{ij}/X_j$，上式可以写成矩阵形式

$X = AX + Z + Y$，令$Z + Y = F$，有

$$X = (I - A)^{-1}F \qquad (7\text{-}6\text{-}2)$$

在企业生产过程中，除了对自身产品（半成品）的消耗以外，还要投入适当数量的外购原料、燃料、动力以及相应的人力和各种辅助消耗，总称为外部资源。将这些投入按适当的方式分类。设时期$T$内各项外部资源经归集和分配后可表示为以下矩阵形式（表7-6-2）：

外部资源分配矩阵　　表 7-6-2

| | 阶段 1 | 阶段 2 ……………阶段 n | 外部投入总量 |
|---|---|---|---|
| 外部资源 1<br>⋮<br>外部资源 m | $M_{11}$<br>⋮<br>$M_{m1}$ | $M_{12}$ …………… $M_{1n}$<br>⋮ …………… ⋮<br>$M_{m2}$ …………… $M_{mn}$ | $M_1 = \sum_j M_{1j}$<br>⋮<br>$M_m = \sum_j M_{mj}$ |

假设在产量和外部资源投入量之间存在着稳定的比例关系，则令$e_{ij} = M_{ij}/X_j$。矩阵$E(e_{ij})_{m \times n}$为外部投入系数矩阵，表示单位总产量的各种外部资源的直接投入量。

有了$A$、$E$两个系数矩阵，就可以模拟企业内外技术经济联系，建立各种数学模型，用于分析系统运行的效率，预测系统的状态，控制系统输出。

企业投入产出表的编制为建立企业管理系统，由常规管理过渡到现代化管理方式，更加有效地协调组织企业生产活动提供了基础。经验表明，将企业投入产出表用于管理，开发管理系统，有直接明显的经济效益。

将上述表7-6-1和表7-6-2合并，得到

$$\begin{pmatrix} W & F & X \\ M & & \end{pmatrix} \qquad (7\text{-}6\text{-}3)$$

称为投入产出流量矩阵。如果流量矩阵中，按某种特定的标准选择各个流量，如平均先进原则，得到的矩阵称之为标准流量矩阵。

## 二、企业内部核算价格——标准成本计算模型

企业内部为了完善各个经济部门的责任，明确各部门的利益，有必要对各部门活动作

出经济评价，通常最可取的两种方法是采用影子价格与成本价格。

1.标准成本价格的经济意义与计算

对于首都水泥厂这类企业，其经营组织有两个特点：一是各生产阶段（车间）之间技术经济联系紧密，各车间中间产品结构简单，一般不作为产成品出售(除了最后阶段之外)，即各车间半成品大部分没有独立的商品形态；二是企业本身才是独立的经济实体，车间、部门只是企业的组成部分，无权单独做出经营决策。由于以上两点，各生产部门（车间）无力承担以下责任：一是产品生产结构，这是由厂一级做出，责任应由厂来负；二是决定劳动和资本的就业量在各个产品上的配置。由于这些特点，影子价格系统不适用于用做这类企业的内部核算价格，它更加适用于生产多种产成品，各下属厂在技术经济上相互独立的公司的内部核算与间接管理。

但是作为一个独立出来的生产环节，企业生产部门（车间）仍然承担以下责任并享有直接经济利益：在资本、劳动投入给定的条件下，决定部门的生产方式，并组织其实施。车间决策，组织的直接结果是在同种投入下中间产品的数量，或者说是产量一定时必需的投入量，即中间产品成本，其高低是反映生产部门（车间）组织管理水平的标准。因此，只要核算按某种原则确定的标准成本，就能决定企业内部门活动的经济评价的问题。

设企业的标准投入产出流量矩阵为（7-6-3）式，由此得到的投入产出系数矩阵为$\binom{A}{B}$，由（7-6-2）式，令$B=(I-A)^{-1}$，有

$$X=BF \tag{7-6-4}$$

矩阵$B$的元素$b_{ij}$的经济含义：系统在$j$阶段一个单位最终产出所需要的$i$阶段的总产量即$j$阶段增加一个单位最终产出，第$i$阶段的生产能力需要扩大$b_{ij}$倍，才能保持整个系统的平衡。在系统对外部资源的消耗中，直接消耗矩阵为$E$，则由$E$的含义，系统生产过程中对外部资源的需要量满足以下关系式：

$$M_i=\Sigma M_{ij}=\sum_{j=1}^{n}e_{ij}X_j$$

$$M=EX=EBF=HF \tag{7-6-5}$$

令$H=EB$，其元素$h_{ij}$表示系统每生产一个单位最终产出所需外部资源$i$的总投入量，即其成本构成。

外部资源外生，本企业无法控制，令$P_e$为其价格向量，由（7-6-5）式得：

$$P_e^TM=P_e^TEBF \tag{7-6-6}$$

上式表示各阶段单位产出的成本向量为$C^T=P_e^TEB$。换言之，我们得到各阶段单位产量成本向量$C=B^TE^TP_e$。

2.常规成本核算方法与投入产出法比较

目前，国内企业成本核算多采用各种手工计算方法，例如，综合结转法，平行结转法，分类法，分批法等。这些方法算法简单，但费工费时，不能及时获得产品成本的信息，无法及时有效地开展成本管理与成本控制，而且在存在逆向联系的情况下，这些方法在理论上都有一定的缺陷。使用投入产出模型、电子计算机，编制程序设计将能解决这些问题。

我们将证明：投入产出模型计算成本与综合结转法-成本还原法在没有逆向联系的条件下等价，同时说明在存在逆向联系时两者的区别。

设有流量矩阵$\begin{pmatrix} W & F & X \\ M & & \end{pmatrix}$在生产只有正联系时

$$W_{ij}=\begin{cases}0 & i\geqslant j\\ a_{ij}X_j & i<j\end{cases}$$

按综合结转法各阶段成本向量为$CC_i$，则根据综合结转法的计算过程，有

$$CC_iX_j=\sum_{i<j}CC_iW_{ij}+\text{原始成本项目}$$

$$=\sum_{i<j}CC_iW_{ij}+\sum_i P_{\cdot i}M_i$$

$$CC_i=\sum_{i<j}CC_ia_{ij}+\sum^{r}P_{\cdot i}e_{ij}=\sum_{i=1}^{n}CC_ia_{ij}+\sum P_{\cdot i}e_{ij}$$

得到 $$CC=B^TE^TP_e=C$$

即综合结转法与投入产出模型相同。但是，如果存在逆向联系，即某个$a_{i_0j_0}>0, i_0\geqslant j$。那么，$CC<C$，按综合结转法将低估实际成本。

成本还原实际上是由$CC\to H=EB$的还原。

设由还原法求得原始成本构成矩阵为$\widetilde{H}=(\widetilde{h}_{ij})$，则有：还原分配率$=W_{kj}/X_k$（$K\leqslant j-1$）

根据成本还原计算方法，有

$$\widetilde{h}_{ij}\cdot X_j=\sum_{i<j}W_{kj}/X_k,\quad(M_{ik}+\widetilde{h}_{jk}\cdot X_k)$$

$\widetilde{h}^*_{ij}$为上步转来半成品的原始成本项目还原。

$\widetilde{h}_{ij}=\widetilde{h}_{ij}^*+e_{ij}$ 上式两端同除以$X_j$得：

$$\widetilde{h}_{ij}^*=\sum_{K<j}a_{kj}(e_{ik}+h_{ik}^*)$$

得到 $$\widetilde{H}^*=EA+\widetilde{H}^*A,\qquad \widetilde{H}^*=EA(I-A)^{-1}$$

$$\widetilde{H}=\widetilde{H}^*+E=EA(I-A)^{-1}+E=EB=H$$

即证明了两证方法的等价性。

因此，完全可以用投入产出模型代替常规的手工成本计算，建立起计算机成本核算系统，而且对于技术经济联系比较复杂，生产阶段比较多的企业，投入产出模型能够更加迅速、准确地处理成本数据，分析，考核成本状况。

## 三、生产-成本计划与成本规划模型

1.生产-成本计划模型

设基期投入系数矩阵为$\begin{pmatrix}A_0\\E_0\end{pmatrix}$，计划期消耗系数由于技术组织等因素，预计可能调整为：

$$A_1=A\cdot B_1=(A_{ij}\cdot B^1_{ij})$$

$$E_1=E\cdot B_2=(e_{ij}\cdot B^2_{ij})$$

计划制订常常是一个循环过程，根据预定产量$\widetilde{F}$，按某个经过调整的消耗矩阵（$A_1$，$E_1$），计算系统对$M$的需要量$\widetilde{M}$。若$M$超出了资源的预计供应量$\widetilde{M}$，则调整（$\widetilde{F}$，$\widetilde{A}$，$\widetilde{E}$，$\widetilde{M}$）开始另一循环，直到结果比较满意为止。为将这个过程公式化，我们提出如下模

糊规划模型。

决策过程可以描述如下：（1）确定满意的计划产量的模糊集$\tilde{F}$：隶属函数$\mu_{\tilde{F}}(F-F_p)$，$F_p$为企业最满意的产量。根据$\tilde{F}$的性质，可以认为$\mu$服从升半正态分布；确定可行成本计划的模糊集合$\tilde{C}$：$\mu_{\tilde{C}}(A_1,E_1)$，参考各部门与企业领导意见确定。（2）开始循环过程：由（7-6-4）式，如果给定计划产量$\tilde{F}$，则$\tilde{M}_p=E_1(I-A_1)^{-1}\tilde{F}$，对我国多数企业，经常面临的问题是$\tilde{M}_p>$实际供应量$M_1$，这时企业面临两种选择：$a$.缩减产量，使满足$M_1=E_1B_1F$，代价是至少在一段时期内，将缩小市场占有量。另外直接的代价是减少了总收入；$b$.设法增加外部资源供应量，使满足$M=E_1B_1\tilde{F}$，代价是必须高价购买外部资源。（3）反复在$a$、$b$两种方法之间权衡，并决定最后取舍。综合上述可以提出如下企业生产-成本计划模型：

目标函数：$\max\{PF_p-P_1^2(M_p-M_1)-P_1^1M_1\}$

约束条件：
$$\begin{cases} M_p=E_1(I-A_1)^{-1}F_p \\ \begin{pmatrix}A_1\\E_1\end{pmatrix}\in\tilde{C}, \\ F_p\in\tilde{F}\end{cases}$$

普通规划模型与模糊规划模型的区别在于：前者认为企业随时都在考虑以最大利润做为经济活动的目标，而且不加任何非经济因素的限制，企业家对市场反应灵活，而且短视，模型更加符合完全竞争的假设。我们提出的模糊规划模型则考虑了不完全均衡下的不完全竞争、企期的长期考虑以及决策者的各种主观信息和模糊估计。模糊模型在比较现实的基础上实现了对决策过程的模拟。

2.长期成本规划模型

在企业制订投资计划时，常常面临技术选择问题。设从原始投入-产品产出存在$m$种可以选择的组织方式$T_s$，每个单位$T_s$生产能力所需投资额相同，投入向量为$(H_s^i)$，产出向量为$(B_s^j)$，$\sum P_jB_s^j=1$，企业将选择单位成本最低的技术组合$\overline{T}=\sum_{s=1}^{m}\lambda_sT_s$。于是系统单位活动投入量为$P_1^T\overline{H}$，$\overline{H}=\sum_s\lambda_sH_s$，产出量为$P^T\overline{B}$，$\overline{B}=\sum_s\lambda_sB_s$，相应的规划模型为：

$$\begin{cases}\max\{P\Sigma\lambda_sB_s-P_e\Sigma\lambda_sH_s\} \\ \Sigma\lambda_s=1 \\ \lambda\geqslant1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\min P_e\Sigma\lambda_sH_s \\ \Sigma\lambda_s=1 \\ \lambda_s\geqslant0\end{cases}$$

这是一个简单的线性规划问题。根据解的性质，我们知道在预期价格向量$P_1$, $P_e$时，上述模型有解，而且必在区域$\Omega=\{\sum_s x_s\leqslant1, x_s\geqslant0\}$的某个顶点达到：解为$\lambda_{s_0}=1,\lambda_s=0$，其意义是在稳定的价格体系下的长期成本决策中，存在一种最有竞争力的“优势技术”。这种技术成本最低或者说盈利最高，因而在竞争的经济中将被广泛应用。如果根据灵敏度分析，表明价格在一定范围变化时，模型的解保持稳定，那么技术$S_0$占绝对优势。各个不同时期的优势技术的组合形成了技术变化的渐近曲线。在企业技术决策中应当尽力

采用优势和绝对优势技术，以保持竞争力。

3.成本控制

在成本计划模型中，我们对外部资源的供应施加了一个“软约束”，但是对所有外部资源是同等对待的，没有考虑各种不同的外部资源约束对产量的影响。对各种外部资源即原始成本项目，常规手工计划中常常是先估计资源投入量的变动，然后利用各种平衡法确定生产结构与成本计划。事实上，各种资源约束的变动对系统产量的影响是不同的，增加和节约使用某些投入量可以大大增加产量，这些资源称之为“关键资源”。线性规划的对偶理论已经发展出一套完整的资源评价方法。我们可以用来作为企业模型的一部分，评价外部资源的影子价格，确定成本控制的标准，决定外部资源需求量的调整，提高成本控制水平，避免出现在成本控制中由于简单地使用限量控制原则而造成的不必要的经济损失。

在外部资源供应约束下，企业决策目标是使利润最大，相应的规划问题为：

$$(LP)\begin{cases}\max[\Sigma P_i f_i = P^T(I-A)X = g(X)] \\ \sum\limits_j e_{ij}X_j \leqslant M_i, \quad i=1,2,\cdots,m \\ X_j \geqslant 0\end{cases}$$

其对偶规划问题是：

$$(DLP)\begin{cases}\min[Y^T M = \sum\limits_{i=1}^{m} Y_i M_i] \\ Y^T E \geqslant P^T(I-A) \\ Y_i \geqslant 0\end{cases}$$

（$DLD$）的解$Y^*$称为资源的影子价格，设对偶问题的解点为（$x^*$，$y^*$），则

$$\frac{\partial g}{\partial M_i}\Big|_{x=x^*} = y^* \quad i=1,2,\cdots,m$$

即资源的影子价格等于在原规划问题中的边际产量，其数值是表示这种资源对本系统效率的参数。直观地说，$y_i^*$越大，由于$i$的短缺带来的损失越大，越应该设法增加其供应。供应成本以不超过$y_i^*$为限，同时加强对资源$i$使用的控制，提高利用效率，避免不必要的浪费。如果$y_i^*=0$，而且灵敏度分析表现稳定——$M_i$适当变小时仍有$y_i^*=0$，则表示资源$i$是过剩的。为了减少过多地库存物质，积压占用的流动资金，应该转售这部分资源，使资金转移到关键资源上去，从而提高了盈利，又降低了成本。

为了使各个生产部门节约使用各项资源，降低成本，可以考虑使用混合价格的标准成本核算方法，实现对成本的有效控制。根据成本公式$C=B^T E^T \overline{P}_e$，外部资源的购入价格为$P_e$，则令$\overline{P}_i^e=\max\{Y_i^*, P_i^e\}$。需要指出：如果在宏观上资源可以达到供求平衡，那么在竞争的市场机制下，必有$Y_i^*=P_i^e$。如果资源在宏观上不平衡，生产能力明显短缺，而且国家对资源实行限价制度，那么，价格的调整将不完全随其短缺而定，必定存在$P_i^e<Y_i^*$。这时企业用$Y_i^*$作为成本计算的标准更有利于内部经济效益的提高。

## 四、企业财务系统模型化

企业财务系统内各个帐户之间的财务往来可以如图7-6-4所示：

如果我们将会计帐户中使用的借贷改为流入、流出，则整个帐户体系体可以对应一个

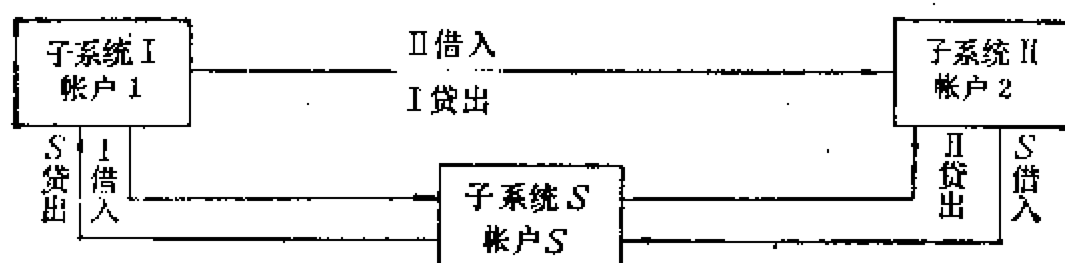



图 7-6-4 各帐户间财务往来

投入产出系统。根据这种原理，可以设计一个棋盘式总帐系统，以代替原来众多相互混杂的分类帐，明细帐。在首都水泥厂实现的计算机帐务处理系统，就是根据这个原理设计的。根据棋盘式总帐原则建立的帐务处理系统为财务系统建模创造了数据基础。

有以下平衡式

$$X_i = \sum_j W_{ij} + Y_i \qquad (7\text{-}6\text{-}7a)$$

$$X_i = \sum_j W_{ji} + Z_i \qquad (7\text{-}6\text{-}7b)$$

令 $a_{ij} = W_{ij}/X_j$；$b_{ij} = W_{ji}/X_j$，

则（7-6-7$a$）（7-6-7$b$）式化为：

$$X_i = \sum a_{ij}X_j + Y_i; \quad X_i = \sum b_{ij}X_j + Z_i$$

用矩阵表示，则有

$$X = (I - A)^{-1}Y \qquad (7\text{-}6\text{-}8a)$$

$$X = (I - B)^{-1}Z \qquad (7\text{-}6\text{-}8b)$$

**棋 盘 式 总 帐** 表 7-6-3

| 贷方 / 借方 | $A_1$ $A_2$…… $A_n$ | 外部帐户 | 借方合计 |
|---|---|---|---|
| $A_1$ ⋮ $A_n$ | $W_{11}$ $W_{12}$……$W_{1n}$ ⋮ $W_{n1}$ $W_{n2}$……$W_{nn}$ | $Y_1$ ⋮ $Y_n$ | $X_1$ ⋮ $X_n$ |
| 外部帐户 | $Z_1 Z_2$……$Z_n$ | | $\Sigma Z_k$ |
| 贷方总额 | $X_1 X_2$……$X_{11}$ | $\Sigma Y_k$ | |

假设系数矩阵$A$、$B$稳定，即系统内部存在稳定的借贷(资金流量)关系。那么，如果已知外部帐户借方向量$Y$或贷方向量$Z$，则根据（7-6-8$a$）、（7-6-8$b$）式，便可以确定整个帐务系统各帐户的借贷方向和相互流量。因此，（7-6-8$a$），（7-6-8$b$）式可用于财务预测与分析。建模中关键的一点是外部帐户的选择。根据模型的特点，外部帐户选择的标准是：帐户同系统内其它帐户之间不存在密切稳定的借贷关系，其借贷发生额受到财务系统以外的各种因素影响，而且可以由其他方法观测或估计。相反，模型要求各内部帐户$A_i$之间存在稳定的借贷关系。

由于帐务处理的性质，有可能以较大的频率和准确的流量数字制订棋盘式总帐，从而为财务系统的投入产出模型的实践与理论研究提供了良好的条件，这是生产系统的投入产出模型所不具备的。根据一定时期若干棋盘式总帐，得到一组财务关系式：

$$X_t = (I - A_t)^{-1}Y_t, \quad t = 1, 2, \cdots, T \qquad (7\text{-}6\text{-}9)$$

$$A_t = [a_{ij}(t)] = [W_{ij}(t)/X_j(t)]$$

利用$A_t$的众多样本，有可能利用简单的统计分析、时间序列分析、和回归分析技术，识别并确定$A_t$元素的相互关系与时间趋势，判断$A_t$系数的稳定性，并在此基础上发展投入产出理论与方法。

根据上面的统计分析得到$A_t$在$T+1$时的预测值$A_{T+1}$，利用其它方法得到$T+1$时，外部帐户向量为$Y_{T+1}$，则由（7-6-8$a$）式得到$T+1$时期的借方向量预测值：

$$X_{T+1} = (I - A_{T+1})^{-1}Y_{T+1}$$

由此，可以得到各帐户之间的借贷发生额预测。

## 五、投入产出分析的实现

以上所有分析方法都涉及到数据量和计算量很大的矩阵分析，使用投入产出分析，在手工计算的情况下几乎不可能实现。然而，通过合理地设计数据结构，充分应用现成的矩阵分析算法，可以用微机实现财务管理的投入产出分析，从而有效地完成企业财务决策支持系统的设计与应用。

# §7-7 模糊数学在投标决策中的应用[183]

1986年，赵仲琪应用模糊数学理论，提出了两步投标决策的模糊数学模型及计算程序。为建筑工程承包中的投标决策提供了一种可以综合多因素，又简便易行的计算方法，也可供其他投标决策参考。

建筑工程承包中的投标决策涉及很多因素，而且有些因素是不能用精确数值表示的模糊因素。考虑模糊因素的这种投标决策，不能直接沿用系统工程中原有的决策方法，为此提出一个建筑工程承包中应用模糊数学的决策法。该法是从投标决策的程序入手，将投标决策分为两步，分别建立初选决策的模糊关系方程和终选决策的模糊概率隶属函数及最优报价方程，用电子计算机求解决策级及最优报价。

## 一、两步决策法投标程序

两步决策法是将投标过程划分为两个阶段，即工程的初选与终选投标决策阶段。初选投标决策的目的在于作出是否要参加某项招标工程的投标决策。也就是说，将影响投标决策的多种因素与投标者所具备的各种条件进行比较，作出该项工程投标可能性的估价。如果可能性很大，再进一步投入人力、财力作初选中选工程的预算、施工方案、计划等各项资料、数据的准备工作及最终决策；否则，就放弃投标。终选投标决策是在已作出工程预算的基础上，优选投标的报价系数，并计算出使预期利润率及中标率为最大时的最终决策的投标报价。

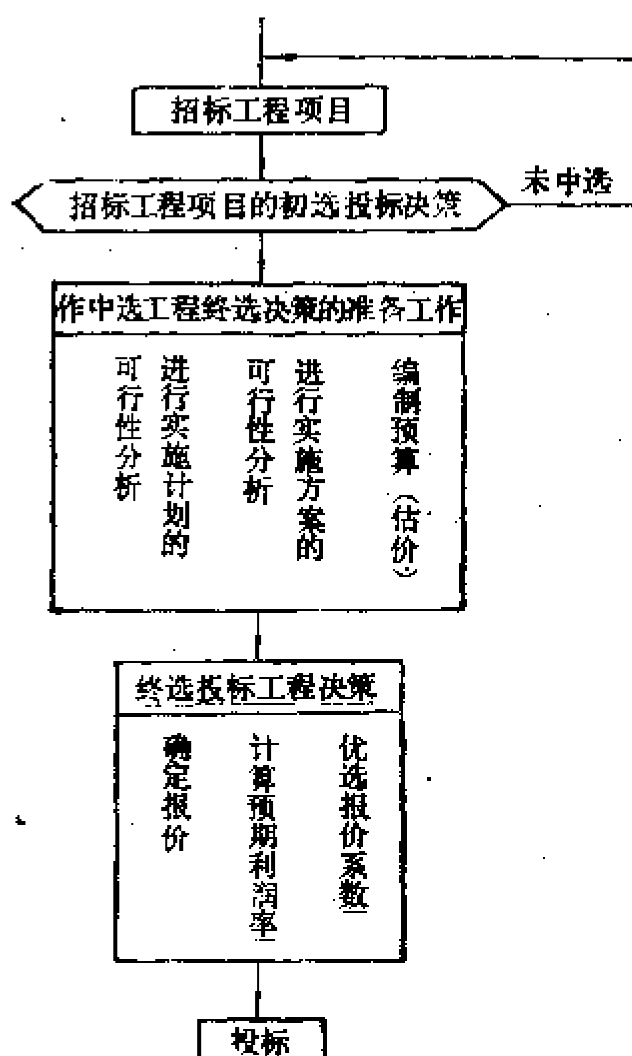



图 7-7-1 两步投标决策程序

两步决策法投标程序如图7-7-1所示。

中选工程终选决策的各项准备工作，如编制预算，目前各地区各单位都有现行的预算定额和编制预算的成熟经验，可参照执行。

## 二、初选决策

做工程的初选投标决策时，需要考虑的因素很多，包括工人操作水平、机械设备能力、

投标的竞争程度，交工条件等。初选投标决策就是对多因素综合评判，按其结果确定初选投标决策的策略。

由于所考虑因素中的每一项往往是模糊概念，对其评价一般按照满足条件的程度来区分，并依据满足的程度设立评判的鉴别标准。

1.初选决策的数学模型

设决策因素有限论域为$U$，$U=\{u_1,u_2\cdots,u_n\}$。决策评判鉴别标准有限论域为$V$,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$。按照决策评判鉴别标准的顺序对应着$m$个决策级。即$v_1$对应着Ⅰ级决策，$v_2$对应着Ⅱ级决策，…，$v_m$对应着$m$级决策。

初选决策的综合评判中，产生了各决策因素所起作用不同的非等效性。按其所起作用的大小分别赋予不同的权数，用$a_1$，$a_2,\cdots,a_n$表示，且符合归一化，即$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$。决策因素的诸权数确定了$U$上一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$。$\underset{\sim}{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_i\in U$，$(i=1,2,\cdots,n)$，$\underset{\sim}{A}$称为决策因素非等效性模糊向量。

对每一项决策因素按评判鉴别标准进行单因子评判的模糊统计，计算其隶属度，构成论域$V$上的一个评判向量$\underset{\sim}{R_i}$。

$$\underset{\sim}{R_i}=\{\mu_{\underset{\sim}{R}i}(f_j)\} \qquad (7\text{-}7\text{-}1)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{R}i}(f_i)=\lim_{k\to\infty}\frac{f_j\in V_j\text{的次数}}{K} \qquad (j=1,2,\cdots,m) \qquad (7\text{-}7\text{-}2)$$

式中：$i$——第$i$项决策因素；$\underset{\sim}{R_i}$——第$i$项决策因素的评判向量；$K$——评判的总次数；$f_j$——属于$j$级决策鉴别标准的事件；$V_j$－$j$级鉴别标准的评判集合。

由各决策因素评判向量的集合确定的模糊关系$\underset{\sim}{R}$，写成矩阵形式，称为评判矩阵$\underset{\sim}{R}$。

$$\underset{\sim}{R}=\{R_i\} \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (7\text{-}7\text{-}3)$$

亦即，
$$\underset{\sim}{R}=\{\mu_{\underset{\sim}{R}i}(f_j)\} \quad (i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m) \qquad (7\text{-}7\text{-}4)$$

若用$\underset{\sim}{B}$表示评判结果的决策向量，$\underset{\sim}{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，则$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{R},\ \underset{\sim}{B})$构成初选决策关系方程：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R} \qquad (7\text{-}7\text{-}5)$$

令$r_{ij}=\mu_{\underset{\sim}{R}i}(f_j)$，决策方程写成展开形式：

$$(b_1,b_2,\cdots,b_m)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\circ\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12}\cdots r_{1m} \\ r_{21} & r_{22}\cdots r_{2m} \\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots \\ r_{n1} & r_{n2}\cdots r_{nm} \end{bmatrix}$$

式中：
$$b_j=\bigvee_{i=1}^{n}(a_i\wedge r_{ij})$$

$b_1,b_2,\cdots,b_m$依次对应着决策鉴别标准$m$个可能性程度的$m$个决策级，其值最大者所对应的决策级即为初选最终决策级。

2.初选决策的通用程序框图

标识符说明：$n$——表示决策因素的个数；$m$——表示决策评判鉴别标准的个数；

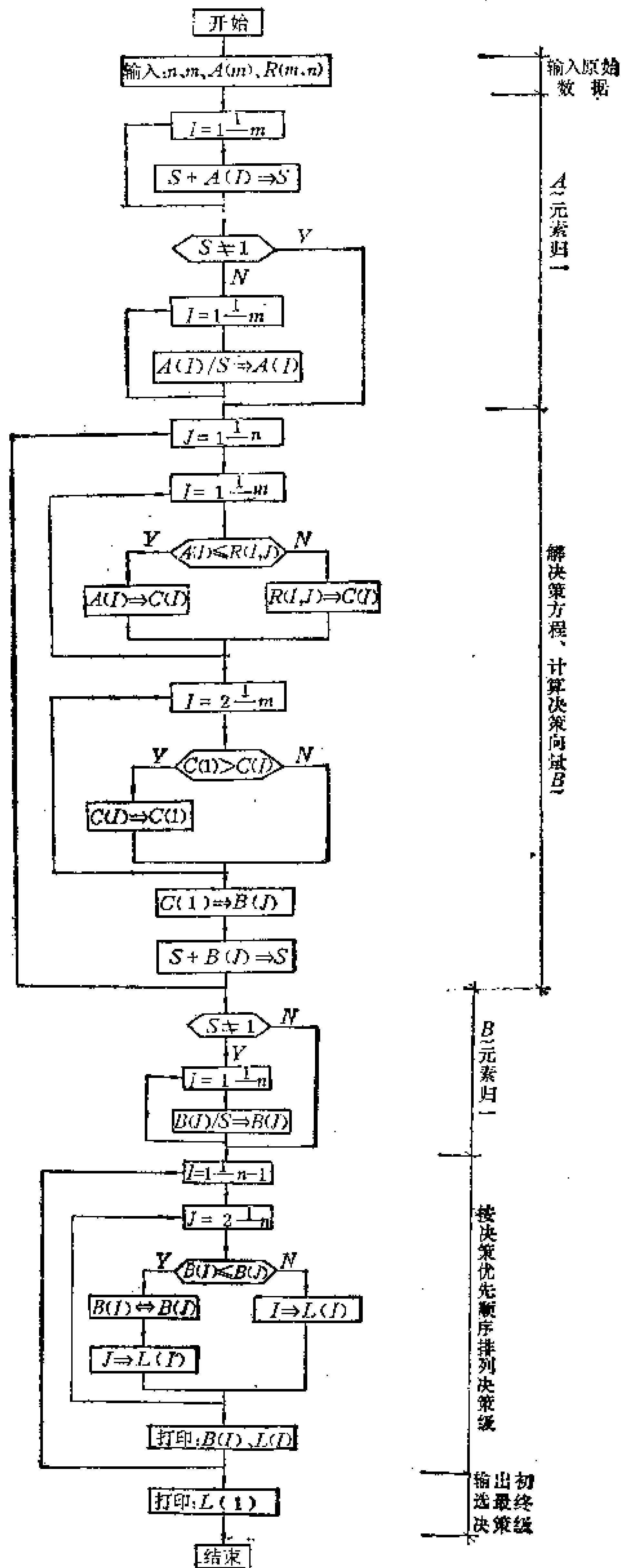



图 7-7-2 初选决策通用程序框图

$B(m)$——表示存放评判结果的决策向量$\underset{\sim}{B}$的数组；$A(n)$——表示存放决策因素非等效性模糊向量$\underset{\sim}{A}$的数组；$L(m)$——表示存放决策级的数组；$R(n,m)$——表示存放评判矩阵$\underset{\sim}{R}$的数组；$C(m)$，$S$，$I$，$J$均为工作单元。

初选决策程序框图如（图7-7-2）所示。

3.示例

设建筑公司参加一项招标工程的初选投标决策，决策因素有限论域$U$由工人操作水平（$u_1$）、机械设备能力（$u_2$）、技术和试验能力（$u_3$）、交工条件（$u_4$）、对工程项目的熟悉程度与以往的经验（$u_5$）、投标的竞争程度（$u_6$）、对提高信誉与今后投标的影响程度（$u_7$）七个因素组成。决策评判鉴别标准有限论域由绝对不可能满足（$v_1$）、不可能满足（$v_2$）、有可能满足（$v_3$）、非常可能满足（$v_4$）、能满足（$v_5$）五个标准组成。

聘请20位专业技术人员按五项鉴别标准逐一进行单因素评判，对评判结果进行模糊统计，按式（7-7-2）计算隶属度，组成模糊评判矩阵$\underset{\sim}{R}$

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}$$

决策因素非等效性模糊向量$\underset{\sim}{A}$采用

$$\underset{\sim}{A}=(0.3\ 0.2\ 0.1\ 0.1\ 0.1\ 0.1\ 0.1)$$

将$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{R}$代人初选决策关系方程式（7-7-5）得

$$B=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=(0,\ 0.14,\ 0.14,\ 0.43,\ 0.29)$$

显然，$b_4=0.43$为最大值，所以初选最终决策应采用第Ⅳ级，即“非常有可能满足”。

## 三、终 选 决 策

1.终选决策的数学模型

设：$V$为工程投标报价；$A$为工程造价，即预算价格；$B$为报价系数，$B=V/A$；$BI$为直接利润系数，$BI=B-1$；$EI$为预期利润；$P$为投标的模糊概率。

投标的标价$V$应使预期利润为最大。预期利润可用下式表示：

$$EI=(B-1)\cdot A\cdot P \qquad (7\text{-}7\text{-}6)$$

式中$A$为定值。$EI$随$B$、$P$的取值而变化，若报价系数过小，报价过低，直接利润系数可能变为负值，即不仅不获利反而赔本，此时，虽然中标的概率很大，但选用此方案进行投标的概率却很低；反之，若报价系数很大，则报价过高，虽然直接利润系数可能很大，获利很高，但中标的概率可能很小。因而选用此方案进行投标的概率亦很低。由此可以看出报价系数与投标概率是相互影响的一对因素。而投标概率又与同时参与投标的对手的数量和

强弱及本身任务的饱满程度等因素有关，属于模糊概念。根据国内外现有投标工程资料的数据分析，模糊分布$P$-$B$曲线如图7-7-3所示。将其图中$P$值归一，得图7-7-4。

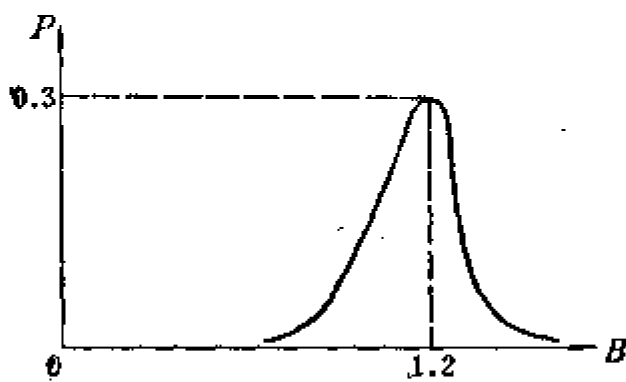


图 7-7-3　模糊分布$P$-$B$曲线

（以$a=1.2$图形为例）

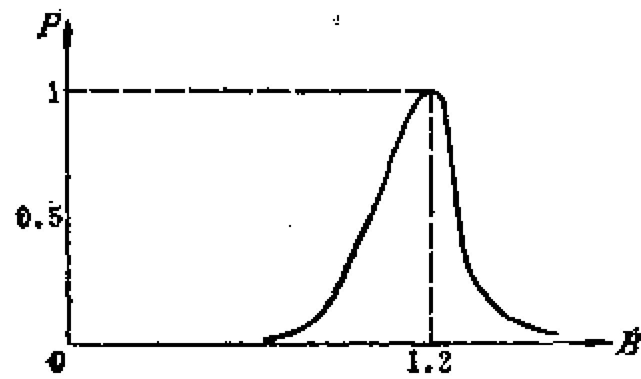


图 7-7-4　$P$-$B$曲线归一图

由图看出：模糊分布$P$-$B$曲线归一图接近于正态型。若投标概率的隶属函数用下式表示：

$$\mu_{\underset{\sim}{P}}(B)=e^{-\left(\frac{B-a}{b}\right)^2} \qquad (7\text{-}7\text{-}7)$$

式中：$B$——报价系数；$a$——投标概率为最大（等于1）时的报价系数，根据统计资料$a$宜在1.1～1.3范围内取值；$b$——大于零的常数，宜在（0,1）间取值。

仍以$a=1.2$为例，取$b=0.2$，则其分布曲线如图7-7-5所示。又根据概率论可知，如同时参加投标的对手为多个时，所采用的投标概率应为各对手投标概率的乘积。$P=P_1\cdot P_2\cdot\cdots\cdot P_f$。

若设$\overline{P}$为$f$个对手的平均概率，则$P=\overline{P}^f$。投标概率用其隶属函数表示，得

$$P=(\mu_{\underset{\sim}{P}}(B))^f=\left(e^{-\left(\frac{B-a}{b}\right)^2}\right)^f \qquad (7\text{-}7\text{-}8)$$

将(7-7-8)式代入（7-7-6）式，得多对手时投标报价的预期利润，

$$EI=A\cdot(B-1)\cdot\left(e^{-\left(\frac{B-a}{b}\right)^2}\right)^f \qquad (7\text{-}7\text{-}9)$$

终选决策的最优报价也就是预期利润最大时的报价$V$，所以，最优报价方程

$$V=B_{(EI\max)}\cdot A \qquad (7\text{-}7\text{-}10)$$

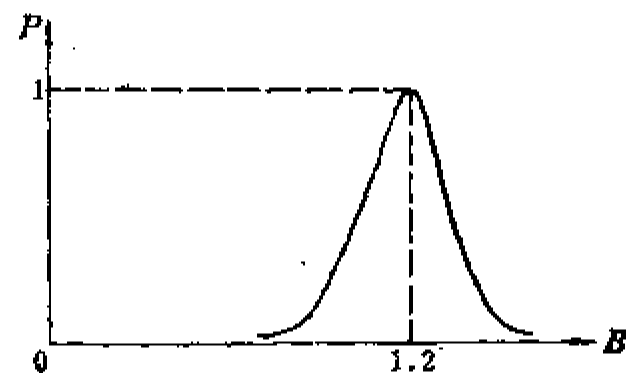


图 7-7-5　$P$-$B$模糊正态分布图

2.终选决策的通用程序框图

标识符说明：

$L$——表示竞争对手报价系数序列的个数；$K$——表示对策报价系数序列的个数；$B1(L)$——表示存放竞争对手报价系数的模糊子集的数组；$P1(L)$——表示存放竞争对手投标概率的模糊子集的数组；$B(K)$——表示存放对策报价系数的模糊子集的数组；$P(K)$——表示存放对策报价投标概率的模糊子集的数组；$PEI(K)$——表示存放对策报价的预期利润率的数组；$BI(K)$——表示存放对策报价的直接利润系数的数组；$PB1(50,2)$，$PB2(50,2)$，…，$PB11(50,2)$——依次表示存放$a$分别为1，1.05，1.1，1.15，1.2，1.25，1.3，1.35，1.4，1.45，1.5时，$P$-$B$模糊正态分布曲线值，其中，第一个值为报价系数，

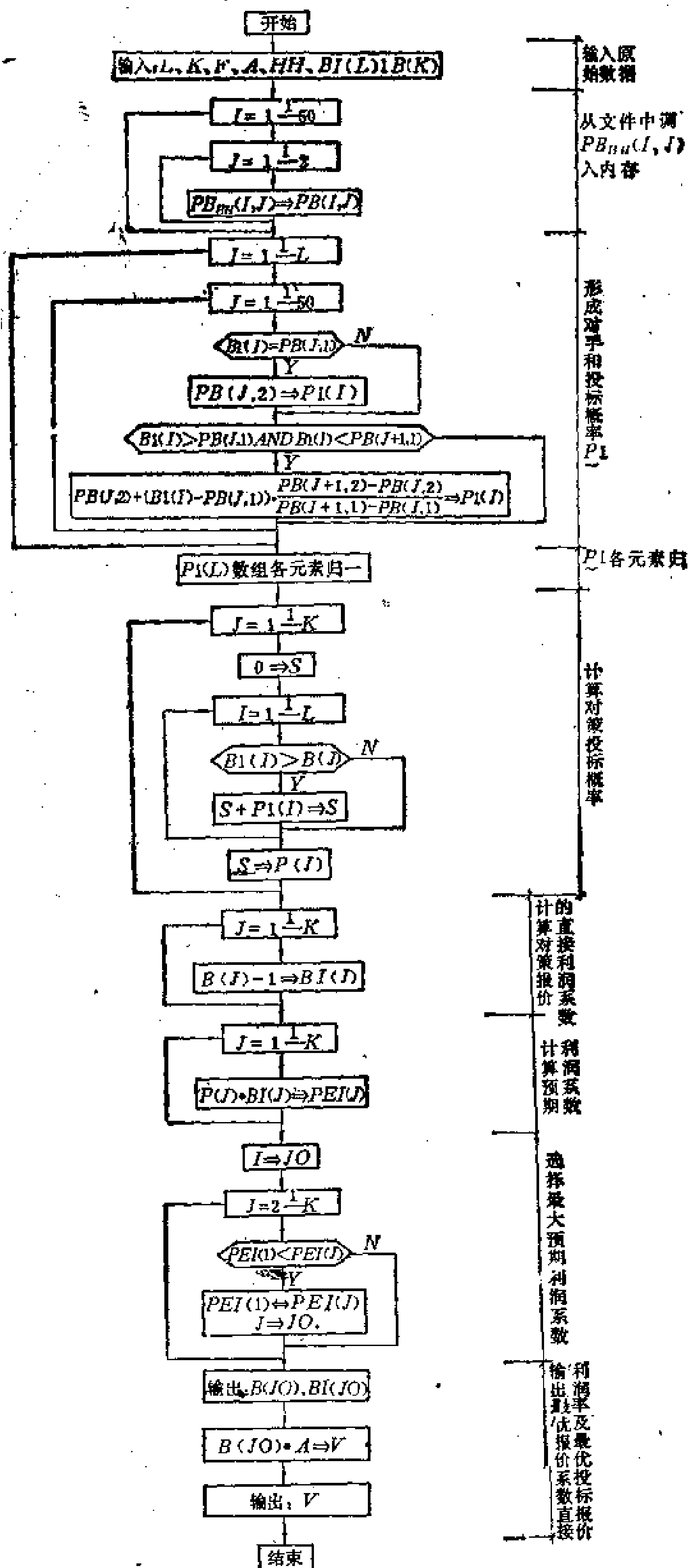



图 7-7-6 终选决策通用程序框图

第二个为投标概率。$PB1,\cdots,PB11$数组已形成，存在数据文件中；$V$——表示投标决策报价；$A$——表示工程的预算价格；$F$——表示竞争对手个数；$\dot{H}H$——调用$PB_1\cdots$的控制变量。

终选决策框图如图7-7-6所示。

3.示例

设某建筑公司已确定参加一项招标工程的投标，且已知有三个竞争对手。设已收集到的投标报价系数序列，组成对手报价系数的模糊子集$B1$。$B1$中报价系数为1.2时，投标概率为最大，利用终选决策通用程序，计算结果如下表7-7-1所示。

表 7-7-1

| NO | B1 | P1 | $P_1G$ | B | P | $P^3$ | BI | PEI | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.8 | 0.03 | 0.01 | 0.75 | 1 | 1 | −0.25 | −0.25 | |
| 2 | 0.9 | 0.1 | 0.03 | 0.85 | 0.99 | 0.97 | −0.15 | −0.135 | |
| 3 | 1.0 | 0.3 | 0.10 | 0.95 | 0.96 | 0.88 | −0.05 | −0.044 | |
| 4 | 1.1 | 0.63 | 0.19 | 1.05 | 0.86 | 0.64 | 0.05 | 0.032 | |
| 5 | 1.2 | 1.0 | 0.30 | *1.15 | 0.67 | 0.3 | 0.15 | *0.045 | *1.15·A |
| 6 | 1.3 | 0.86 | 0.26 | 1.25 | 0.73 | 0.05 | 0.25 | 0.0125 | |
| 7 | 1.4 | 0.26 | 0.08 | 1.35 | 0.11 | 0.013 | 0.35 | 0.00455 | |
| 8 | 1.5 | 0.1 | 0.03 | 1.45 | 0.03 | 0.000027 | 0.45 | 0.0000121 | |
| 9 | | | | 1.55 | 0.00 | 0.0 | 0.55 | 0.00 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

第 4 列为$P_1$序列各元素归一组成的新序列$P_1G$（对于投标概率模糊子集）；第 5 列为初拟的对策报价系数序列$B$；第 6 列为以初拟报价系数序各报价系数作为最低报价系数时，算出的对策投标概率序列$P$（对手投标概率模糊子集）；第 7 列为三个对手的对策投标概率序列$P^3$；第 8 列为对策报价系数的直接利润系数序列$BI$；第 9 列为对策报价系数的预期利润率序列；第10列为预期利润率最大时的最优报价（$A$为工程的预算价格）。该建筑公司终选投标决策的结果：报价系数为1.15直接利润为$0.15A$，最优投标报价为$1.15A$。

## §7-8　企业部门考评中的综合判定法[130]

1982年，葛明浩、张弘、黄天任借助Fuzzy集理论中有关综合评定的概念，采用拟模糊概率的方法，提出一种考评的定量分析法-综合判定法。研究表明，按此法评定的结果比较全面、合理。

在社会主义条件下，企业应该按照职工的劳动情况进行合理的分配以及执行定期考核晋级、优质超产奖励等制度，这就涉及到成绩评定的问题。根据我国的特点，我们从方法论的角度来讨论成绩评定的合理判定方法。

首先，从成绩评定的效用来看，它应是隶属于企业经营管理过程的一环，因而它不能仅仅扮演裁判员的角色，更应该在生产和扩大再生产的循环中自始至终起到鼓舞广大职工为实现四个现代化而努力工作的催化剂作用。成绩的反馈，应使人们及时得到鼓励，因

此，凡属一次性的考核都不能认为是企业中进行考核的理想方式。经常性的考评有助于企业管理能够及时采集信息并沟通信息的交流。然而，增加考核的频次，亦会伴随诱发企业内部矛盾的冲突，因此，考评需要做到有形和无形相结合。

其次，考评既然作为企业管理的一环，那么它就应该从系统出发，根据企业经营的各个环节来划定考核的基本内容。作为一个企业系统，它总是一个多层多元的复杂系统。因此，具体到某一个人或某一项产品的考核，应以系统目标为总目的，结合各工种或产品的自身特点，通过多次总结才能确立考核的基本因素。例如，对管理人员的考核基因，按美国费城管理学院的研究表明，规定需要考核六种能力：鉴别能力、评价能力、预测能力、创造能力、组织能力和决策能力，就是典型一例。又如，对于产品质量的评比基因，有人主张应以经济效果、耐久性和美观大方作为评判准则。且不论考核的基本因素如何建立，只有对基因集的诸因素进行全面的考核才有可能相对接近客观的真实性。

另外，成绩评定既然作为技术考核或质量评比的客观衡量，则理应具有相对的科学性。但常用的成绩评定方式，无论是记分法抑或评语法，都似乎不足以确切评定考核的结果，究其症结之所在，无非因为任何一项成绩的评定均涉及对多因素作出综合判定的概念。然而，至今既未探明综合判定的全部内在涵义，亦未察知它的明确外延。因此，不管采用评语法还是记分法都难以进行定量的分析。而没有精确的定量概念，就达不到相对的科学性。因此我们认为有必要重新探索评定成绩的合理方法。

企业经营管理系统是一个多层多元的复杂系统，随着系统复杂性的增加，不确定性和不精确性亦即模糊性，随机性随之增加。模糊集理论之内核就是让数学根据人脑对模糊现象进行识别和判定的特点，反过来又利用这一特定为人们在模糊的，多因素的识别和判定过程中，提供一种更强有力的处理手段和方法。因此，我们试图运用模糊集合理论，对企业部门中所进行的考评探寻综合判定的合理方法。

## 一、数 学 模 型

假定因素集$F$，评语集$E$和考核集$T$如下：

$$F=\{f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n\}$$
$$E=\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_m\}$$
$$T=\{t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_r\}$$

对设计人员的技术考核，不妨取

$F$={再现能力，发现能力，创造能力…}；

对技术工人的业务考核，不妨取

$F$={基本理论，操作技能，革新能力，…}

考核成绩的评定，若以传统八级制为准，则采用 $E$={1级，2级，…，8级}；若习惯于四级评分制，则取$E$={优秀，良好，及格，不及格}。

考试集是指$T$={第一次考核，第二次考核，…，第$r$次考核}；或者$T$={$t_1$经常性考核，$t_2$晋级考核}。

约定：因素集内诸元素的权数分配$W_F$和考核集内诸元素的权数分配$W_T$如下：

$$W_F=(W_{f_1},\ W_{f_2},\ \cdots,\ W_{f_n}),\ 且\sum_{i=1}^{n}W_{f_i}=1;$$

$$W_T=(W_{t_1},\ W_{t_2},\ \cdots,\ W_{t_r}),\ 且\sum_{j=1}^{r}W_{t_j}=1。$$

对因素集内诸因素作出各种评定乃是一种模糊映射。即使对单因素考核的评定，由于考评委员会的不同成员有可能作出不同的评定，因此描述考评的结果只能用对$f_i$作出$e_j$评定的可能性大小来表示，这种可能的程度称为隶属度，记作$r_{ij}$。对于某个确定的$i$，$j$仍可由1到$m$取值。因此，对于第$i$个考核因素$f_i$有一个相应的隶属度向量$\underset{\sim}{R}_i=(r_{i_1},\ r_{i_2},\ \cdots,\ r_{im})$。整个考核因素集内诸因素相应的隶属度向量可形式地记为矩阵形式：$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_{n\times m}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$。且取归一化：$\sum_{j=1}^{m}r_{ij}=1,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。

注意，对于第$i$个考核因素，若经过$r$次考核，相应就有$r$个隶属度向量。属于第$K$次考核的隶属度向量记作$\underset{\sim}{R}_i^{(K)}=(r_{i_1}^{(K)},\ r_{i_2}^{(K)},\ \cdots,\ r_{i_m}^{(K)})$。另外定义第$i$个考核因素对应于第$j$种评定的隶属度向量为：$\underset{\sim}{R}_{ij}=[r_{ij}^{(1)},\ r_{ij}^{(2)},\ \cdots,\ r_{ij}^{(r)}]^T$。则此时归一化的隶属度可以采用拟模糊概率的方法把它表为：

$$\begin{aligned} r_{ij}&=\underset{\sim}{W}_T\underset{\sim}{R}_{ij}\\ &=(W_{t_1},\ W_{t_2},\ \cdots,\ W_{t_r})\cdot\begin{bmatrix} r_{ij}^{(1)}\\ r_{ij}^{(2)}\\ \vdots\\ r_{ij}^{(r)}\end{bmatrix} \end{aligned}\tag{7-8-1}$$

再借助Fuzzy集理论中的综合评定概念，若已知$f_i$相应的隶属度向量$\underset{\sim}{R}_i=(r_{i_1},\ r_{i_2},\ \cdots,\ r_{i_m})$以及因素集的权数分配向量$\underset{\sim}{W}_F=(W_{f_1},\ W_{f_2},\ \cdots,\ W_{f_n})$，则综合评定向量$\underset{\sim}{S}$定义为

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{S}&=W_F\circ\underset{\sim}{R}\\ &=(W_{f_1},\ W_{f_2}\cdots W_{f_n})\circ\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12}\cdots r_{1m}\\ r_{21} & r_{22}\cdots r_{2m}\\ \cdots & \cdots\\ r_{n1} & r_{n2}\cdots r_{nm}\end{bmatrix}\\ &=(S_1,\ S_2,\cdots,S_m) \end{aligned}\tag{7-8-2}$$

这里，运算“$\circ$”可以有两种作法，一是模糊矩阵的合成运算；一是普通矩阵的乘法运算。

对于某个已确定的综合评定结果$\underset{\sim}{S}$，应按最大接近度的原则来判定等级，即进行综合判定。根据研究结果，具体规定如下：

（1）设$S_K=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}S_i$，计算出$\sum_{i=1}^{K-1}S_i$及$\sum_{i=K+1}^{m}S_i$。若此两个和数分别$<\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}S_i$，则按$S_K$所属评定等级评定；若$\sum_{i=1}^{K-1}S_i\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}S_i$（或$\sum_{i=K+1}^{m}S_i\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}S_i$），则按$S_{K-1}$（或$S_{K+1}$）所属评定等级评定。

（2）如果$\underset{\sim}{S}=(S_1,\ S_2,\ \cdots S_m)$中有$q$个$(q\leqslant m)$相等的最大数，则仍按规定1，分别先作移位计算，移位后的评定等级若仍然离散，则取移位后的中心等级评定；若中心等级有两个，则取权重的所在位置评定等级。

## 二、应 用 实 例

**例1** 设考核的因素集$F=\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$，评定集$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，考核集$T=\{t_1, t_2\}$，$t_1$为经常性考核；$t_2$为晋级考核。$\underset{\sim}{W}_F=(0.35, 0.35, 0.15, 0.15)$，$\underset{\sim}{W}_t=(0.6, 0.4)$。则根据被考人日常考核的统计记录以及晋级考核的成绩，可以进行全面的综合判定。

现假设甲、乙日常考核的统计记录和晋级考核分别有(a)，(b)，(c)三种可能的结果如表7-8-1所示：

晋 级 考 核 可 能 结 果　　　　表 7-8-1

| T | F | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | $f_1$ | 0.5 | 0.3 | | 0.2 |
| | $f_2$ | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| | $f_3$ | | 0.7 | 0.3 | |
| | $f_4$ | 0.6 | 0.1 | | 0.3 |
| $t_2$ | $f_1$ | 1 | | | |
| | $f_2$ | | 1 | | |
| | $f_3$ | 1 | | | |
| | $f_4$ | | 1 | | |

甲(a)

| T | F | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | $f_1$ | 0.5 | 0.3 | | 0.2 |
| | $f_2$ | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| | $f_3$ | | 0.7 | 0.3 | |
| | $f_4$ | 0.6 | 0.1 | | 0.3 |
| $t_2$ | $f_1$ | | | 1 | |
| | $f_2$ | | | | 1 |
| | $f_3$ | | | | 1 |
| | $f_4$ | | | | 1 |

甲(b)

| T | F | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | $f_1$ | 0.5 | 0.3 | | 0.2 |
| | $f_2$ | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| | $f_3$ | | 0.7 | 0.3 | |
| | $f_4$ | 0.6 | 0.3 | | 0.1 |
| $t_2$ | $f_1$ | 1 | | | |
| | $f_2$ | 1 | | | |
| | $f_3$ | 1 | | | |
| | $f_4$ | | 1 | | |

甲(c)

| T | F | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | $f_1$ | | 0.1 | 0.8 | 0.1 |
| | $f_2$ | | 0.1 | 0.7 | 0.2 |
| | $f_3$ | 0.1 | 0.6 | 0.3 | |
| | $f_4$ | | 0.1 | 0.6 | 0.3 |
| $t_2$ | $f_1$ | 1 | | | |
| | $f_2$ | | 1 | | |
| | $f_3$ | 1 | | | |
| | $f_4$ | | 1 | | |

乙(a)

| T | F | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | $f_1$ | | 0.1 | 0.8 | 0.1 |
| | $f_2$ | | 0.1 | 0.7 | 0.2 |
| | $f_3$ | 0.1 | 0.6 | 0.3 | |
| | $f_4$ | | 0.1 | 0.6 | 0.3 |
| $t_2$ | $f_1$ | | | 1 | |
| | $f_2$ | | | | 1 |
| | $f_3$ | | | | 1 |
| | $f_4$ | | | | 1 |

乙(b)

| T | F | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_1$ | $f_1$ | | 0.1 | 0.8 | 0.1 |
| | $f_2$ | | 0.1 | 0.7 | 0.2 |
| | $f_3$ | 0.1 | 0.6 | 0.3 | |
| | $f_4$ | | 0.1 | 0.6 | 0.3 |
| $t_2$ | $f_1$ | 1 | | | |
| | $f_2$ | 1 | | | |
| | $f_3$ | 1 | | | |
| | $f_4$ | | 1 | | |

乙(c)

先确定考核因素集内诸因素相应的隶属度，它具有矩阵的形式$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_{4\times4}$，其中矩阵元素为

$$r_{ij}=W_{t_1}\times r_{ij}^{(1)}+W_{t_2}\times r_{ij}^{(2)}$$

故有

$$\underset{\sim}{R}_{甲a}=\begin{bmatrix} 0.70 & 0.18 & 0 & 0.12 \\ 0.30 & 0.46 & 0.12 & 0.12 \\ 0.40 & 0.42 & 0.18 & 0 \\ 0.36 & 0.46 & 0 & 0.18 \end{bmatrix}$$

所以 $\underset{\sim}{S}_{\text{甲}a} = \underset{\sim}{W}_F \underset{\sim}{R}_{\text{甲}a}$

$$= (0.35 \quad 0.35 \quad 0.15 \quad 0.15)\begin{bmatrix} 0.70 & 0.18 & 0 & 0.12 \\ 0.30 & 0.46 & 0.12 & 0.12 \\ 0.40 & 0.42 & 0.18 & 0 \\ 0.36 & 0.46 & 0 & 0.18 \end{bmatrix}$$

$$= (\underline{0.464} \quad 0.356 \quad 0.069 \quad 0.111)$$

由表7-8-1中的甲($a$)可知，若按晋级考核一次判定，应定为$e_2$级；而按综合判定，其$\max S_i$值虽位于$e_1$级，但由于$\sum_{i=2}^{4} S_i = 0.536 > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i = 0.5$，故仍应定为$e_2$级。

同理对于甲($b$)的情况：

$$\underset{\sim}{S}_{\text{甲}b} = (0.264 \quad 0.156 \quad 0.209 \quad \underline{0.371})$$

若按晋级考核一次判定，应定为$e_4$级；而按综合判定，其$\max S_i$值虽然亦位于$e_4$级，但由于$\sum_{i=1}^{3} S_i = 0.629 > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i = 0.5$，故应改为$e_3$级。

同理对于甲($c$)的情况

$$\underset{\sim}{S}_{\text{甲}c} = (\underline{0.604} \quad 0.216 \quad 0.069 \quad 0.111)$$

按晋级考核判定和综合判定均应为$e_1$级。

对于乙($a$)的情况：

$\underset{\sim}{S}_{\text{乙}a} = \underset{\sim}{W}_F \underset{\sim}{R}_{\text{乙}a}$

$$= (0.35 \quad 0.35 \quad 0.15 \quad 0.15)\begin{bmatrix} 0.40 & 0.06 & 0.48 & 0.06 \\ 0.00 & 0.46 & 0.42 & 0.12 \\ 0.46 & 0.36 & 0.18 & 0.00 \\ 0.00 & 0.46 & 0.36 & 0.18 \end{bmatrix}$$

$$= (0.209 \quad 0.305 \quad \underline{0.396} \quad 0.09)$$

按晋级考核应定为$e_2$级；而按综合判定需左移一位，仍为$e_2$级。

类似有$\underset{\sim}{S}_{\text{乙}b} = (0.009 \quad 0.105 \quad \underline{0.536} \quad 0.350)$

按晋级考核应定为$e_4$级；而按综合判定应为$e_3$级。

类似有$\underset{\sim}{S}_{\text{乙}c} = (0.349 \quad 0.165 \quad \underline{0.396} \quad 0.090)$

按晋级考核应定为$e_1$级；而按综合判定应定$e_2$级。

本例说明，日常工作一贯表现较好的人员，即使晋级考核偶然失常，如甲($b$)，亦可上靠一级。对于日常工作很一般的人员，即使晋级考核偶获优胜，如乙($c$)，亦需下靠一级；但如果他的晋级考核亦完全失常，如乙($b$)，则也有可能上靠一级，这是比较合乎情理的。

这种模糊综合评判法，可推广到应用于班组之间的评比；车间与车间之间的评比；甚至厂际之间的评比。评定的结果比较全面、合理。

## §7-9 企业领导选拔中的多准则模糊决策[130]

1985年，冯刍运用模糊数学理论，考虑了组织行为和社会心理因素等软信息，对某企业被推荐的六名领导候选人建立一系列多准则模糊决策数学模式，并通过计算机进行数据处理，从而获得决策的最优解，即选拔出该企业最佳的主要领导人。

### 一、多准则模糊决策的数学模式

选拔企业主要领导，首先应按照党的干部标准，提出基本要求，组成因素集$F=\{F_i\}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ I$。

设$I=6$，即$F_1$——政策水平高；$F_2$——思想觉悟高；$F_3$——管理水平高；$F_4$——生产经验丰富；$F_5$——文化专业水平高；$F_6$——年富力强。

在选拔过程中，根据本企业的实际要求，规定两种极端情况，即所谓理想准则和不满意准则，然后在这两者之间，还有若干个折衷的准则。于是得到一个决策准则集$C=\{C_j\}$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ J$。例如选拔一个分管生产业务的厂长，提出了如下七个准则：

$C_1$——若候选人的政策水平高，管理水平也高且生产经验丰富，则认为是满意的。

$C_2$——若候选人的政策水平高，管理水平也高且文化专业水平也高，则也是满意的；

$C_3$——若候选人同时满足$C_1$、$C_2$条件则更满意；

$C_4$——若候选人除满足$C_3$外，他的思想觉悟也高，则认为是非常满意的；

$C_5$——若对于$C_4$条件除了生产经验不足外，候选人的文化、专业水平很高且又年富力强，则也是非常满意的；

$C_6$——如果六个条件全符合，则这样的候选人是理想的；

$C_7$——若候选人的管理水平差，或者年龄太大、身体很差，或者无生产经验又缺文化专业知识，则是不满意的。

于是有评价集$A=\{A_K\}$，$K=1,2,\cdots 5$；并相应定义评价函数$A_K(v)$；$A_1$——满意，且$A_1(v)=v$；$A_2$——更加满意，且$A_2(v)=v^{3/2}$；$A_3$——非常满意，且$A_3(v)=v^2$；

$A_4$——理想，且 $A_4(v)=\begin{cases}1 & v=1\\ 0 & v\neq 1\end{cases}$；$A_5$——不满意，且$A_5(v)=1-v$。其中$v\in V$，

$V=\{v_l\}=\{0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ \cdots,\ 0.9,\ 1\}$，$l=1,\ 2,\ \cdots,\ 11$。

这样，上述七个准则表达如下：

若$C_1=F_1$且$F_3$且$F_4$，则$A_1$；若$C_2=F_1$且$F_3$且$F_5$，则$A_1$；若$C_3=F_1$且$F_3$且$F_4$且$F_5$，则$A_2$；若$C_4=F_1$且$F_2$且$F_3$且$F_4$且$F_5$，则$A_3$；若$C_5=F_1$且$F_2$且$F_3$且$\overline{F_4}$且$H_2F_5$且$F_6$，则$A_3$；若$C_6=F_1$且$F_2$且$F_3$且$F_4$且$F_5$且$F_6$，则$A_4$；若$C_7=\overline{F_3}$或($\overline{F_4}$且$\overline{F_5}$)或$H_2\overline{F_6}$，则$A_5$。

此处$H_2$为语气集中化算子“很”。

以候选人的全体为论域$U=\{u_m\}$，$m=1,\ 2,\ \cdots,\ M$。根据多年工作情况的考察和群众的客观反映，对每个候选人作因素评价，得到从$F$到$U$的模拟关系矩阵

$$\underset{\sim}{R}=(r_{im})=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{R}_1\\ \underset{\sim}{R}_2\\ \vdots\\ \underset{\sim}{R}_6\end{bmatrix}$$

以$\underset{\sim}{R}$为输入，根据决策准则进行运算，得到$U$上的决策准则模糊子集$\underset{\sim}{C}_j$，并作如下模糊似然推理：

若$x=\underset{\sim}{C}_1=\underset{\sim}{R}_1\cap\underset{\sim}{R}_3\cap\underset{\sim}{R}_4$　　则$y=A_1$；

若$x=\underset{\sim}{C}_2=\underset{\sim}{R}_1\cap\underset{\sim}{R}_3\cap\underset{\sim}{R}_6$　　则$y=A_1$；

若$x=\underset{\sim}{C}_3=\underset{\sim}{R}_1\cap\underset{\sim}{R}_3\cap\underset{\sim}{R}_4\cap\underset{\sim}{R}_5$　　则$y=A_2$；

若$x=\underset{\sim}{C}_4=\underset{\sim}{R}_1\cap\underset{\sim}{R}_2\cap\underset{\sim}{R}_3\cap\underset{\sim}{R}_4\cap\underset{\sim}{R}_5'$　　则$y=A_3$；

若$x=\underset{\sim}{C}_5=\underset{\sim}{R}_1\cap\underset{\sim}{R}_2\cap\underset{\sim}{R}_3\cap\underset{\sim}{R}_4'\cap H_2\underset{\sim}{R}_5\cap\underset{\sim}{R}_6$　　则$y=A_3$

若$x=\underset{\sim}{C}_6=\underset{\sim}{R}_1\cap\underset{\sim}{R}_2\cap\underset{\sim}{R}_3\cap\underset{\sim}{R}_4\cap\underset{\sim}{R}_5\cap\underset{\sim}{R}_6$　　则$y=A_4$；

若$x=\underset{\sim}{C}_7=\underset{\sim}{R}_3'\cup(\underset{\sim}{R}_4'\cap\underset{\sim}{R}_5')\cup H_2\underset{\sim}{R}_6'$　　则$y=A_5$；

由此得到七个从$U$到$V$的模糊关系矩阵。

$$D_j=(d_j(m,\ l))$$

其中，$d_j(m,\ l)=1\wedge[1-C_j(u_m)+A_K(v_l)]$。

然后，七个准则进行综合，得到多准则模糊决策矩阵：

$$\underset{\sim}{D}=\bigcap_{j=1}\underset{\sim}{D}_j\triangleq(\prod_{j=1}d_j(m,l))=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{E}_1\\ \underset{\sim}{E}_2\\ \vdots\\ \underset{\sim}{E}_m\\ \vdots\\ \underset{\sim}{E}_M\end{bmatrix}$$

其中$\underset{\sim}{E}_m$是论域$V$上的一个模糊子集，它表示对候选人$u_m$的满意程度。为分别求出$M$个候选人总的“满意度”，定义

$$H(E_{\alpha,m})\triangleq\frac{1}{N_\alpha}\sum_{n=1}^{N_\alpha}Z_n(\alpha)$$

式中：$\alpha$——截集的水平；$E_{\alpha,m}$——$\underset{\sim}{E}_m$的$\alpha$截集；$Z_n(\alpha)\in E_{\alpha,m}$；$N_\alpha=|E_{\alpha,m}|$——有限集$E_{\alpha,m}$的势。最后得到“满意度”$G$

$$G(E_{\alpha,m})=\frac{1}{\alpha_{\max}}\sum_{i=1}^{11}H(E_{\alpha_i,m})\Delta d_i.$$

挑选$M$个候选人中“满意度”最大者，即为最佳人选。

## 二、计 算 实 例

设有某仪表厂，在企业改革中，欲选拔一名分管生产业务的厂长，现推荐了六名候选人，情况如下：

$u_1$——政策水平、管理水平和文化专业水平都相当高，思想觉悟比较高，生产经验比较丰富，但年龄相当大。相应得出单因素评价分别为：$F_1=0.8$，$F_2=0.7$，$F_3=0.8$，$F_4=0.7$，$F_5=0.8$，$F_6=0.1$；

$u_2$——政策水平极高且相当年轻，有较高的思想觉悟，文化专业水平和生产经验中等以上，管理水平中等，则单因素评价分别为：$F_1=1$，$F_2=0.7$，$F_3=0.5$，$F_4=0.6$，$F_5=0.6$，$F_6=0.9$；

$u_3$——文化专业水平全厂最高，有较高的思想觉悟和生产经验，且比较年富力强，政策水平中等，管理水平中等以上，则单因素评价分别为：$F=0.5$，$F_2=0.7$，$F_3=0.6$，$F_4=0.7$，$F_5=1$，$F_6=0.7$；

$u_4$——政策水平和思想觉悟都相当高，生产经验极为丰富，管理水平中等以下，而文化专业水平较差，年龄较大，则单因素评价分别为：$F_1=0.8$，$F_2=0.8$，$F_3=0.4$，$F_4=1$，$F_5=0.3$，$F_6=0.3$。

$u_5$——有很高的思想觉悟和相当丰富的生产经验，而且很年轻，政策水平和文化专业水平中等，管理水平中等以下，则单因素评价分别为：$F_1=0.5$，$F_2=1$，$F_3=0.4$，$F_4=0.8$，$F_5=0.5$，$F_6=0.8$；

$u_6$——最年轻，且有相当高的文化专业水平，管理水平较高，思想觉悟中等以上，政策水平和生产经验中等，则单因素评价分别为：$F_1=0.5$，$F_2=0.6$，$F_3=0.7$，$F_4=0.5$，$F_5=0.8$，$F_6=1$。

于是得到$F\sim\xrightarrow{\underset{\sim}{R}}U$：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.8 & 1 & 0.5 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.8 & 1 & 0.6\\ 0.8 & 0.5 & 0.6 & 0.4 & 0.4 & 0.7\\ 0.7 & 0.6 & 0.7 & 1 & 0.8 & 0.5\\ 0.8 & 0.6 & 1 & 0.3 & 0.5 & 0.8\\ 0.1 & 0.9 & 0.7 & 0.3 & 0.8 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{R}_1\\ \underset{\sim}{R}_2\\ \underset{\sim}{R}_3\\ \underset{\sim}{R}_4\\ \underset{\sim}{R}_5\\ \underset{\sim}{R}_6\end{bmatrix}$$

相应得到：

$\underset{\sim}{C}_1=\min\{\underset{\sim}{R}_1,\ \underset{\sim}{R}_3,\ \underset{\sim}{R}_4\}=\{0.7/u_1\ \ 0.5/u_2\ \ 0.5/u_3\ \ 0.4/u_4\ \ 0.4/u_5\ \ 0.5/u_6\}$

$\underset{\sim}{C}_2=\min\{\underset{\sim}{R}_1,\ \underset{\sim}{R}_3,\ \underset{\sim}{R}_5\}=\{0.8/u_1\ \ 0.5/u_2\ \ 0.5/u_3\ \ 0.3/u_4\ \ 0.4/u_5\ \ 0.5/u_6\}$

$\underset{\sim}{C}_3=\min\{\underset{\sim}{R}_1,\ \underset{\sim}{R}_3,\ \underset{\sim}{R}_4,\ \underset{\sim}{R}_5\}=\{0.7/u_1\ \ 0.5/u_2\ \ 0.5/u_3\ \ 0.3/u_4\ \ 0.4/u_4\ \ 0.5/u_5\}$

$\underset{\sim}{C}_4=\min\{\underset{\sim}{R}_1,\underset{\sim}{R}_2,\underset{\sim}{R}_3,\underset{\sim}{R}_4,\underset{\sim}{R}_5\}=\{0.7/u_1\ \ 0.5/u_2\ \ 0.5/u_3\ \ 0.3/u_4\ \ 0.4/u_5\ \ 0.5/u_6\}$

$\underset{\sim}{C}_5=\min\{\underset{\sim}{R}_1,\ \underset{\sim}{R}_2,\ \underset{\sim}{R}_3,\ (1-\underset{\sim}{R}_4),\ \underset{\sim}{R}_5^2,\ \underset{\sim}{R}_6\}=\{0.1/u_1\ \ 0.36/u_2\ \ 0.3/u_3\ \ 0/u_4$

$0.2/u_5\ \ 0.5/u_6\}$

$\underset{\sim}{C}_6=\min\{\underset{\sim}{R}_1,\ \underset{\sim}{R}_2,\ \underset{\sim}{R}_3,\ \underset{\sim}{R}_4,\ \underset{\sim}{R}_5,\ \underset{\sim}{R}_6\}=\{0.1/u_1\ \ 0.5/u_2\ \ 0.5/u_3\ \ 0.3/u_4\ \ 0.4/u_5$

$0.5/u_6\}$

$$\underset{\sim}{C}_7=\max\{(1-\underset{\sim}{R}_3),\min[(1-\underset{\sim}{R}_4),(1-\underset{\sim}{R}_5)],\ (1-\underset{\sim}{R}_6)^2\}$$

$$=\{0.81/u_1,\ 0.5/u_2,\ 0.4/u_3,\ 0.6/u_4,\ 0.6/u_5,\ 0.3/u_6\}。$$

由$d_j(m,\ l)=1\wedge[1-C_j(u_m)+A_K(v_l)$得到

$$\underset{\sim}{D}_1=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}_2=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}_3=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.33 & 0.39 & 0.46 & 0.55 & 0.65 & 0.76 & 0.89 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.53 & 0.59 & 0.66 & 0.75 & 0.85 & 0.96 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.53 & 0.59 & 0.66 & 0.75 & 0.85 & 0.96 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0.73 & 0.79 & 0.86 & 0.95 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.63 & 0.69 & 0.76 & 0.85 & 0.95 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.53 & 0.59 & 0.66 & 0.75 & 0.85 & 0.96 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}_4=\begin{bmatrix} 0.3 & 0.31 & 0.34 & 0.39 & 0.46 & 0.55 & 0.66 & 0.79 & 0.94 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.51 & 0.54 & 0.59 & 0.66 & 0.75 & 0.86 & 0.99 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.51 & 0.54 & 0.59 & 0.66 & 0.75 & 0.86 & 0.99 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0.71 & 0.74 & 0.79 & 0.86 & 0.95 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.6 & 0.61 & 0.64 & 0.69 & 0.76 & 0.85 & 0.96 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.51 & 0.54 & 0.59 & 0.66 & 0.75 & 0.86 & 0.99 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}_5=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.91 & 0.94 & 0.99 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.64 & 0.65 & 0.68 & 0.73 & 0.8 & 0.89 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.7 & 0.71 & 0.74 & 0.79 & 0.86 & 0.95 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.8 & 0.81 & 0.84 & 0.89 & 0.96 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.51 & 0.54 & 0.59 & 0.66 & 0.75 & 0.86 & 0.99 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}_6=\begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}_7=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.99 & 0.89 & 0.79 & 0.69 & 0.59 & 0.49 & 0.39 & 0.29 & 0.19 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 \end{bmatrix}$$

由 $\underset{\sim}{D}=(\prod_{j=1}^{7} d_j(m, l))$ 得到

$$\underset{\sim}{D}=\begin{bmatrix} 0.0044 & 0.0101 & 0.0222 & 0.0427 & 0.0756 & 0.1243 & 0.1916 & 0.2791 & 0.3299 & 0.2610 & 0.1900 \\ 0.0200 & 0.0316 & 0.0531 & 0.0910 & 0.1604 & 0.2837 & 0.3715 & 0.3960 & 0.3500 & 0.3000 & 0.5000 \\ 0.0219 & 0.0345 & 0.0598 & 0.0984 & 0.1724 & 0.3928 & 0.4128 & 0.4455 & 0.4000 & 0.3500 & 0.6000 \\ 0.1414 & 0.2032 & 0.2946 & 0.4280 & 0.5719 & 0.5985 & 0.5400 & 0.4900 & 0.4200 & 0.3500 & 0.4000 \\ 0.0622 & 0.0915 & 0.1424 & 0.2268 & 0.3721 & 0.4361 & 0.4608 & 0.4200 & 0.3600 & 0.3000 & 0.4000 \\ 0.0156 & 0.0248 & 0.0422 & 0.0735 & 0.1323 & 0.2391 & 0.3550 & 0.4901 & 0.4500 & 0.4000 & 0.7000 \end{bmatrix}$$

以 $u_1$ 为例，计算"满意度"，

$0<\alpha\leqslant 0.0044$　$E_{\alpha_1}=\{0, 0.1, \cdots, 1\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.5$, $\Delta\alpha=0.0044$

$0.0044<\alpha\leqslant 0.0101$　$E_{\alpha_1}=\{0.1, 0.2, \cdots, 1\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.55$　$\Delta\alpha=0.0057$

$0.0101<\alpha\leqslant 0.0222$　$E_{\alpha_1}=\{0.2, 0.3, \cdots, 1\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.6$　$\Delta\alpha=0.0121$

$0.0222\leqslant\alpha\leqslant 0.0427$　$E_{\alpha_1}=\{0.3, 0.4, \cdots, 1\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.65$　$\Delta\alpha=0.0205$

$0.0427<\alpha\leqslant 0.0756$　$E_{\alpha_1}=\{0.4, 0.5, 1\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.7$　$\Delta\alpha=0.0329$

$0.0756<\alpha\leqslant 0.1243$　$E_{\alpha_1}=\{0.5, 0.6, \cdots, 1\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.75$　$\Delta\alpha=0.0487$

$0.1043<\alpha\leqslant 0.19$　$E_{\alpha_1}=\{0.6, 0.7, \cdots, 1\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.8$　$\Delta\alpha=0.0657$

$0.19<\alpha\leq 0.1918$　$E_{\alpha_1}=\{0.6, 0.7\cdots, 0.9\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.75$　$\Delta\alpha=0.0018$

$0.1918<\alpha\leqslant 0.261$　$E_{\alpha_1}=\{0.7, 0.8, 0.9\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.80$　$\Delta\alpha=0.0692$

$0.261<\alpha\leqslant 0.2791$　$E_{\alpha_1}=\{0.7, 0.8\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.75$　$\Delta\alpha=0.0181$

$0.2791<\alpha\leqslant 0.3929$　$E_{\alpha_1}=\{0.8\}$　$\therefore H_1(\alpha)=0.80$　$\Delta\alpha=0.0508$

$$\therefore\ G(E_1)=\frac{1}{\alpha_{\max}}\Sigma H_1(\alpha)\Delta\alpha.$$

$$=\frac{1}{0.3299}(0.044\times 0.5+0.0057\times 0.55+0.0121\times 0.6+0.0205\times 0.65$$
$$+0.0329\times 0.7+0.0487\times 0.75+0.0657\times 0.8+0.018\times 0.75$$
$$+0.0692\times 0.8+0.0181\times 0.75+0.0508\times 0.8)=0.7547$$

同理可求得：

$G(E_2)=0.7761$；　$G(E_3)=0.7941$；　$G(E_4)=0.5495$；

$G(E_5)=0.6224$；　$G(E_6)=0.8308$。

最佳人选为$u_6$，依次为$u_3$，$u_2$，$u_1$，$u_5$，$u_4$。

## 三、结　语

（1）本方法的特点之一是客观性。本方法输入仅为单因素评价组成的矩阵$\underset{\sim}{R}$，而对“人”的单因素评价总可以做到比较切合实际。因此，这样的人事决策是客观的人事决策，它不致于过多地受到决策者主观意志的影响，因而增强了科学性，避免了主观随意性。

其特点之二是计算机化。本方法使得复杂的人事问题由传统的经验决策转化为科学决策，从而使电子计算机在该领域的应用成为现实。

（2）软信息多准则模糊决策是模糊数学应用于现代管理科学的成果之一，它不仅是多因素决策，而且是多准则决策，因此较之其他的模糊决策方法例如模糊多元决策（即模糊综合评判）更具有广泛的适应性。因而它不仅能求取人事决策的最优解，显然也能推广到求取其他的复杂软信息系统多准则决策的最优解。

# 第八章

## 模糊数学在现代化高等工程教育管理和科研管理中的应用

为了达到我国高等教育改革的战略目标，必须进行教育改革（即计划体制改革）；管理体制改革（就是在加强宏观指导和控制的前提下，扩大学校的自主权）；培养工作的改革（即要改革教育思想、内容和方法，培养德智体兼备的有开拓精神的人才）。因此，必须对高等工程教育实行现代化的科学管理。就是要用系统分析方法、模糊数学方法、计算机技术预测、规划各类专门人才的需求；合理分配大学教育投资，讲求智力投资效果；评估整个高等工业学校的办学水平，评估学科（专业）办学水平，评估教育质量，评估教师素质等。使高等工程教育的管理科学化、模型化、定量化、电脑化。

科学技术体制的改革也迫切要求实行科学技术管理的现代化。为此，我们用系统分析方法、模糊数学方法和计算机技术，预测、规划科学技术的发展；预测、规划研究所的发展方向；评估科技人才的素质；评估科技成果。使科技管理科学化、模型化、定量化，电脑化。

### §8-1　人才预测、规划中的模糊数学方法[133]

1984年，黄天任、张弘、徐爱新、葛明浩等介绍了用于专门人才预测和规划中的若干模糊数学方法。应用实践表明是可行的。

人才问题是一个复杂的社会问题。人才系统涉及面广，影响因素众多，且随时间不断演变，因而它是一个多目标，多变量的复杂的动态系统。并且，人才系统与外界环境存在着可渗透性，具有弹性的边界。因此，人才系统涉及的大量问题往往难以准确度量。

由于人才预测迄今尚无完善的方法可循，预测信息很不充分，且受政策影响较大，许多新的概念和方法尚有待于探索。所以，应当采用多途径、多方案、连续型反馈预测的体系，以提高预测结果的可靠性。

我们就北京市专门人才预测、规划中采用的模糊数学方法做一概要介绍。

#### 一、变量的辨识

根据高教部和北京市的要求，需提供以下预测数据：

（1）各行业专门人才数及其占总职工数的比例。

（2）各行业专业类的人数及比例。

（3）各专业的学历层次的比。

因此，在预测中可将它们作为预测指标的参量(简称预测变量)。经过调查、分析，得

到与预测变量相关的影响因子集，其元素有62个之多。其中，有些因子是相互独立的，也子一些相互关联的。为此，有必要对影响因子集的元素先进行分类。此外，在这些影响因子中，有的因子对预测变量的影响很大，数据稍加变动就会引起预测变量的很大变动；也有一些因子的影响较小，甚至可以忽略不计。这就需要深入分析，将影响因子进行排序，分清主次，剔除那些次要的影响因子。这样，既能减轻调查、统计和计算的工作量，而且可以抓住要害，突出问题的本质，以便将来对预测结果进行分析与评价。为此，我们采用模糊聚类分析，先对影响因子集进行聚类，然后采用模糊相拟优先比的方法，得到一个影响因子的序关系，这为选取主要影响因子提供了依据。

1.影响因子的分类

由影响因子的历史数据计算出相关系数，

$$r_{ij}^{(1)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_{ik}\cdot x_{jk}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_{ik}^{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}x_{jk}^{2}}},\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots 62)$$

但通常由于历史资料的缺少，故上述方法求出的相似系数的可靠性不高。为此，我们还采用主观评分法，即由专家根据评价指标，给出影响因子$a_i$与$a_1,\ \cdots,a_{i-1},a_{i+1}\cdots,a_{62}$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 62)$两两之间的相关程度向量：

$$r_i=(r_{i1}^{(2)},\ r_{i2}^{(2)},\ \cdots,\ r_{i,i-1}^{(2)},\ r_{i,i+1}^{(2)},\ \cdots r_{i62}^{(2)}),\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 62)$$

其中，$r_{ij}^{(2)}\leqslant 1$,取算术平均$r_{ij}=\frac{1}{2}[r_{ij}^{(1)}+r_{ij}^{(2)}]$，得到模糊相关矩阵

$$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})_{62\times 62}$$

一般来讲，$\underset{\sim}{R}$只满足反身性和对称性，不满足传递性，必须改造。计算出$\underset{\sim}{R}^2=\underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{R}^4=\underset{\sim}{R}^2\cdot\underset{\sim}{R}^2$，…，直至$\underset{\sim}{R}^{2n}=\underset{\sim}{R}^n\triangleq\underset{\sim}{R}^*$。$R^*$为模糊等价关系，选择适当的水平$\lambda$，将影响因子集分割为若干设有公共元素的等价类。本问题取$\lambda=0.7321$，则得

Ⅰ类：{国民经济总产值、高等教育经费占国民经济总产值比，…，历年科研投资}$=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{22}\}$；

Ⅱ类：{现有人口总数、人口的年龄分布，…高中文化普及率}$=\{a_{23},\ a_{24},\ \cdots,\ a_{46}\}$；

Ⅲ类：{引进技术项目数，技术革新项目数，…，潜在科学技术发展的影响}$=\{a_{47},\ a_{48},\ \cdots,\ a_{55}\}$；

Ⅳ类：{空气污染，水质污染，…}$=\{a_{56},\ a_{57},\ \cdots,\ a_{62}\}$。

Ⅰ类的因子集与经济有关，称为经济系统因子集，同样，称Ⅱ类为社会系统因子集，Ⅲ类为技术系统因子集，Ⅳ类为环境系统因子集。

2.影响因子的筛选

由1949～1982年历史数据如表8-1-1所示。

通过

$$S_{ij}=\frac{1}{33}\sum_{k=1}^{33}\frac{x_{jk}-\overline{x}_j}{a_{ik}-\overline{a}_i},\ \begin{pmatrix}i=1,\ 2,\ \cdots,\ 62\\ j=1,\ 2,\ 3\end{pmatrix}$$

**历 史 数 据** 表 8-1-1

| 因子 | 数据 | 1949 | 1950 | 1951 | ……… | 1980 | 1981 | 1982 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 影响因子 | $a_1$<br>$a_2$<br>⋮<br>$a_{61}$<br>$a_{62}$ | $a_{11}$<br>$a_{21}$<br>⋮<br>$a_{611}$<br>$a_{621}$ | $a_{12}$<br>$a_{22}$<br>⋮<br>$a_{612}$<br>$a_{622}$ | $a_{13}$<br>$a_{23}$<br>⋮<br>$a_{613}$<br>$a_{623}$ | ………<br>………<br>………<br>………<br>……… | $a_{131}$<br>$a_{231}$<br>⋮<br>$a_{6131}$<br>$a_{6231}$ | $a_{132}$<br>$a_{232}$<br>⋮<br>$a_{6132}$<br>$a_{6232}$ | $a_{133}$<br>$a_{233}$<br>⋮<br>$a_{6133}$<br>$a_{6233}$ |
| 预变测量 | $X_1$<br>$X_2$<br>$X_3$ | $x_{11}$<br>$x_{21}$<br>$x_{31}$ | $x_{12}$<br>$x_{22}$<br>$x_{32}$ | $x_{13}$<br>$x_{23}$<br>$x_{33}$ | ………<br>………<br>……… | $x_{131}$<br>$x_{231}$<br>$x_{331}$ | $x_{132}$<br>$x_{232}$<br>$x_{332}$ | $x_{133}$<br>$x_{233}$<br>$x_{333}$ |

计算出影响因子$i$对预测变量$j$的影响度。根据预测变量在人才系统中的重要 性，由专家咨询得到预测变量的权数分配（$a_1$，$a_2$，$a_3$），$\sum_{j=1}^{3} a_i = 1$，由

$$t_i = \sum_{j=1}^{3} a_j s_{ij} (i = 1, 2, \cdots, 62)$$

即得单一影响因子对预测变量的综合影响度。将$t_i$按大小顺序排列：

| 影响变量 | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | $a_{i3}$ | … | $a_{i61}$ | $a_{i62}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 综合影响度 | $t_1'$ | $t_2'$ | $t_3'$ | … | $t_{61}'$ | $t_{62}'$ |

即 $t_i' \geqslant t_j'$，（当$i<j$）

并作出影响因子对预测变量的综合影响之模糊优先比矩阵：

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{162} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{262} \\ & \cdots & \cdots & & \\ r_{621} & r_{622} & r_{623} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

式中：

$$r_{ij} = \begin{cases} t_j'/t_i' & i \leqslant j \\ 1 - t_i'/t_j' & i > j \end{cases}$$

适当选取$\lambda$，建立优先比矩阵：

$$R_\lambda = (r_{ij}')_{62 \times 62}$$

式中：
$$r_{ij}' = \begin{cases} 1 & r_{ij} \geqslant \lambda \\ 0 & r_{ij} < \lambda \end{cases}$$

即得到影响变量对预测变量综合影响的排序：

$$a_{ik1} > a_{ik2} > a_{ik3} > \cdots > a_{ik62}$$

然后，根据情况确定主要影响因子集$\{a_{ik_1} a_{ik_2} \cdots\}$。

在实际应用中，有时为了减少计算机的内存，首先按类进行优先排序（方法同上），然后采用交叉排序，直至满意为止。也就是从各类中选出最优影响因子Ⅰ$_1$，Ⅱ$_1$，Ⅲ$_1$，Ⅳ$_1$进行排序，若结果为Ⅱ$_1$>Ⅰ$_1$>Ⅲ$_1$>Ⅳ$_1$，则将Ⅰ$_1$，Ⅱ$_2$，Ⅲ$_1$和Ⅳ$_1$进行 排 序；若结果为Ⅰ$_1$>Ⅲ$_1$>Ⅱ$_2$>Ⅳ$_1$，则再将Ⅰ$_2$、Ⅲ$_1$、Ⅱ$_2$、Ⅳ$_1$进行排序，得Ⅰ$_2$>Ⅲ$_1$>Ⅱ$_2$>Ⅳ$_1$，如此反复，即可得影响因子的一个序关系：Ⅱ$_1$>Ⅰ$_1$>Ⅰ$_2$>…。

## 二、用状态转移的模糊判别进行专门人材的预测

由实际情况预测变量的影响因子：$a_2, a_3, \cdots, a_k$；而$a_1$为预测变量，如表8-1-2所示。

为使预测问题得到简化，可采用自然正交函数分解，把预测化为仅依赖于时间系数的问题。自然正交函数展开关系如下：

$$F_{n\times k} = T_{n\times q} \cdot N_{q\times k} \tag{8-1-1}$$

式中：$F_{n\times k}$——因子矩阵；$T_{n\times q}$——时间系数矩阵；$N_{q\times k}$——正交特征向量矩阵。

为了求得$T_{n\times q}$、$N_{q\times k}$，首先建立因子间的相关系数矩阵：

$$C_{k\times k} = (C_{ij})_{k\times k}$$

式中：

$$C_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot a_{kj}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2}}$$

求出$C_{k\times k}$的特征值的近似解，再根据自然正交函数的特征，可选取其中$q$个值的较大者：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$，并求出相应的经过标准化的特征向量：

$$\eta_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \cdots, \beta_{1k})$$

$$\eta_2 = (\beta_{21}, \beta_{22}, \cdots, \beta_{2k})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta_q = (\beta_{q1}, \beta_{q2}, \cdots, \beta_{qk})$$

预测变量数据　　表 8-1-2

| 年份 | 因 | 子 |
|---|---|---|
| | $a_1$　　$a_2$ | $a_3 \cdots a_k$ |
| $t_1$ | $a_{11}$　　$a_{12}$ | $a_{13} \cdots a_{1k}$ |
| $t_2$ | $a_{21}$　　$a_{22}$ | $a_{23} \cdots a_{2k}$ |
| ⋮ | ⋯ ⋯ | ⋯ ⋯ |
| $t_n$ | $a_{n1}$　　$a_{n2}$ | $a_{n3} \cdots a_{nk}$ |

由（8-1-1）式得到时间系数矩阵：

$$T_{n\times q} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_q \\ t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1q} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2q} \\ & \cdots & \cdots & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nq} \end{bmatrix}$$

及

$$d_1 = \sum_{i=1}^{q} T_i \beta_i$$

由于时间系数序列的非平稳性，故看成状态转移过程，即将$T_i, (i=1,2,\cdots,q)$分为$r$个状态，得到逐年的状态等级。

由于两种状态越相近，表明由各影响因子所确定的预测对象越近似，也就是两种状态的模糊关系越密切。其密切关系程度为

$$\underset{\sim}{D}^{i}(h,j) = \left[1 - \frac{|h-j|}{r-1}\right]^m$$

其中，$m$可选取适当值；$h$，$j$表示$T_i$（$i=1,2,\cdots,q$）的两种状态等级。

由于人才系统的相互关联性，为要得到相对可靠的预测结果，故考虑一阶、二阶、三阶的状态转移。

令

$$\underset{\sim}{D}_{ih}^{l} = \frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{r} \mu_j \cdot \underset{\sim}{D}^{i}(h,j), (l=1,2,3)$$

式中，$\underset{\sim}{D}_{ih}^{l}$表示$T_i$的$l$阶转移状态等级$h$的集中度；$\mu_j$表示前一时刻状态等级$j$转移到状态

等级 $h$ 的频数； $\mu=\sum_{j=1}^{r}\mu_j$。

取 $(\max\{\underset{\sim}{D}_{1k_1}^{i}, \underset{\sim}{D}_{1j_1}^{k}, \underset{\sim}{D}_{1i_1}^{k}\}\cdots, \max\{\underset{\sim}{D}_{ik_t}^{i}, \underset{\sim}{D}_{ij_t}^{i}, \underset{\sim}{D}_{ii_t}^{i}\})$则可确定各时间系数应转移的状态等级。由

$$\alpha_1=\sum_{i=1}^{t}\widetilde{T}_i\beta_{i1}$$

即得最后预测值。其中$\widetilde{T}_i$为时间系数$T_i$状态所在等级的区间中值。

## 三、用模糊关系方程求解人材的合理结构

1.设某指标的状态集为$E=\{e_1, e_2,\cdots, e_n\}$；考虑的专业类为$p=\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$，各专业的权数分配为$\underset{\sim}{W}=\{W_{p1}, W_{p2}, \cdots, W_{pn}\}$。

分别计算出指标状态和专业状态的隶属度$I_{e_j}$, $I_{ij}$,$(i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n)$,由此得到隶属度矩阵：

$$\underset{\sim}{I}=(I_{ij})_{m\times n}$$

$$\underset{\sim}{I}_e=(I_{e_1}, I_{e_2}, \cdots, I_{e_n})$$

由模糊关系方程：

$$\underset{\sim}{W}\circ\underset{\sim}{I}=\underset{\sim}{I}_e$$

求出该方程的解集$(W_{p1}^{(k)}, W_{p2}^{(k)}, \cdots, W_{pm}^{(k)})$, $(k=1,2,\cdots,q)$。利用模糊综合判定法，选出其中若干解，再应用贴近度计算出最优解，即得出结构的合适比。

2.由上述得到的结构合适比，求出相应的指标各状态$e_i=(i=1, 2, \cdots, m)$的隶属度，画出状态隶属度图形，选取适当的水平$\lambda$，计算出合适度：

$$\alpha=1-\frac{S_\lambda}{S_B}$$

式中：$S_\lambda$为状态隶属度图形中水平$\lambda$右侧的曲边梯形的面积；$S_B$为状态隶属度图形之曲边梯形全面积。

3.由国内外资料定出合理结构的合适度，与由2得到的$\alpha$值相比较，若后者较低，则可适当调整指标状态的隶属度，重复1、2的计算。如此循环，直到求得满足合适度要求的解，即为既照顾到以往的实际情况，又考虑到未来发展的动态的人才合理结构。

4.若考虑的指标为多个，则对于每个指标分别用上述办法得到合理比，再根据各指标的重要度进行线性加权，得到结构综合合理比。

如上得到的结构合理比与实际情况有一定的差异。因此，结构合理比实际上指出了人才结构的调整方向。又因为人才结构随经济、科技和社会发展的水平而异，故需进行连续型反馈预测，以便得到在不同历史条件下的合理结构。

对于学历层次和年龄结构，也可类似地进行。

## 四、协 调 决 策

由于人才系统采用多途径、多方案预测，故需对每一方案按评价指标进行综合评价。

首先对每一方案按评价指标给出满意度，由此得到等级的隶属度，再由评价指标的重要度给出评价指标的权数分配，最后利用综合判定法得到最优方案。

初步实践的结果表明，上述方法应用于具体行业的人才预测和规划之中基本可行。

## §8-2 灰色模型（GM）与人才预测[134]

1986年，易德生以我国自然科技人才历年的统计数字为依据，应用灰色系统理论，建立了我国自然科技人才需求的灰色模型，找出了自然科技人才需求发展变化的规律。按照建立的模型进行了长期预测，1984年和1985年的预测精度分别达99.6%和98.4%。还对预测结果进行了分析，得出了有实际意义的结论，为我国高等教育的改革与发展提供了信息。

为了搞好高等教育的调整和改革，实现高等教育培养计划的科学性，准确掌握科技人才需求量随经济结构发展所产生的新变化，必须科学地把握我国现代化建设目前和未来的客观实际与发展趋势，以及对高等教育的客观要求。要做到这一点，仅仅依靠以经验为基础的判断是不行的，必须运用科学的理论和方法进行科技人才需求的预测。

一个国家科技人才的需求量，是多种因素相互影响，相互促进的结果。这些因素及其关系，部分是已知的，部分是未知和不确知的。因此，我们试图运用灰色系统理论对科技人才需求进行预测和分析。

### 一、灰色模型（GM）的建立

灰色系统理论称抽象系统（社会、经济、技术…等系统）的逆过程（由行为到模型的过程）为灰色的逆过程，其获得的模型称为灰色模型（GREY, MODEL），简称GM模型。其建模步骤如下：

（1）一个$n$阶、$h$个变量的灰色模型，记为GM$(n,h)$。不同的$n$与$h$有不同的意义与用途，要求不同的数据。如果是作为预测模型，一般是用GM（$n$,1），即只考虑一个变量，而$n$一般在3阶以下。因$n$越大，计算量越大，计算时间越长，且精度不一定高，故通常取$n=1$。

因此，从预测的角度来建模，可以选定GM（1,1）模型。GM（1,1）代表一个白化形式的微分方程：

$$\frac{dX(1)}{dt}+aX^{(1)}=u$$

式中，$a$，$u$是需要通过建模来求得的参数；$X^{(1)}$是原始数据$X^{(0)}$的累加生成（AGO）值。

（2）将同一数据列的前$i$项元素累加后生成新数据列的第$i$项元素，这就是数据处理。用数式表示为：

$$X^{(1)}(i)=\sum_{m=1}^{i}X^{(0)}(m)$$

不直接采用原始数据$X^{(0)}$建模，而是将原始的、无规律的数据进行加工处理，使之变得较有规律，然后利用生成后的数据列来分析建模，这正是色灰系统理论的特点之一。灰色系统理论认为：客观系统无论怎样复杂，它都是关联的、有序的、有整体功能的。因

此，作为行为特征的数据总是隐含着某种规律的，对原始数据作处理、组合，就可挖掘和发现规律。

（3）对GM(1,1)，其数据矩阵$B$为

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[X^{(1)}(1)+X^{(1)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[X^{(1)}(2)+X^{(1)}(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[X^{(1)}(i-1)+X^{(1)}(i)] & 1 \end{bmatrix}$$

数阵向量$Y_N=[X^{(0)}(2),\ X^{(0)}(3),\ \cdots,\ X^{(0)}(i)]^T$

（4）作最小二乘计算，求参数$a$和$u$

$$\hat{a}=\begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY_N$$

（5）建立时间响应函数，求微分方程的解为

$$\hat{X}^{(1)}(t)=\left(X^{(1)}(0)-\frac{u}{a}\right)e^{-at}+\frac{u}{a}$$

（6）时间响应函数离散化，考虑到时间间隔即为：

$$\underbrace{X^{(0)}(1)\to X^{(0)}(2)}_{1}+\underbrace{\to X^{(0)}(3)}_{1}+\underbrace{\to X^{(0)}(4)}_{1}+\underbrace{\to X^{(0)}(5)}_{1}=4$$

即从$X^{(0)}(1)$到$X^{(0)}(5)$有4个时间间隔，在不将第1个数据$X^{(0)}(1)$改作第0个数据的前提下，应看作经过4个时间间隔到达$X^{(0)}(5)$，即经过$i-1$个时间间隔，到达$X^{(0)}(i)$，为此有：

$$\hat{X}^{(1)}(i)=\left(X^{(1)}(0)-\frac{u}{a}\right)e^{-a(i-1)}+\frac{u}{a}$$

显然，经过$i$个时间间隔就到达$X^{(0)}(i+1)$，则有

$$\hat{X}^{(1)}(i+1)=\left(X^{(1)}(0)-\frac{u}{a}\right)e^{-ai}+\frac{u}{a}$$

这就是要求的灰色模型。

## 二、人才需求的灰色模型

根据1984年《中国统计年鉴》所公布的数字，我国全民所有制单位自然科技人才的数量如表8-2-1所示。利用表中的原始数据列$X^{(0)}(i)$，按照上述步骤就可建立我国自然科技人才需求量的GM模型。

自然科技人才数量　　表8-2-1

| 序号 ($i$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 年份(年) | 1978 | 1979 | 1980 | 1981 | 1982 | 1983 |
| 人数(万人) | 434.5 | 470.5 | 527.6 | 571.4 | 626.4 | 686.2 |
| 符号$X^{(0)}(i)$ | $X^{(0)}(1)$ | $X^{(0)}(2)$ | $X^{(0)}(3)$ | $X^{(0)}(4)$ | $X^{(0)}(5)$ | $X^{(0)}(6)$ |

对$x^{(0)}(i)\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$作AGO处理，得$X^{(1)}(i)$，即：

$$i=1\quad X^{(1)}(1)=X^{(0)}(1)=434.5;$$
$$i=2\quad X^{(1)}(2)=X^{(1)}(1)+X^{(0)}(2)=905;$$
$$i=3\quad X^{(1)}(3)=X^{(1)}(2)+X^{(0)}(3)=1432.6;$$
$$i=4\quad X^{(1)}(4)=X^{(1)}(3)+X^{(0)}(4)=2004;$$
$$i=5\quad X^{(1)}(5)=X^{(1)}(4)+X^{(0)}(5)=2630.4;$$
$$i=6\quad X^{(1)}(6)=X^{(1)}(5)+X^{(0)}(6)=3315.6;$$

构造数据矩阵：

$$B=\begin{bmatrix}-669.75 & 1\\ -1168.8 & 1\\ -1718.3 & 1\\ -2317.2 & 1\\ -2973 & 1\end{bmatrix}$$

构造数阵向量：$Y_N=[470.5,\ 527.6,\ 571.4,\ 626.4,\ 685.2]^T$。

求模型参数：$\hat{d}=[a,u]^T=(B^TB)^{-1}B^TY_N=[-0.0916,414.0736]^T$，即$a=-0.0916$，$u=414.0736$，取$X^{(1)}(0)=X^{(0)}(1)=434.5$，将$a,u$值代入$\frac{dX^{(1)}}{dt}+aX^{(1)}=u$，和$\hat{X}^{(1)}(i+1)=\left(X^{(1)}(0)-\frac{u}{a}\right)e^{*i}+\frac{u}{a}$得

$$\frac{dX^{(1)}}{dt}-0.0916X^{(1)}=414.0736$$

$$\hat{X}^{(1)}(i+1)=4953.04815e^{0.09164}-4518.54815$$

这就是我国全民所有制单位自然科技人才需求量的灰色模型，也就是人才预测模型。按此模型计算得$X^{(1)}$的模型值如下：

$$i=1\text{时}\quad \hat{X}^{(1)}(2)=909.8377044$$
$$i=2\text{时}\quad \hat{X}^{(1)}(3)=1430.792961$$
$$i=3\text{时}\quad \hat{X}^{(1)}(4)=2001.743629$$
$$i=4\text{时}\quad \hat{X}^{(1)}(5)=2627.487703$$
$$i=5\text{时}\quad \hat{X}^{(1)}(6)=3313.283636$$

根据上述模型值$\hat{X}^{(1)}(i)$，$(i=2,\ 3,\ 4,5,6)$与实际值$X^{(1)}(i)$，$(i=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$可得出它们与$i$的关系曲线如图8-2-1所示。图中虚线为模型值，实线为实际值。

利用$\hat{X}^{(0)}(i)=\hat{X}^{(1)}(i)-\hat{X}^{(1)}(i-1)$，取$X^{(1)}(1)=X^{(0)}(1)=434.5$，还原数列，得$X^{(0)}$的模型值如下：$\hat{X}^{(0)}(2)=475,2377$；$\hat{X}^{(0)}(3)=520,9552$，$\hat{X}^{(0)}(4)=570,9507$；$\hat{X}^{(0)}(5)=625,7441$；$\hat{X}^{(0)}(6)=685,7959$。与前面表8-2-1所示的实际值$X^{(0)}(i)(i=2,\ 3,4,\ 5,\ 6)$可得出它们与$i$的关系曲线如图8-2-2所示。图中虚线为模型值，实线为实际值。

从图8-2-1和8-2-2所示的曲线可以看出，我国全民所有制单位自然科技人才发展变化的规律，是指数函数上升的规律。

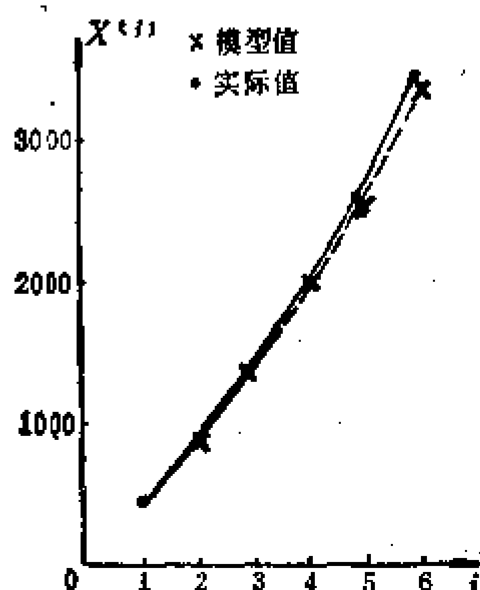



图 8-2-1　模型值及实际值与 i 的关系曲线

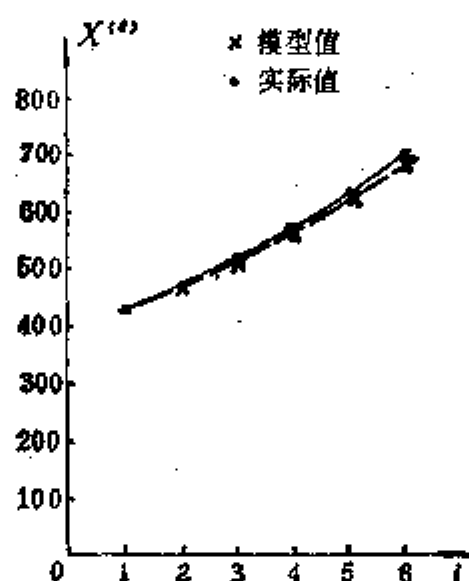



图 8-2-2　模型值及实际值与 i 的曲线关系

## 三、模型的检验

从图8-2-1和8-2-2所示曲线可看出，模型值与实际值几乎重合，说明模型的精度是较高的。为了更可靠起见，下面应用灰色系统理论中的后验差检验方法对模型进行检验。

根据残差公式：$e(i)=X^{(0)}(i)-\hat{X}^{(0)}(i)$ 取 $\hat{X}^{(0)}(1)=X^{(0)}(1)=434,5$，可得 $e(1)=0$，$e(2)=-4.8377$，$e(3)=6.6448$，$e(4)=0.4493$，$e(5)=0.6559$，$e(6)=-0.5959$。故残差的平均值 $\overline{e}=\frac{1}{6}[e(1)+e(2)+e(3)+e(4)+e(5)+e(6)]=0.386$

残差的方差为　$S_2^2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}[e(i)-\overline{e}]^2=11.274932$ 而实际数据的平均值为

$\overline{X}=\frac{1}{6}X^{(0)}(1)+X^{(0)}(2)+X^{(0)}(3)+\cdots+X^{(0)}(6)]=552.6$ 实际数据的方差为 $S_1^2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}[X^{(0)}(i)-\overline{X}]^2=7449.2766$，所以后验差比值为　$C=S_2/S_1=0.0389645$，

由于　　　$0.6745S_1=58.215549$，

所以　$|e(1)-\overline{e}|=0.386<0.6745S_1$　　$|e(2)-\overline{e}|=5.2237<0.6745S_1$

$|e(3)-\overline{e}|=7.0308<0.6745S_1$　　$|e(4)-\overline{e}|=0.8353<0.6745S_1$

$|e(5)-\overline{e}|=1.0419<0.6745S_1$　　$|e(6)-\overline{e}|=0.9819<0.6745S_1$

故小误差频率：$P=P\{|e(i)-\overline{e}|<0.6745S_1\}=1$

对照后验差检验指标 $C=0.0389045<0.35$，$P=1>0.95$，可以判断模型为一级精度"好"（灰色系统理论的后验差检验方法规定预测精度的等级为四级，即：好、合格、勉强、不合格），说明预测模型可信，预测值可用。

## 四、结果与分析

利用上面所得的人才需求的灰色模型进行计算，可得预测结果。

当 $i=6$ 时，计算得 $\hat{X}^{(1)}(7)=4062,904236$。所以，$\hat{X}^{(0)}(7)=\hat{X}(7)-\hat{X}^{(1)}(6)=$

749.6206，则预测的结果：1984年我国全民所有制单位自然科技人才的数量为749.62万人。

同理，当$i=7$时，计算得$\hat{X}^{(1)}(8)=4886.09176$。所以，$\hat{X}^{(0)}(8)=\hat{X}^{(1)}(8)-\hat{X}^{(1)}(7)=823.1876$，则预测结果：1985年我国全民制单位自然科技人才的数量为：823.18万人。其他年份仿此同样可得。从1984年到2000年的预测结果如表8-2-2所示：

1984～2000年预测结果　　表8-2-2

| 年份(年) | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 预测值万人 | 749.62 | 823.18 | 902.15 | 988.69 | 1083.53 | 1187.47 | 1301.38 | 1426.22 | 1563.03 |
| 年份(年) | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | |
| 预测值(万人) | 1712.97 | 1877.28 | 2057.37 | 2254.72 | 2471.01 | 2708.04 | 2967.82 | 3252.51 | |

（1）从表8-2-2看出，我国全民所有制单位自然科技人才的数量，1984年的预测值为749.62万人，根据1985年《中国统计摘要》所公布的数字，实际值为746.62万人，比较这两者，预测精度达99.6%；1985年的预测值为823.18万人，根据国家统计局《关于一九八五年国民经济和社会发展统计公报》所公布的数字，实际值为810万人，比较这两者，预测精度达98.4%。这两个结果，说明我们所建立的人才需求的灰色模型是正确的、符合实际的，利用该模型预测的数据是可信的。

（2）如果以1980年的527.6万人（见表8-2-7）为基数，则从表8-2-2可看出，用不着等到20年后的2000年，到1996年就可以实现自然科技人材翻两番。

（3）从预测结果看，科技人才要在数量上实现翻两番是可能的（只要按照上述模型所显示的正指数函数上升的规律正常发展）。不过，从现有科技人才的构成来看，在质量上还有较大差距，根据1984年《中国统计年鉴》公布的数字，在1983年的685.2万自然科技人才中，受高等教育的只有311.13万人，占总计的45.4%；受中等专业教育的275.95万人，占总计的40.3%；二者合计为85.7%。另外，在总数中，高级科技人才8.1万人，占总计的1.2%；中级科技人才135.04万人，占总计的19.7%；其余79.1%都是低级科技人才。象这样的结构比例关系显然适应不了现代建设的需要，适应不了新技术革命的挑战。因此，在提高全民文化水平的同时，也需努力提高科技人才的水平。如果要求所有的科技人才都受过高等教育，则高等学校毕业生供需之间的矛盾很大，如1983年高校毕业生为35.5万人，而自然科技人才需要增加的人数为58.8万人，不足25.3万人，约占43%；1984年高校毕业生人数为34.1万人，科技人才需要增加的人数为61.42万人，不足27.23万人，约占44%。况且随着时间的推移，科技人才的需要量按正指数函数上升，今后人才的需求量会越来越大，说明高校毕业生供不应求的现象十分突出。因此，必须积极稳步地发展高等教育，适当加快高等教育发展的速度和规模。另外，考虑到教育事业培养人的周期长这个特点（在正常情况下，培养一名大学生需15～16年），要实行教育先行的原则，即当前制定高等教育发展规划时，不仅要考虑八十年代经济发展对科技人才的需要，而且要考虑为九十年代的经济振兴作好人才准备。

（4）现在我国高校在校生200万人左右，如果要在10年内实现翻两番，则10年内要增加600万人（按此要求，10年后大学生总数800万人，占全国十亿人口的0.8%，而国外一般先进国家的这个比例都在10%以上，因此，这个指标是偏低的估计）。但增加600万在校生仅基建费和设备费两项投资至少也要1000亿元，经常费的增加还不在内。这样大的投资，我国经济是难以负担的。因此，还要大力提倡和鼓励社会各方面对高等教育投资，充分挖掘办学的潜力，广开办学门路。另外，办大学的形式也可以多种多样，采取多种层次、多种类型、多种方式发展高等教育：如电大、夜大，函大，刊大……等等，要不拘一格培养人才。

## 五、结　　论

（1）建立的预测模型正确，预测值可信；

（2）按正指数函数规律正常发展，自然科技人才，在2000年前，实现数量上翻两番是可行的。

（3）高校毕业生供不应求，必须适当加快高等教育的发展速度。

（4）发展高等教育，必须广开办学门路，采取多种层次、多种类型、多种方式。

## §8-3　大学教育投资分配的模糊递阶多目标决策模型和算法[135]

1986年，戴建设、邝硕根据1983年全国专门人才教育规划典型调查，研究了大学教育投资的最优分配问题。提出了一个模糊（Fuzzy）递阶多目标决策模型和一个时序递推状态预测模型。给出了综合求解这两种模型的三阶段算法。并用北京地区九所有代表性院校的调查数据进行计算，以说明模型与算法的应用。

### 一、教育投资的特性

要实现四个现代化宏伟目标，培养大批专门人才，必须开展教育投资效益及教育发展规划的研究。我国现有的各类全日制高等院校，分属中央各部委、省市主管，过去沿用"经验"的投资分配方式，使多方面的比例失调，影响了教育投资的经济效果。因此，有必要用系统工程方法对我国高等教育投资进行短、中、长期规划。

定量研究教育系统的主要困难在于：教育系统是一个多变量、多目标、多层次的复杂大系统。系统内部还包含一些界限不分明因素，很难建立系统有关方面的数学模型；同时，系统规模大，不易用一般优化方法解决。调查材料表明，高等学校投资分配同样存在这样的困难。教育经费从分配到使用，要经过国家预算机关、学校主管部门和学校多个层次。主管部门得到拨款后，部门决策人将根据自己的偏好和下属学校决策人对各种分配方案的态度来确定对各校的投资。部门决策人主要关心投资效果和各校间的比例发展，学校决策人的兴趣是如何扩大本校的人才培养能力和科研成果。两级决策人均面临多目标问题。这些目标不仅受师资、校舍、设备和经费等因素的影响，相互间还存在矛盾，有些因素还难于确切地定量描述。如投资效果的评价，教学设备对培养能力的约束程度等。调查分析还表明，在投资分配过程中，部门、学校决策人虽有各自的目标，但并不严格追求本单位所得，而是要达到一个大家都能接受的总体目标。决策人之间存在领导与被领导的关

系，学校决策人既有独立性，又有从属性，但他们之间并没有直接的关联。总之，若建立的数学模型能较好地反映分配系统的特征，该模型就会具有多目标、多层次和模糊性的特点。

我们把通常的确定型下级子系统为多目标但互不关联的情况推广到模糊环境，以1983年全国专门人才教育规划的典型调查材料为背景，从高等学校内部结构出发，提出一个模糊递阶多目标决策模型及一个时序递推状态预测模型。同时，把模糊数学规划与多级递阶理论的直接法和实际情况相结合，形成一种综合求解这两种模型的三阶段算法。最后，用北京地区代表九个科的典型院校的数据进行计算，以说明模型及算法的应用。

## 二、模糊递阶多目标决策模型的建立

为叙述方便，先给出确定型的子系统间无直接关联的多目标资源分配一般模型。设有$N+1$个决策人$DM0$，$DM1$，…，$DMN$。其中，$DM0$为上级决策人，$DM_i$，$i=1$，…，$N$为下级决策人。下级决策人之间不直接联系，信息只在$DM0$和$DM_i$之间交换。总资源为$u_0$，$DM0$的决策方案为$u=(u_1,\cdots u_N)^T$，$u_i$为分配给$DM_i$的资源。$DM_i$获得$u_i$之后，作出自己相应决策$x_i=(x_i^1,\cdots,x_i^{K_i})^T$。$x_i^j$，（$j=1,\cdots,K_i$）为$DM_i$的第$j$个决策变量。$DM0$的目标为$Q$，$Q$是$u$和$x_1^j,\cdots$，$x_N$的函数，记$x=(x_1^T,\cdots,x_N^T)^T$。则$Q=Q(u,x)$。

**定义 1** 称投资量$u^i$对$DM_i$是可行的。若至少存在一个与$u^i$相对应的对$DM_i$可行的决策$x_{i0}$，令$U_i$为$DM_i$一切可行投资的集，则$DM0$的决策集为$U=U_1\times\cdots\times U_N$；$X_i$为$DM$一切可行决策$X_i$的集；向量目标函数为$F_i(x_i)=(f_i^1(x_i),\ \cdots,\ f_i^{h_i}(x_i))^T$。$f_i^j(x_i)$，（$j=1,\cdots,h_i$）为第$j$个标量目标函数；向量约束函数为$G_i(x_i)=(g_i^1(x_i),\cdots,g_i^{m_i}(x_i))^T$。$g_i^l(x_i)$，（$l=1,\cdots,m_i$）为第$l$个标量约束函数。定义一个规划“$R$”，使任意$x_i$，$y_i\in X_i$，在$R$的意义下，或是$F_i(x_i)>F_i(y_i)$，或是$F_i(x_i)<F_i(y_i)$，或是$F_i(x_0)\approx F_i(y_i)$。至此，资源分配模型可表述为：

$$Q(\hat{u})=\max_{u\in U}Q(u,x)=\max_{u\in U}Q(u,\hat{x}_1(u_1),\cdots,\hat{x}_N(u_N))$$

$$\mathrm{S\cdot t\cdot}\sum_{i=1}^{N}u_i\leqslant u$$

$$\hat{u}=(\hat{u}_1,\ \cdots,\ \hat{u}_N)^T\in U$$

$$F_i(\hat{x}_i(u_i))=\max_{x_i\in X_i}F_i(x_i)$$

$$\mathrm{S\cdot t\cdot}g_i^l(x_i)\leqslant b_i^l(u_i)$$

$\hat{x}_i=(x_i^1,\ \cdots,\ x_i^{K_i})^T$。“$R$”下，$l=1,\cdots,m_i$；$i=1,\cdots,N$。

式中 $b_i^l(u_i)$为给定$u_i$时第$l$个约束的上界；$\hat{x}_i(u_i)$称为下级问题的有效决策。对多变量、多目标情况，$\hat{x}_i(u_i)$可能不唯一，由于$DM0$对$DM_i$的决策态度很了解，因而总可在$DM_i$的有效决策下考虑分配方案。

高等院校投资分配的总体模型与上述模型类似。下面把此模型推广到模糊环境。考虑到上级部门是以学校为单位分配经费的。为缩小问题的规模，假定：（1）校内各专业属同一专业大类，教师具有充分流动性；（2）校内的教学设备具有充分通用性；（3）只

有两种学制，本科生和研究生；（4）各种投资项目均在当年受益。

除指明者外，下文使用的符号和指标意义如下：

$S$——在校学生数；$T$——在校教师数；$H$——固定资产；$E$——可流储备量；$\alpha$——允许放宽量；$\beta$——按人平均系数；$a$——单位平均费用；$\sigma$——年折旧率；$\psi$——单位平均年维修费；$\xi$——自然延续率；$\varphi$——晋升率（专任教师晋升副教授以上）。

上（下）角标数字代表的意义是：

1——教学设备资产；2——附属用房面积；3——学生宿舍面积；4——教工宿舍面积；5——教学用房面积；6——专任教师；7——本科生；8——研究生；9——科研编制教师；10——教辅人员；11——指导研究生导师；12——教育费用。

$\underset{\sim}{\leq}$表示模糊约束关系；符号下的"～"为模糊量；符号上的*为最大愿望值；短划"—"为最低可接受值；"0"表示招新生前的值。例如，$x_i^1$为第$i$学校教学设备资产决策量；$\alpha_i^6$为第$i$学校专任教师允许放宽量；$\beta_{i7}^6$为第$i$学校本科生人均专任教师数；$a_{i2}$为单位附属用房面积造价。

1.下级模型——学校的模糊线性多目标决策模型

设在$\tau$学年度学校$i$分配到经费$u_i(\tau)$，令$U_i=\overline{(u_i,u_i^*)}$为学校$i$的有效投资域。

（1）$DM_i$的决策变量。学校主要考虑九个因素作为决策变量，即$x_i^1$，$x_i^2$，…，$x_i^9$，故有$x_i=(x_i^1,\cdots,x_i^9)^T$。$X=\{x_i,\ x_i^j\geq 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 9\}$。

（2）$DM_i$的目标。根据国家急需大量专门人才的现状和高校的办学方针，提出如下三个目标：1°，招本科生愈多愈好；2°，招研究生愈多愈好；3°，科研成果愈多愈好。目标函数分别记为$Z_{i_1}(x_i)$，$Z_{i_2}(x_i)$，$Z_{i_3}(x_i)$。但办学条件总有限，且目标间互有矛盾，故目标一般不可能同时达到最好值，只能获得一个使决策人感到"全局上满意"的方案。这就是语言化的目标。记$\Delta Z_{ij}=Z_{ij}^*-\overline{Z}_{ij}$，（$j=1,\ 2,\ 3$），为$DM_i$对$Z_{ij}$的允许偏差范围。

**定义 2** 模糊目标$\underset{\sim}{Z}_{ij}$，$j=1,2,3$为集$X_i$上的模糊子集，其特征由映射$\mu_{\underset{\sim}{Z}ij}: X_i\to[0,1]$描述，称$\mu_{\underset{\sim}{Z}ij}$为模糊目标$\underset{\sim}{Z}_{ij}$的隶属函数。对$\forall x_i\in X_i$，$\mu_{\underset{\sim}{Z}ij}$的值反映了$x_i$关于$\underset{\sim}{Z}_{ij}$接近理想方案的程度。

$\mu_{\underset{\sim}{Z}ij}$取如下线性形式：

$$\mu_{\underset{\sim}{Z}ij}(x_i)=\begin{cases}0 & Z_{ij}<\overline{Z}_{ij}\\ 1-\left(\dfrac{Z_{ij}^*-Z_{ij}(x_i)}{\Delta Z_{ij}}\right) & \overline{Z}_{ij}\leqslant Z_{ij}(x_i)<Z_{ij}^*\\ 1 & Z_{ij}\geqslant Z_{ij}^*\end{cases}$$

令$Z_{i1}(x_i)=x_i^7$，$Z_{i2}(x_i)=x_i^8$，$Z_{i3}(x_i)=e(\bar{x}_i^9+x_i^9)$，$e$为比例系数。不失一般性取$\overline{Z}_{i1}=\overline{Z}_{i2}=0$，$\overline{Z}_{i3}=e\bar{x}_i^9$，$Z_{i1}^*=x_i^7$，$Z_{i2}^*=\overset{*}{x}_i^8$，$Z_{i3}^*=e\cdot(\bar{x}_i^9+\overset{*}{x}_i^9)$，则得：

$$\mu_{Zij}(x_i)=\begin{cases}0 & x_i^{j+6}<0\\ x_i^{j+6}/x_i^{j+6} & 0\leqslant x_i^{j+6}<\overset{*}{x}_i^{j+6}\quad (j=1,2,3)\\ 1 & x_i^{j+6}\geqslant\overset{*}{x}_i^{j+6}\end{cases}\tag{8-3-1}$$

（3）$DM_i$的约束条件　可分两种类型。一是伸缩性较小或原始标准定得较低，在决策过程中必须满足的约束，如教学经费，生活住房等，称为严格约束；一是伸缩性较大或原始标准较保守，在决策过程中允许一定松动的约束，如教学设备，师生比等称为模糊约束。

模糊约束：

**定义 3**　模糊约束$\underset{\sim}{C}_{ij}$，（$j=1,2,6,11$），为集$X_i$上的模糊子集，其特征由$\mu_{\underset{\sim}{C}_{ij}}$：$X\to[0,1]$描述，称$\mu_{\underset{\sim}{C}_{ij}}(x_i)$为模糊约束$\underset{\sim}{C}_{ij}$的隶属函数。

$\underset{\sim}{C}_{i1}$：$\beta_{i7}^{1}x_i^7+\beta_{i8}^{1}x_i^8\lesssim E_i^1+x_i^1$

$\underset{\sim}{C}_{i2}$：$\beta_{i7}^{2}x_i^7+\beta_{i2}^{2}x_i^8+\beta_{i9}^{2}x_i^9\lesssim E_i^2+x_i^2$

$\underset{\sim}{C}_{i6}$：$\beta_{i7}^{6}x_i^7+\beta_{i8}^{6}x_i^8+\beta_{i9}^{6}x_i^9\lesssim E_i^6+x_i^6$

$\underset{\sim}{C}_{i11}$：$\beta_{i8}^{11}x_i^8+e_ix_i^9\lesssim E_i^1$

式中　$e$为指导教师在科研人员中的比重。记

$C_{i1}(x_i)=\beta_{i7}^{1}x_i^7+\beta_{i8}^{1}x_i^8-x_i^1$

$C_{i2}(x_i)=\beta_{i7}^{2}x_i^7+\beta_{i8}^{2}+\beta_{i9}^{2}x_i^9-x_i^2$

$C_{i6}(x_i)=\beta_{i7}^{6}x_i^7+\beta_{i8}^{6}x_i^8+x_i^9-x_i^6$

$C_{i11}(x_i)=\beta_{i8}^{11}+ex_i^9$

$C_{i1}^{*}=\overline{C}_{i1}+d_i^1=E_i^1+d_i^1$

$C_{i2}^{*}=\overline{C}_{i2}+d_i^2=E_i^2+d_i^2$

$C_{i6}^{*}=\overline{C}_{i6}+d_i^6=E_i^6+d_i^6$

$C_{i11}^{*}=\overline{C}_{i11}+d_i^{11}=E_i^{11}+d_i^{11}$

则$\underset{\sim}{C}_{ij}$的隶属函数为：

$$\mu_{\underset{\sim}{C}_{ij}}(x_i)=\begin{cases}0 & C_{ij}(x_i)>C_{ij}^{*}\\ C_{ij}^{*}-C_{ij}(x_i)/d_i^j & \overline{C}_{ij}<C_{ij}(x_i)\leqslant C_{ij}^{*}\\ 1 & C_{ij}(x_i)\leqslant\overline{C}_{ij}\quad j=1,2,6,11,\end{cases}\tag{8-3-2}$$

严格约束：

学生宿舍　$\beta_{i7}^{3}x_i^7+\beta_{i8}^{3}x_i^8\leqslant E_i^3+x_i^3$　（8-3-3$a$）

教师宿舍　$\beta_{i6}^{4}x_i^6\leqslant E_i^4+x_i^4$　（8-3-3$b$）

教学用房　$\beta_{i7}^{5}x_i^7+\beta_{i8}^{5}x_i^8\leqslant E_i^5+x_i^5$　（8-3-3$c$）

教师年龄结构　$x_i^6\leqslant\overset{*}{x}_i^6-\bar{x}_i^6$　（8-3-3$d$）

基建能力　$x_i^3+x_i^4+x_i^4+x_i^5\leqslant b_i$　（8-3-3$e$）

本科生规划人数　$x_i^7+S_{i7}^{0}\leqslant S_{i7}^{*}$　（8-3-3$f$）

研究生规划人数　$x_i^8+S_{i8}^{0}\leqslant S_{i8}^{*}$　（8-3-3$g$）

教育费用　$a_{i1}x_i^1+a_{i2}x_i^2+a_{i3}x_i^3+a_{i4}x_i^4+a_{i5}x_i^5+a_{i6}x_i^6+a_{i7}x_i^7+a_{i8}x_i^8$
$+a_{i10}\rho x_i^6\leqslant E_i^{12}+r\cdot q\,x_i^9$　（8-3-3$h$）

式中：$\rho$为专任教师对教辅人员的比例；$r$为科研纯收益提成率；$q$为科研人员人均

年科研纯收益；$b_i$表示年基建能力可完成最大面积。

将（8-2-3a）～（8-2-3h）式记为

$$A_i x_i \leqslant B_i(u_i) \tag{8-3-4}$$

（4）$DM_i$的模糊决策。

**定义 4** 模糊决策$\underset{\sim}{D_i}$为集$X_i$上的模糊子集，其特征由映射$\mu D_i: X \to [0, 1]$描述，称$\mu_{D_i}(x_i)$为模糊决策$\underset{\sim}{D_i}$的满意度函数。对$\forall x_i \in X_i$，$\mu_{D_i}(x_i)$的值反映了$DM_i$对方案$x_i$的满意程度。目前常见的模糊决策各有利弊，或决策态度过于保守，或对参数要求过高。针对大学情况，提出一种混合模糊决策。

$$\mu_{D_i}(x_i) = \left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\mu_{Zij}\right)\left(\wedge \bigwedge_{i=1}^{4} \mu_{Oij'}\right) \tag{8-3-5}$$

$$a_{ij} \geqslant 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 1。$$

综合以上各点，可得下级模型为：（下级模型）寻求$\hat{x}_i = (\hat{x}_i^1, \hat{x}_i^2, \cdots, \hat{x}_i^8)^T \in X_i$，使

$$\mu_{D_i}(\hat{x}_i(u_i)) = \max_{x_i \in X} \mu_{D_i}(x_i)$$

$$\text{S.t.} \quad A_i x_i \leqslant B_i(u_i)$$

此模型的解$\hat{x}_i$称为$DM_i$在投资$u_i$时的最满意决策方案。

2.上级模型——主管部门的模糊决策模型

鉴于难以找到一个确切的尺度来衡量各校的投资效益，部门决策人只期望相对各校情况达到一个“全局满意”的分配方案。

（1）决策变量。对学校$i$的投资$u_i$，设有$N$所学校，则决策向量为$u = (u_1, u_2, \cdots u_N)^T$。

（2）目标。$DMO$关心的是各校的投资效果。令$Q_i$为对学校的投资相对效益函数，则

$$Q_i = Q_i(u_i, \hat{x}_i(u_i))，\text{且有} \Delta Q_i = Q_i^* - \overline{Q_i}$$

**定义 5** $DMO$的模糊子目标$\underset{\sim}{g_i}$为集$U_i$上的一个模糊子集，其特征由映射$\mu_{g_i}: U_i \to [0, 1]$描述，称$\mu_{g_i}(u_i)$为模糊目标$\underset{\sim}{g_i}$的满意度函数。

对$\forall u_i \in U_i$，$\mu_{g_i}(u_i)$为学校$i$获得$u_i$且$DM_i$采取最满意决策时，$DMO$可望的投资效果最大满意度，即

$$\mu_{g_i}(u_i) \triangleq \max_{\hat{x}_i} \mu_{g_i}(u_i, \hat{x}_i(u_i))$$

若$\hat{x}_i(u_i)$唯一，则可记

$$\mu_{g_i}(u_i) = \mu_{g_i}(u_i, \hat{x}_i(u_i))$$

若$DMO$主要从招生人数来考察投资效益，可令

$$Q_i(u_i, \hat{x}_i(u_i)) = w_{i7}\hat{x}_i^7(u_i) + w_{i8}\hat{x}_i^8(u_i)$$

式中，$w_{i7}$，$w_{i8}$分别为本科生、研究生的平均效益简化系数。此系数是以某一“标准大学生”为效益基数的效益折算值，则得

$$\mu_{g_i}(u_i)=\begin{cases}0 & Q_i<\overline{Q}_i\\ 1-\left[\dfrac{Q_i^*-(w_{i7}\hat{x}_i^7(u_i)+w_{i8}\hat{x}_i^8(u_i))}{\Delta Q_i}\right] & \overline{Q}_i\leqslant Q_i<Q_i^*\\ 0 & Q_i\geqslant Q_i^*\end{cases}$$

**定义 6** 集$U$上的一个模糊子集$\underset{\sim}{G}$为$DMO$的模糊总体目标，其特征由映射$\mu_G: U\to[0,1]$描述，称$\mu_G(u)$为模糊总体目标$\underset{\sim}{G}$的满意度函数。

$$\mu_G(u)\triangleq\bigwedge_{i=1}^{N}[(\mu_{g_i}(u_i)]^{I_i}=\bigwedge_{i=1}^{N}\mu_{g_i}^{I_i}(u_i)$$

式中 $I_i$为非负实数，反映学校$i$对于$DMO$的重要程度，$I_i=\infty$为无限重要，$I_i=0$为完全不重要，$I_i=1$为中等重要；$I_i>(<)1$为超过（低于）中等重要。综合上述可得上级模型为：（上级模型）寻求$\hat{u}=(\hat{u}_1,\ \hat{u}_2,\ \cdots,\ \hat{u}_N)^T\in U$，使

$$\mu_G(\hat{u})=\max_{u\in U}[\bigwedge_{i=1}^{N}\mu_{g_i}^{I_i}(u_i,\ \hat{x}_i(u))]$$

$$S\cdot t\cdot\sum_{i=1}^{N}u_i\leqslant u_Q,\ u_i\in U_i\quad i=1,2,\cdots,N。$$

3.总体系统模型——模糊递阶多目标决策模型

综合上下级两模型即构成总体系统模型。递阶结构如图8-3-1所示。

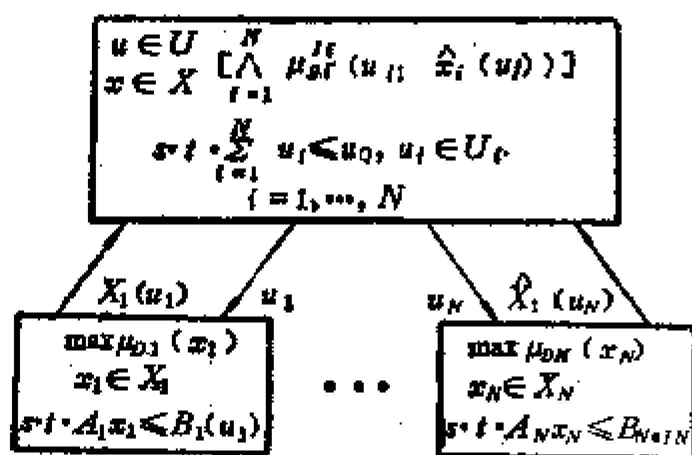



图 8-3-1 递阶结构

## 三、时序递推状态预测模型

本模型用于随后一段时期学校发展状况，培养能力和相应教育投资的预测，向决策人提供参考消息。考虑到教学投资风险小，一定时期内系统各种关系和参数相对稳定，从而提出一种确定性的时序递推模型。时间$\tau$以学年为单位。学校系统的主要状态，取如下变量：$S_{i7}(\tau)=(S_{i7}^1(\tau),\ \cdots,\ S_{i7}^{K_i}(\tau))^T$，$K_i$为本科生学制；$S_{i8}(\tau)=(S_{i8}^1(\tau),S_{i8}^2,\cdots,\ S_{i8}^{V_i}(\tau))^T$，$V_i$为研究生学制，$S'$的上标表示年级。$T_{it}(\tau)$，$t$表示专任教师；$T_{ip}(\tau)$，$p$表示副教授以上职称教师；$H_i^1(\tau)$，$H_i^2(\tau)$，$H_i^3(\tau)$，$H_i^4(\tau)$，$H_i^5(\tau)$。

（1）固定资产状态方程（各校相同，故略去下标）：

$$H^j(\tau)=\sigma^j(\tau)+H^j(\tau-1)+x^j(\tau),\quad j=1,2,\cdots,5。$$

（2）教师状态方程

$$T_t(\tau)=\zeta^t(\tau)T_t(\tau_1-1)+x^6(\tau)+\Xi^6$$

$$T_P(\tau)=\zeta^P(\tau)T_P(\tau_1-1)+\varphi(\tau)[T_t(\tau-1)-T_P(\tau-1)]$$

（3）学生状态方程：

$$S_7^1(\tau)=\gamma_{1,1}(\tau)S_7^1(\tau-1)+x^7(\tau)$$

$$S_7^m(\tau)=\gamma_{m,m-1}(\tau)S_7^{m-1}(\tau-1)+\gamma_{m,m}(\tau)S_7^m(\tau-1)\quad m=2,\cdots,K,$$

$$S_8^1(\tau)=\eta_{1,1}(\tau)S_8^1(\tau-1)+x^8(\tau)$$

$$S_8^n(\tau)=\eta_{n,n-1}(\tau)S_8^{n-1}(\tau-1)+\eta_{n,n}(\tau)S_8^n(\tau-1),\quad n=2,\cdots,V。$$

式中：$\gamma_{l,h}$为$h$年级本科生转为$l$年级的转移率；$\eta_{i,j}$为$j$年级研究生转为$i$年级的转移率。

（4）教育经费投资方程：

$$u_i(\tau)=F_i(\tau)+E_i^{12}-du_i(\tau-1),\quad i=1,\cdots,N。$$

式中：$du_i(\tau-1)$为上一年年终结余经费；$F(\tau)$为年度基本费用函数，指系统输入为零时学校所需的年教育经费，按如下公式计算：

$$F(\tau)=F_S(\tau)+F_T(\tau)+F_H(\tau)$$

$$F_S(\tau)=d_7(\tau)\left[\sum_{m=1}^{K-1}S_7^m(\tau-1)+\gamma_{K,K}(\tau)S_7^K(\tau-1)\right]$$

$$+a_8(\tau)\left[\sum_{n=1}^{V-1}S_8^n(\tau-1)+\eta_{v,v}(\tau)S_8^V(\tau-1)\right]$$

$$F_r(\tau)=a_6(\tau)[T_i(\tau-1)\xi^i(\tau)+\overline{X}^6-T_p(\tau-1)]$$

$$+a_{10}(\tau)\rho[T_i(\tau-1)\xi^i(\tau)+\bar{x}^6]+a_p(\tau)T_p(\tau)$$

$$F_H(\tau)=\sum_{j=1}^{5}\psi^j(\tau)\sigma^j(\tau)H^j(\tau-1)。$$

式中：$F_S$，$F_T$，$F_H$分别是学生、教职工、设备房产的费用；$a_P$为副教授以上人均年工资。

模型中各参数均在统计平均意义下获得。可取自统计报表的有关项目，或经过简单计算产生，有些数据要通过专家调查取得。

## 四、求解模型的三阶段算法

现给出一种综合求解决策模型和预测模型的模糊递阶算法。算法切合教育投资分配的真实过程，分预算、决策、结算三个阶段。各段分别对应于一个子算法，完成不同的功能。算法的实质是先将上下级模型分别“清晰化”，再用多级递阶理论中的直接法综合求解总体模型。

1.预算阶段

用模糊线性规划法解下级问题，由（8-3-5）式及模糊集运算定义，第$i$个子问题为：

$$\max\mu_{D_i}(x_i)=\max\left[\min\left(\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\mu_{Zij}(x_i),\mu_{Oi1}(x_i),\mu_{Oi2}(x_i),\mu_{Oi6}(x_i),\mu_{Oi11}(x_i)\right)\right]$$

令$\lambda_i=\min\left(\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\mu_{Zij}(x_i),\mu_{Oi1}(x_i),\mu_{Oi2}(x_i),\mu_{Oi6}(x_i),\mu_{Oi11}(x_i)\right)$

则必有

$$\lambda_i\leqslant\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\mu_{Zij}(x_i)\qquad(8\text{-}3\text{-}6a)$$

$$\lambda_i\leqslant\mu_{Oil}(x_i),\quad l=1,2,6,11\qquad(8\text{-}3\text{-}6b)$$

（8-3-6$a$）（8-3-6$b$）式至少有一式取等号。于是，下级问题等效如下“清晰”问题。

$\min\limits_{x_i\in X}\lambda_i$，$S\cdot t\cdot$（8-3-6$a$），（8-3-6$b$）以及（8-3-5）式，将（8-3-1），（8-3-2），（8-3-3）式代入（8-3-6$a$），（8-3-6$b$）式，并作适当等价变换，整理后得。

$$\max_{x_i\in X}\lambda_i$$

$$S\cdot t\cdot -\frac{a_{i1}}{\overset{*}{x_i^7}}x_i^7-\frac{a_{i2}}{\overset{*}{x_i^8}}x_i^8-\frac{a_{i3}}{\overset{*}{x_i^9}}x_i^9+\lambda_i\leqslant 0$$

$$-x_i^6+\beta_{i7}^6x_i^7+\beta_{i8}^6x_i^8+x_i^9+d_i^6\lambda_i\leqslant E_i^6+a_i^6$$

$$\beta_{i8}^{11}x_i^8 + \varepsilon x_i^9 + d_i^{11}\lambda_i \leqslant E_i^{11} + d_i^{11}$$

$$-x_i^1 + \beta_{i7}^1 x_i^7 + \beta_{i8}^1 x_i^8 + \beta_{i9}^2 x_i^9 + d_i^2\lambda_i \leqslant E_i^2 + d_i^2$$

$$-x_i^3 + \beta_{i7}^3 x_i^7 + \beta_{i8}^3 x_i^8 \leqslant E_i^3$$

$$-x_i^4 + \beta_{i6}^4 \leqslant E_i^4$$

$$-x_i^5 + \beta_{i7}^5 x_i^7 + \beta_{i8}^5 x_i^8 \leqslant E_i^5$$

$$a_{i1}x_i^1 + a_{i2}x_i^2 + a_{i3}x_i^3 + a_{i4}x_i^4 + a_{i5}x_i^5 + (a_{i6} - a_{i10})x_i^6 + a_{i7}x_i^7 + a_{i8}x_i^8 - rqx_i^9 \leqslant E_i^{12}$$

$$x_i^2 + x_i^3 + x_i^4 + x_i^7 \leqslant b_i$$

$$x_i^6 \leqslant \overset{*}{x}_i^6 - \bar{x}_i^6$$

$$x_i^7 \leqslant \overset{*}{S}_{i7} - S_{i7}^0$$

$$x_i^8 \leqslant \overset{*}{S}_{i8} - S_{i8}^0$$

$$\lambda_i \leqslant 1,\ \lambda_i \geqslant 0,\ x_i^j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, 9。$$

遍取$i = 1, 2, \cdots, N$，预算阶段的算法，将向部门决策人提供总投资上下限和各学校决策人对所有可行分配方案的决策态度。

2.决策阶段

用模糊动态规划算法解上级问题。上级的非线性问题可化为模糊动态规划问题。

定义 7　$f_i(u^f)$为将总投资$u^f$在学校$i$，$i+1$，…，$N$中进行分配且采用最有效策略时，$DMO$所得的投资效果最大满意度。

$f_i(u^f)$有如下递推关系：

$i = N$时，$f_N(u^f) = \max\limits_{u_N}\{\mu_{g_N}^f(u_N)\}$　　（8-3-7$a$）

S·t·　$u_N \leqslant u^f$，$u_N \in U_N$，　　一般地

$$f_i(u^f) \leqslant \max_{u_i}\{\mu_{g_i}^f(u_i) \wedge f_{i+1}(u^f - u_i)\} = \max_{u_i}\{\min(\mu_{g_i}^f(u_i), f_{i+1}(u^f - u_i))\} \quad (8\text{-}3\text{-}7b)$$

S·t·$u_i \leqslant u^f$，$u_i \in U_i$，$i = N-1$，$N-2$，…，2，1，

于是，求解上级问题等效于按照（8-3-7$a$），（8-3-7$b$）式给出的递推关系，计算$f_1(u_0)$。决策阶段算法适合决策人偏好的各种“合理”方案，由决策人比较选出“最满意”的方案。

3.结算阶段

决策人通过两级递阶直接法从上、下级模型获得“最满意”方案后，由时序递推状态预测模型可算出各校状态、师生比、招生人数、基建和设备等数据。

上述三阶段算法已编制了通用$FORTRAN$程序在计算机上实现。

## 五、计 算 实 例

在有关方面大力支持下，对北京九所典型院校的统计资料进行了收集、整理，用上述模型和算法，计算了1983～1990学年的逐年情况，得到一批对决策人有重要参考价值的数据。部分结果如图8-3-2及8-3-3所示。为把绝对数值相差很远的曲线描在同一图上，纵坐标以百分比表示。图中×为投资额；●为在校本科生数；▲为在校研究生数；图8-3-2为九所学校总数，图8-3-3为理工典型学校数。

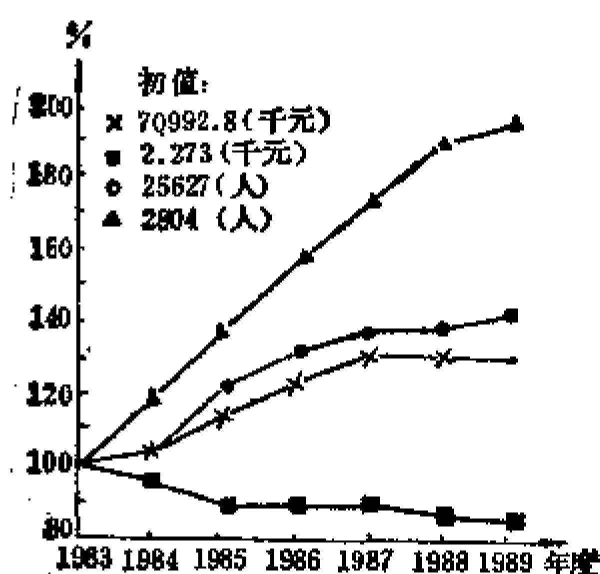



图 8-3-2　九所学校

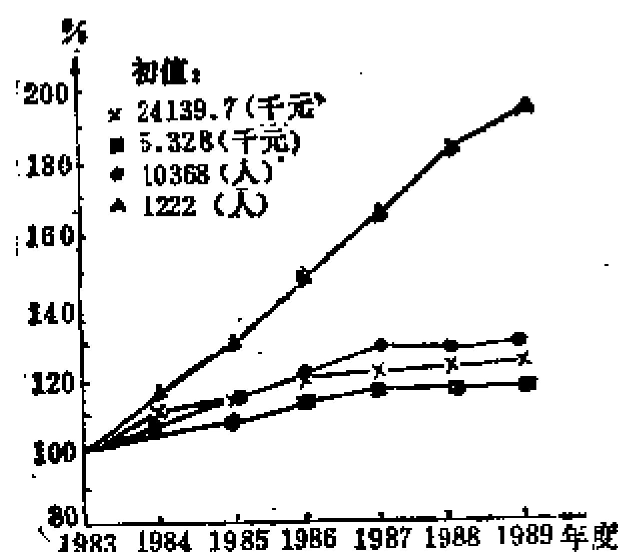



图 8-3-3　理工典型学校

## 六、结　　论

模糊递阶多目标决策模型有如下优点：

(1)模糊递阶结构，切合我国教育系统实际。所作假设考虑目前现状，因而可靠性高；

(2)适用性强，只须按各省市、部委归口计算，可覆盖全国高等院校；亦可用于大中专学校；

(3)可调性好。决策人可随时修改有关参数以适应不同的情况。

算法有如下优点：

(1)计算步骤意义明确，便于编制程序；

(2)两级优化技术，能实现与决策人对话，所得方案易被决策人接受；

(3)两级递阶直接法避免了收敛性困难，计算量小；

(4)能完成多种功能，给出多种参考数据。

但模型终属初建，约束只视为线性关系，更贴切描述需进一步探讨。预测部分忽略随机或模糊因素，对未来发展的应变只能调整参数。因而对决策人给出的预测信息的要求较高。

# §8-4　运用模糊集理论综合评价高校教师的素质[140]

1985年，冯保成运用模糊集理论对高等工业学校教师(教授、副教授、讲师、助教)的素质，提出了进行综合评价的指标体系，数学模型和算法，给出了应用实例。

## 一、高等学校教师素质综合评价特点

综合评价(或综合评判)又称多元决策，是系统工程的必要环节。高等院校教师(教授、副教授、讲师、助教)素质的综合评价属于社会人文系统工程的范畴，是一种复杂的系统。其特点一是存在许多相互影响的因素，各因素之间有的是并列关系，有的则是因果关系；二是随着系统复杂性的增加，描述系统的不确定性和不精确性也增加，即模糊性增加。对复杂的社会人文系统要作出任何一个决策，都必须对多个相关因素综合考虑，这就

是所谓的综合评价问题。由于系统的描述存在许多模糊性的概念，用模糊数学对人脑评价事物的思维过程进行模拟，从而形成模糊集合理论的综合评价方法。

本文将首先确定高等学校教师应具备的素质，进而建立素质指标体系，而后再建立综合评价的数学模型（多层次多算子二型模糊数学模型）；最后用实例论述高校教师素质综合评价的数学化定量化。

## 二、高校教师应具备的素质及指标体系

为了适应我国社会主义现代化建设的需求，适应世界新的科学技术革命形势发展的需要，“教育要面向现代化、面向世界，面向未来”。“要多出人才，快出人才，出好人才，要多出成果，快出成果，出好成果。”高等院校的教师应具备的素质应该从这一高度来考察。所以，高校教师应该努力学习和掌握比较渊博的知识；认真研究掌握教育科学，懂得教育规律；有高尚的道德品质和崇高的精神境界，能为人师表。这些就是确定高等院校教师应具备哪些素质的主导思想和主要原则。

国家教育委员会《关于当前执行国务院‘关于高等学校教师职务名称及其确定与提升办法的暂行规定’的实施意见》，以及各类“教师工作规范”和“教学工作细则”等文件，则是我们确定高等院校教师应具备哪些素质的主要依据。

根据上述主导思想、主要原则和依据，以及“模糊矩阵”的要求，确定教师素质的指标体系如下：讲师应具备的素质如表8-4-1，副教授应具备的素质如表8-4-2，助教应具备的素质如表8-4-3，教授应具备的素质如表8-4-4。

讲师应具备的素质　　　　表8-4-1

| 内容与权重 / 素质方面 | 素质类别 | 素质的详细项目 | 模糊关系矩阵 很优 | 优秀 | 良好 | 中等 | 及格 | 差 | 很差 | 素质项目权重 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 政治素质 15% | 政治立场 40% | 1.热爱党，热爱祖国，热爱社会主义制度 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 30% |
| | | 2.拥护党的路线、方针、政策、与党中央保持一致 | 0 | 1 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 40% |
| | | 3.走社会主义道路 | 0 | 1 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30% |
| | 政治观点 30% | 4.信仰马列主义，毛泽东思想 | 0 | 3 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 40% |
| | | 5.用辨证唯物主义观点，观察分析事物 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 40% |
| | | 6.遵守党纪国法，崇尚无产阶级民主和自由 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20% |
| | 政治品德 30% | 7.对党忠诚、老实 | 0 | 3 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 25% |
| | | 8.忠诚党的教育事业，认真贯彻党的教育方针，事业心强 | 0 | 4 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 50% |
| | | 9.政治上要求进步 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 25% |
| 思想素质 15% | 人生观 30% | 10.全心全意为人民服务的思想 | 0 | 2 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 20% |
| | | 11.“振兴中华”“干四化”的雄心壮志 | 0 | 2 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20% |
| | | 12.革新革故，迎难而上 | 0 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 0 | 30% |
| | | 13.服从工作需要，积极承当任务，认真完成本职工作 | 0 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 30% |
| | 精神面貌 30% | 14.朝气勃勃，兢兢业业，谦虚谨慎 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20% |
| | | 15.爱护学生，教书育人，为人师表 | 0 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 40% |
| | | 16.团结老师、实验员，合作共事 | 0 | 1 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 20% |
| | | 17.“五讲四美”崇高的思想境界 | 0 | 1 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 20% |

续表

| 内容与权重 素质方面 | 素质类别 | 素质的详细项目 | 模糊关系矩阵 | | | | | | | 素质项目 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 很优 | 优秀 | 良好 | 中等 | 及格 | 差 | 很差 | 权重 |
| 思想素质 15% | 思想方法 20% | 18.实事求是 | 0 | 1 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 30% |
| | | 19.严谨，进取，创新的教风 | 0 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 30% |
| | | 20.尊重权威，不迷信权威，敢于探索追究 | 0 | 0 | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 30% |
| | | 21.不主观，不片面 | 0 | 0 | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 10% |
| | 思想品德 20% | 22.作风正派，品行端正，道德品质高尚。 | 0 | 1 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 40% |
| | | 23.开展批评与自我批评 | 0 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 20% |
| | | 24.遵守校纪校规 | 0 | 0 | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 20% |
| | | 25.防微杜渐，严格要求自己 | 0 | 0 | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 20% |
| 业务素质 50% | 掌握本学科现代科学技术理论知识的能力35% | 26.掌握较广博坚实的现代科学理论 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 30% |
| | | 27.掌握较系统的专业理论 | 0 | 1 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 30% |
| | | 28.懂得些“文、哲、史”“经、技、管”知识 | 0 | 1 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 10% |
| | | 29.至少一门外语能顺利阅读和翻译文献，至少每年发表一篇译文 | 0 | 2 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30% |
| | 实际动手能力15% | 30.迅速掌握文献资料、信息的能力 | 0 | 2 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 20% |
| | | 31.掌握电子计算机，编制程序设计的能力 | 0 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 0 | 30% |
| | | 32.规划筹建掌握实验室实验，测试技术的能力 | 0 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 25% |
| | | 33.进行现场试验，测试技术的能力 | 0 | 0 | 3 | 3 | 2 | 0 | 0 | 25% |
| | 教学能力与水平 25% | 34.既搞教学又搞科研，以教学为主，每学年少至完成教学工作量1120学时 | 0 | 1 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 20% |
| | | 35.每年独立完整地承担一门以上课程的讲授工作，专业教师还要指导学生生产实习，课程设计，毕业设计(论文)，教学效果良好 | 0 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 30% |
| | | 36.研究掌握高等教育科学，教育心理学，懂得高等教育规律 | 0 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 0 | 20% |
| | | 37.指引学生学好知识，开发学生的智力和创造能力。协助指导研究生或进修教师，指导青年教师成长 | 0 | 0 | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 30% |
| | 科研能力与水平 25% | 38.独立进行科学研究的能力 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 25% |
| | | 39.能在研究方向上进入学科前沿或边缘学科进行开拓性研究的能力 | 0 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 30% |
| | | 40.每两年至少正式发表一篇学术论文或完成一项科研成果，对在教材建设，实验室建设及教学法研究中作出显著成绩的，也算科研 | 0 | 1 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 30% |
| | | 41.善于组织科研协作，管理，交际的能力 | 0 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 0 | 15% |
| 身体素质 20% | 身体健康状况 30% | 42.年龄28～50岁 | 0 | 3 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 30% |
| | | 43.体魄健全 | 0 | 3 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20% |
| | | 44.健康状况良好 | 0 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 50% |
| | 体力强度 30% | 45.锻炼身体，持之以恒 | 0 | 3 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 50% |
| | | 46.能适应实验室试验和现场试验的劳动负荷 | 0 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 25% |
| | | 47.能正确掌握生理，心理活动状况 | 0 | 0 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 25% |
| | 智力强度 40% | 48.记忆力较强 | 0 | 2 | 4 | 2 | 0 | 0 | 0 | 30% |
| | | 49.精力较旺盛，充沛 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 30% |
| | | 50.能高效率持续地工作 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 40% |

副教授应具备的素质（政治素质，思想素质，身体素质基本上与讲师相同） 表 8-4-2

| 素质方面 \ 内容与权重 | 素质类别 | 素质的详细项目 | 很优 | 优秀 | 良好 | 中等 | 及格 | 差 | 很差 | 素质项目权重 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 业务素质 50% | 掌握本学科现代科学技术理论知识的能力35% | 26.掌握较广博坚实的现代科学理论 | | | | | | | | 30% |
| | | 27.掌握较系统渊博的专业理论，实践经验较丰富 | | | | | | | | 30% |
| | | 28.懂得些"文、哲、史"，"经、技、管"知识 | | | | | | | | 10% |
| | | 29.较熟练地掌握至少一门外语，了解本专业国内外发展趋向 | | | | | | | | 30% |
| | 实际动手能力 15% | 30.迅速掌握文献资料、信息的能力 | | | | | | | | 20% |
| | | 31.掌握电子计算机技术，编制程序设计，计算机模拟的能力 | | | | | | | | 30% |
| | | 32.指导实验室建设，每二～三年设计一项新的实验或研制一套实验装置的能力 | | | | | | | | 25% |
| | | 33.指导现场试验，测试技术的能力 | | | | | | | | 25% |
| | 教学能力与水平 25% | 34.每年至少完成1120小时教学工作量，学术水平较高，教学效果优良 | | | | | | | | 20% |
| | | 35.每年独立完整地担任一门以上课程的讲授，每三年开出一门进修课或专业基础课，每一至二年指导一届毕业论文，毕业设计 | | | | | | | | 30% |
| | | 36.研究掌握高等教育科学，教育心理学，懂得高等教育规律 | | | | | | | | 20% |
| | | 37.指导研究生或进修教师。每两年至少要指导两名研究生，指引研究生进入学科的前沿，发挥创造思维能力 | | | | | | | | 30% |
| | 科研能力与水平 25% | 38.承担并直接参加国家重点科研项目，或有重大意义的基础理论研究或较大经济效益的应用研究 | | | | | | | | 25% |
| | | 39.在研究方向上进入学科前沿，或边缘学科进行开拓性研究的能力，能承担本学科的学术带头人的任务 | | | | | | | | 30% |
| | | 40.每两年发表一篇与自己职称相称的论文；主持或参加新教材，专著，论文的编写或审议，教学法研究，成绩卓著 | | | | | | | | 30% |
| | | 41.主持组织科研协作和科研管理，进行国内外科学技术咨询工作 | | | | | | | | 15% |

助教应具备的素质（政治素质，思想素质，身体素质基本上与讲师相同） 表 8-4-3

| 素质方面 \ 内容与权重 | 素质类别 | 素质的详细项目 | 很优 | 优秀 | 良好 | 中等 | 及格 | 差 | 很差 | 素质项目的权重 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 业务素质 50% | 掌握本学科现代科学技术理论知识的能力35% | 26.掌握一定的现代科学理论知识 | | | | | | | | 30% |
| | | 27.掌握较好的专业理论知识 | | | | | | | | 30% |
| | | 28.学习些"文、哲、史" "经、技、管" 知识 | | | | | | | | 10% |
| | | 29.至少在助教期间在院校"译丛"发表一至二篇专业译文 | | | | | | | | 30% |
| | 实际动手能力 15% | 30.学习和掌握文献资料、信息的能力 | | | | | | | | 20% |
| | | 31.学习电子计算机技术，编制程序设计 | | | | | | | | 30% |
| | | 32.锻炼实验室试验，测试技术的能力，有一年从事实验室工作 | | | | | | | | 25% |
| | | 33.锻炼现场试验，测试技术的能力 | | | | | | | | 25% |
| | 教学能力与水平 25% | 34.每年完成教学工作量不少于1400小时，教学效果较好 | | | | | | | | 20% |
| | | 35.独立完整地担任一门以上课程的辅导答疑，课堂讨论习题课、实验课和指导学生学习。协作指导毕业设计(论文) | | | | | | | | 30% |
| | | 36.学习高等教育科学，教育心理学，懂得一些教育规律 | | | | | | | | 20% |
| | | 37.指引学生学好理论知识，开发学生的智力和创造能力 | | | | | | | | 30% |

续表

| 素质方面 \ 内容与权重 | 素质类别 | 素质的详细项目 | 模糊关系矩阵 很优 | 优秀 | 良好 | 中等 | 及格 | 差 | 很差 | 素质项目的权重 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 业务素质 50% | 科研能力与水平 25% | 38.培养和锻炼独立进行科研的能力 | | | | | | | | 25% |
| | | 39.在讲师以上教师的指导下，培养和锻炼进入学科的前沿或边缘学科的能力 | | | | | | | | 30% |
| | | 40.协助开展科研，每年写出一二篇实验报告或一篇论文 | | | | | | | | 30% |
| | | 41.学习和锻炼组织科研协作，交际的能力 | | | | | | | | 15% |

教授应具备的素质（政治素质，思想素质，身体素质基本与讲师相同）　　表 8-4-4

| 素质方面 \ 内容与权重 | 素质类别 | 素质的详细项目 | 模糊关系矩阵 很优 | 优秀 | 良好 | 中等 | 及格 | 差 | 很差 | 因素的权重分配 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 业务素质 50% | 掌握本学科现代科学技术理论知识的能力35% | 26.掌握广博坚实的科学技术理论 | | | | | | | | 30% |
| | | 27.掌握系统且渊博的专业理论，实践经验丰富 | | | | | | | | 30% |
| | | 28.较深入的懂得"文、哲、史""经、技、管"知识 | | | | | | | | 10% |
| | | 29.熟练地掌握至少一门外语，了解和掌握本专业的国内外发展趋向 | | | | | | | | 30% |
| | 实际动手能力 15% | 30.全面迅速掌握文献、资料信息的能力 | | | | | | | | 20% |
| | | 31.掌握电子计算机技术，编制程序设计，计算机模拟能力 | | | | | | | | 30% |
| | | 32.指导实验室建设，每二～三年设计一项新的实验或研制一套实验装置的能力 | | | | | | | | 25% |
| | | 33.指导现场试验，测试技术的能力 | | | | | | | | 25% |
| 业务素质 50% | 教学能力与水平 25% | 34.每年至少完成1120学时教学工作量，教学质量高 | | | | | | | | 20% |
| | | 35.能胜任并指导两门以上课程(其中一门基础课或专业基础课，新的选修课)，教学内容反映现代科学最新成就，教学工作成绩卓著 | | | | | | | | 30% |
| | | 36.研究掌握高等教育科学，教育心理学，懂得高等教育规律 | | | | | | | | 20% |
| | | 37.指导研究生或讲师以上的教师，或指导博士研究生，指导研究生掌握科学的前沿，发挥创造思维能力 | | | | | | | | 30% |
| | 科研能力与水平 25% | 38.承担并直接参加国家重点科研项目或重大意义的基础理论研究，或重大经济效益的应用研究 | | | | | | | | 25% |
| | | 39.掌握研究方向上的学科前沿或边缘学科，进行开拓性的研究，承担学科带头人的任务 | | | | | | | | 30% |
| | | 40.取得本学科具有创见的科学著作或有重大发明、重大科研成果，或在教材编写、教学法研究等方面成绩卓著 | | | | | | | | 30% |
| | | 41.主持组织科研协作，管理，进行国内外科学技术咨询 | | | | | | | | 15% |

## 三、多层次多算子二型模糊综合评价数学模型及计算实例

高校讲师素质的4个方面，14个类型，50项详细项目以及相应的权重分配如表8-4-1。

使用模糊分析算子$M(\cdot, \oplus)$，称为加权平均型，它对所有因素依权重的大小均衡兼顾，比较适用于要求整体指标优化的情况。

运用多层次多算子二型模糊数学模型进行综合评价。专家评审小组为8人。

1.初级层次的综合评判计算。

1）政治素质中的"政治立场"素质的综合评判计算

（1）因素评价的权数分配$\underset{\sim}{A}_1$如表8-4-1为(0.3，0.4，0.3)。

（2）模糊关系矩阵$\underset{\sim}{R}_1$：评审专家8人，对某讲师评定如表8-4-5。

对某讲师的专家评审　　表8-4-5

| $V_{i1}$ 因素 | $U_{i1}$ 评语等级和评分 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 最优 100～95 | 优秀 94～90 | 良好 89～80 | 中等 79～70 | 及格 69～60 | 差 59～30 | 很差 29～0 |
| 1.热爱党，热爱祖国，热爱社会主义 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2.拥护党的路线，方针，政策 | 0 | 1 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3.坚持四项基本原则走社会主义道路 | 0 | 1 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 |

则模糊关系矩阵

$$\underset{\sim}{R}_1=\begin{bmatrix}0 & 2/8 & 5/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/8 & 6/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.75 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.875 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

（3）$\underset{\sim}{B}_1=\underset{\sim}{A}_1\circ\underset{\sim}{R}_1=(0.3\ \ 0.4\ \ 0.3)\circ\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.75 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.875 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$=[0\ \ 0.163\ \ 0.75\ \ 0.087\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$（已归一化）

2）"政治观点"的综合评判

同理依前：

$$\underset{\sim}{B}_2=\underset{\sim}{A}_2\circ\underset{\sim}{R}_2=[0.4\ \ 0.4\ \ 0.2]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.375 & 0.625 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$=[0\ \ 0.3\ \ 0.625\ \ 0.075\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$

3）"政治品德"的综合评判

同理依前：

$$\underset{\sim}{B}_3=\underset{\sim}{A}_3\circ\underset{\sim}{R}_3=[0.25\ \ 0.50\ \ 0.25]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.375 & 0.5 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.375 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$=[0\ \ 0.406\ \ 0.469\ \ 0.125\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$

2.二级层次"政治素质"的综合评价

$$\underset{\sim}{B}_1^*=\underset{\sim}{A}_1^*\circ\begin{bmatrix}\underset{\sim}{A}_1\circ\underset{\sim}{R}_1\\ \underset{\sim}{A}_2\circ\underset{\sim}{R}_2\\ \underset{\sim}{A}_3\circ\underset{\sim}{R}_3\end{bmatrix}=\underset{\sim}{A}_1^*\circ\begin{bmatrix}\underset{\sim}{B}_1\\ \underset{\sim}{B}_2\\ \underset{\sim}{B}_3\end{bmatrix}$$

$$=[0.4\quad 0.3\quad 0.3]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.163 & 0.75 & 0.087 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.30 & 0.625 & 0.075 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.406 & 0.469 & 0.125 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ 0.277\ 0.628\ 0.095\ 0\ 0\ 0]$$

$\underset{\sim}{B}_1^*$综合评价说明：8人评审小组对某讲师的“政治素质”的综合评价是约27.7%的人赞成评为优秀，有62.8%的人赞成评为良好，有9.5%的人赞成评为中等，没有人赞成评为最优、及格、差和很差。

3.初级层次“思想素质”的综合评判：

1）“人生观”的综合评判

专　家　评　审　　　　表 8-4-6

| 因　素　$V_{i1}$ | $U_{i1}$ 评语等级与评分 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 很优 100～95 | 优秀 94～90 | 良好 89～80 | 中等 79～70 | 及格 69～60 | 差 59～30 | 很差 29～0 |
| 10.全心全意为人民服务的思想 | 0 | 2 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 11.“振兴中华”“干四化”雄心壮志 | 0 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 12.鼎新革故，迎难而上 | 0 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 13.服从工作需要，认真完成本职工作 | 0 | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 |

$\underset{\sim}{A}_4$为(0.2 0.2 0.3 0.3)

$$\underset{\sim}{B}_4=\underset{\sim}{A}_4\circ\underset{\sim}{R}_4=[0.2\quad 0.2\quad 0.3\quad 0.3]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0.50 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.375 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.50 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ 0.175\ 0.488\ 0.20\ 0.137\ 0\ 0]$$

2）“精神面貌”的综合评判

$$\underset{\sim}{B}_5=\underset{\sim}{A}_5\circ\underset{\sim}{R}_5=[0.2\ 0.4\ 0.2\ 0.2]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.50 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.625 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.625 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ 0.15\ 0.575\ 0.175\ 0.1\ 0\ 0]$$

3）“思想方法”的综合评判

$$\underset{\sim}{B}_6=\underset{\sim}{A}_6\circ\underset{\sim}{R}_6=[0.3\ 0.3\ 0.3\ 0.1]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.125 & 0.625 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.50 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.625 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.625 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ 0.075\ 0.688\ 0.212\ 0.125\ 0\ 0]$$

4）“思想品德”的综合评判

$$\underset{\sim}{B}_7=\underset{\sim}{A}_7\circ\underset{\sim}{R}_7=[0.4\ \ 0.2\ \ 0.2\ \ 0.2]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.125 & 0.625 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.50 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.625 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.625 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ \ 0.075\ \ 0.60\ \ 0.20\ \ 0.125\ \ 0\ \ 0]$$

4.二级层次“思想素质”的综合评判

$$\underset{\sim}{B}_2^*=\underset{\sim}{A}_2^*\bullet\begin{bmatrix}\underset{\sim}{B}_4\\ \underset{\sim}{B}_5\\ \underset{\sim}{B}_6\\ \underset{\sim}{B}_7\end{bmatrix}=[0.3\ \ 0.3\ \ 0.2\ \ 0.2]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.175 & 0.488 & 0.20 & 0.137 & 0 & 0\\ 0 & 0.15 & 0.575 & 0.175 & 0.10 & 0 & 0\\ 0 & 0.075 & 0.588 & 0.212 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0.075 & 0.60 & 0.20 & 0.125 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ \ 0.128\ \ 0.556\ \ 0.195\ \ 0.121\ \ 0\ \ 0]$$

5.初级层次“业务素质”的综合评价

1）“掌握本学科现代科学技术理论”的能力

$$\underset{\sim}{B}_8=\underset{\sim}{A}_8\circ\underset{\sim}{R}_8=[0.3\ \ 0.3\ \ 0.1\ \ 0.30]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.625 & 0.25 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.625 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0.25 & 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ \ 0.20\ \ 0.663\ \ 0.125\ \ 0.012\ \ 0\ \ 0]$$

2）“实际动手能力”的综合评判

$$\underset{\sim}{B}_9=\underset{\sim}{A}_9\circ\underset{\sim}{R}_9=[0.2\ \ 0.3\ \ 0.25\ \ 0.25]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0.50 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.375 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.50 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.375 & 0.375 & 0.25 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ \ 0.119\ \ 0.431\ \ 0.256\ \ 0.194\ \ 0\ \ 0]$$

3）“教学能力和水平”的综合评判

$$\underset{\sim}{B}_{10}=\underset{\sim}{A}_{10}\bullet\underset{\sim}{R}_{10}=[0.2\ \ 0.3\ \ 0.2\ \ 0.3]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.125 & 0.625 & 0.25 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.50 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.375 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.625 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ \ 0.088\ \ 0.537\ \ 0.25\ \ 0.125\ \ 0\ \ 0]$$

4）“科研能力和水平”的综合评判

$$\underset{\sim}{B}_{11}=\underset{\sim}{A}_{11}\circ\underset{\sim}{R}_{11}=[0.25\ \ 0.3\ \ 0.3\ \ 0.15]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.50 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.625 & 0.25 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.125 & 0.375 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ \ 0.156\ \ 0.55\ \ 0.219\ \ 0.075\ \ 0\ \ 0]$$

6.二级层次“业务素质”的综合评价

$$\underset{\sim}{B}_3^* = \underset{\sim}{A}_3^* \circ \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_8 \\ \underset{\sim}{B}_9 \\ \underset{\sim}{B}_{10} \\ \underset{\sim}{B}_{11} \end{bmatrix} = [0.35\ \ 0.15\ \ 0.25\ \ 0.25] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.20 & 0.663 & 0.125 & 0.012 & 0 & 0 \\ 0 & 0.119 & 0.431 & 0.256 & 0.194 & 0 & 0 \\ 0 & 0.088 & 0.537 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.156 & 0.55 & 0.219 & 0.075 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0\ \ 0.150\ \ 0.568\ \ 0.199\ \ 0.083\ \ 0\ \ 0]$$

$\underset{\sim}{B}_3^*$综合评价说明：评审小组对某讲师“业务素质”的综合评价是：有15%的人赞成评为优秀，有56.8%的人赞成评为良好，有19.9%的人赞成评为中等，有8.3%的人赞成评为及格，无人赞成评为很优、差和很差。

7.初级层次“身体素质”的综合评判：

1）“身体健康状况”的综合评判

$$\underset{\sim}{B}_{12} = \underset{\sim}{A}_{12} \circ \underset{\sim}{R}_{12} = [0.3\ \ 0.2\ \ 0.5] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.375 & 0.50 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.375 & 0.50 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[0\ \ 0.312\ \ 0.563\ \ 0.125\ \ 0\ \ 0]$$

2）“体力强度”的综合评判

$$\underset{\sim}{B}_{13} = \underset{\sim}{A}_{13} \circ \underset{\sim}{R}_{13} = [0.5\ \ 0.25\ \ 0.25] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.375 & 0.50 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0.375 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0.375 & 0.25 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0\ \ 0.25\ \ 0.375\ \ 0.219\ \ 0.0935\ \ 0.0625\ \ 0$$

3）“智力强度”的综合评判

$$\underset{\sim}{B}_{14} = \underset{\sim}{A}_{14} \circ \underset{\sim}{R}_{14} = [0.3\ \ 0.3\ \ 0.4] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0.50 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.625 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0\ \ 0.25\ \ 0.588\ \ 0.162\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$$

8.二级层次“身体素质”的综合评价

$$\underset{\sim}{B}_4^* = \underset{\sim}{A}_4^* \circ \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_{12} \\ \underset{\sim}{B}_{13} \\ \underset{\sim}{B}_{14} \end{bmatrix} = [0.3\ \ 0.4\ \ 0.3] \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.312 & 0.563 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.375 & 0.216 & 0.0935 & 0.0625 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.588 & 0.162 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0\ \ 0.269\ \ 0.517\ \ 0.168\ \ 0.028\ \ 0.018\ \ 0]$$

9.三级层次“讲师素质”的综合评价

1）$\underset{\sim}{A}^*$ = [政治素质，思想素质，业务素质，身体素质]

$$= [0.15\ \ 0.15\ \ 0.50\ \ 0.20]$$

2）$$\underset{\sim}{B}^* = \underset{\sim}{A}^* \circ \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B}_1^* \\ \underset{\sim}{B}_2^* \\ \underset{\sim}{B}_3^* \\ \underset{\sim}{B}_4^* \end{bmatrix}$$

$$=[0.15\ 0.15\ 0.50\ 0.15]\circ\begin{bmatrix}0 & 0.277 & 0.628 & 0.095 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.128 & 0.556 & 0.195 & 0.121 & 0 & 0\\ 0 & 0.150 & 0.568 & 0.199 & 0.083 & 0 & 0\\ 0 & 0.269 & 0.517 & 0.168 & 0.028 & 0.018 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[0\ 0.18955\ 0.5650\ 0.1766\ 0.06525\ 0.0036\ 0]$$

三级层次$\underset{\sim}{B}^*$综合评价说明，评审小组 8 人对某讲师的素质的综合评价是：有18.955％的人赞成评为优秀，56.5％的人赞成评为良好，17.66％的人赞成评为中等，6.525％的人赞成评为及格，0.36％的人赞成评为差，无人赞成评为很优、很差。

10.计算$\underset{\sim}{B}^*$的综合评价值。

$$W_1=\underset{\sim}{B}^*\circ C^T$$

$$=[0\ 0.18955\ 0.565\ 0.1766\ 0.06525\ 0.0036\ 0]\circ\begin{bmatrix}100\\ 92\\ 84.5\\ 74.5\\ 64.5\\ 44.5\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=82.70分。$$

某讲师的素质经综合评价获得82.70分。因此该讲师的综合素质属于“良好”类型。与实际吻合。

上述计算用算子$M(\cdot,\vee)$“Product-max”代替$M(\cdot,\oplus)$进行全部计算（基础数字不变）得：

$$\underset{\sim}{B}^*=(0\ 0.188\ 0.564\ 0.134\ 0.090\ 0.024\ 0)$$

$W_2=81.81$分。亦属“良好”类型

算子$M(\cdot,\vee)$称主要因素突出型，突出主要因素但也兼顾其他因素。计算证明：$M(\cdot,\oplus)$的综合评价值$W_1\geqslant M(\cdot,\vee)$的综合评价值。这个实例计算证明了模糊集合理论中，算子$M(\cdot,\oplus)\geqslant M(\cdot,\vee)$的理论正确性。

## 四、结　　语

（1）通过建立“多层次、多算子二型模糊数学模型”用于多因素的综合评价，是对人们决策思维过程的数学描述。

（2）高等院校教师（教授、副教授、讲师、助教）的素质是多因素的，划分为政治素质、思想素质、业务素质、身体素质四个方面，十四个类别、五十个项目，属于较复杂的社会人文系统，形成一种现代化科学管理人才的方法。

（3）用多层次、多算子二型模糊数学模型综合评价高等院校教师的素质，体现了如下的优越性。

科学性：通过建立模糊数学模型对高等院校教师的素质进行综合评价，不仅能客观地反映高等院校教师素质的真实情况，而且能使定性描述定量化。

可靠性：模糊集合理论和数学模型，在理论体系上是严密的，计算方法和过程是正确的，而且可通过编制BASIC程序设计，用微型机给出综合评价的最后结果。

简易可行性：整个计算步骤明确、判断简便，懂得线性代数就可掌握这种计算方法。

## §8-5 科技预测中的模糊排序法[141]

1983年，张弘、黄天任等提出了科学技术预测的模糊排序法。为制订十五年科技发展规划，国家科委发展预测局，国家科委计划局于1982年发出“关于优先发展领域、重点行业和重点地区试行预测的函”。在预测局的领导下，试用Delphi法进行了预测，通过两轮咨询作业，全国二百多名专家的意见已基本趋于收敛。用模糊排序法即随机平衡法所得到的优先排序结果是相吻合的，对优先发展对象所作排序的置信度是高的。

### 一、Delphi 法的科学性

为了实现工农业年总产值在本世纪末翻两番的奋斗目标，必须迅速提高科学管理水平。科学管理包括科学技术预测、科学的规划与决策以及执行计划实现目标等三个阶段。而作为科学管理第一阶段的科学技术预测，则是科学管理后两个阶段的基础工作和前提条件。通常情况下，对于缺乏历史数据或信息不充分的预测对象来说，大多采用直感预测法。其中尤以Delphi法（专家咨询法的一种）最为盛行。Delphi预测法的实测可归结为模糊统计，但模糊的概念本来就没有明确的外延，因此，人们有理由怀疑Delphi法的科学性。

众所周知，概率反映了一定条件对事件的内在联系和制约，概率的客观意义可由随机试验中所呈现的频率稳定性加以科学地阐明。但作为刻划模糊概念的隶属度，它的确定却包含着人脑的加工和某种心理的过程。根据心理物理学的实验表明，人的直观感觉所反映出来的心理与外界刺激的物理量之间保持着相当严格的同步关系。因此，类似于随机事件中定义事件发生的频率那样，如果我们定义模糊统计试验中模糊事件的隶属概率，则同样可以发现，随着试验的频次增加，隶属频率也会呈现稳定性。由此可知，模糊概念乃是客观事物本质属性在人脑中的反映，隶属度恰好是客观性的一种量度，不能凭主观设想任意地捏造，即使是心理活动也是物质性的。因此，毋庸怀疑Delphi法预测结果的参考价值。而且正因为隶属频率的稳定性与试验频次有关，所以必须保证足够数量的被咨询专家的人数，其根本原因亦在于此。

### 二、优先发展对象的排序法

关于Delphi法已有不少论著。这里仅就专家各自提出优先发展的对象，如何进行排序的问题发表一些意见。

显然，由于专家的判断呈现离散性，不满足数学上对“序”的要求，主要是不满足传递性。因此，需要引入模糊排序的概念。通过二元对比建立隶属函数以确定整体次序的方法（如择优比较法、优先关系定序法、相对比较法）以及对比平均法等虽然有效，但不符合Delphi法多元对比的要求。而常用的多元对比排序法（如平均等级值、比重系数、满分频率以及等级数总和等）丢失的信息太多，或不能反映专家意见的离散程度，或不能反映专家意见相对集中的分布状况。所得结果不仅综合性差，而且往往不是全序。因此，我们

采用了随机平衡法试行排序。

根据有效重心的概念，随机平衡法的具体排序过程如下：

设$m$个待排对象$P_i$列为第$j$名的相应票数为$X_{i1}$，$X_{i2}$，…，$X_{im}$，经正规化处理得向量$S_i=(S'_{i1}, S'_{i2}, \cdots, S'_{im})$，$S_i$即待排序的元素。

1.建立隶属函数$S_{ij}$。

$$S_{ij}=\frac{|S'_{ij}-\sum_{l=1}^{m}S_{il}|}{r}\quad(i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,m)$$

其中$r$为第$i$个待排序元素之间向量分量的方差。

为简化起见，令

$$S_{ij}=S'_{ij}\Big/\sum_{l=1}^{m}S_{il}$$

2.确定$S_i$所属的序号

（1）若$m=2k+1$，则分别计算出$\sum_{j=1}^{k}S_{ij}$和$\sum_{j=k+2}^{m}S_{ij}$。

（$a$）当$\sum_{j=1}^{k}S_{ij}<\sum_{j=k+2}^{m}S_{ij}$，则序号重心落在区间[$k+1, 2k+1$]内；

（$b$）当$\sum_{j=1}^{k}S_{ij}>\sum_{j=k+2}^{m}S_{ij}$，则序号重心落在区间[$1, k+1$]内；

（$c$）当$\sum_{j=1}^{k}S_{ij}=\sum_{j=k+2}^{m}S_{ij}$，则序号重心落在$k+1$处。

（2）若$m=2k$，则分别计算出$\sum_{j=1}^{k-1}S_{ij}$和$\sum_{j=k+1}^{m}S_{ij}$。

（$a$）当$\sum_{j=1}^{k-1}S_{ij}<\sum_{j=k+2}^{m}S_{ij}$，则序号重心落在区间[$k$，$2k$]内；

（$b$）当$\sum_{j=1}^{k-1}S_{ij}>\sum_{j=k+2}^{m}S_{ij}$，则序号重心落在区间[$1, k+1$]内；

（$c$）当$\sum_{j=1}^{k-1}S_{ij}=\sum_{j=k+2}^{m}S_{ij}$，则序号重心落在[$k, k+1$]内。

再比较$S_{i,k}$，$S_{i,k+1}$，大者为序号重心所在位置。

（3）若由(1)，(2)得到序号重心为一区间，则重复步骤(1)或(2)，最后使序号重心区间缩小至三个，即$t$，$t+1$，$t+2$。

（$a$）当$S_{it}>S_{i,t+2}$且$S_{it}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{h=t}^{t+2}S_{ih}$，则序号重心位置在$t$处；

（$b$）若$S_{it}<S_{i,t+2}$且$S_{i,t+2}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{h=t}^{t+2}S_{ih}$，则序号重心位置在$t+2$处；

（$c$）若$S_{i,t}=S_{i,t+2}$，则序号重心位置在$t+1$处。

注意：若$S_{i,t}>S_{i,t+2}$（或$S_{i,t}<S_{i,t+2}$），但$S_{i,t}<\frac{1}{2}\sum_{h=t}^{t+2}S_{ih}$（或$S_{i,t+2}<\frac{1}{2}\sum_{h=t}^{t+2}S_{ih}$），则序号重心位置在$t+1$处。

3.偏序或全序关系

由2得到$S_i$所属序号的一个偏序或全序关系。

4.确定$S_i$所属序号的全序关系

（1）若由3已经得到全序，则止。

（2）若序号为$D$的元素有$S_a$，$S_b$，…，则

（a）计算出$\sum_{P=1}^{D-1} S_{ap}$（或$\sum_{P=D+1}^{m} S_{ap}$），$\sum_{P=1}^{D-1} S_{bp}$（或$\sum_{P=D+1}^{m} S_{bp}$）

$\sum_{\substack{P=1 \\ P \neq D}}^{m} S_{ap}$，$\sum_{\substack{P=1 \\ P \neq D}}^{m} S_{bp}$。

（b）若$\sum_{P=1}^{D-1} S_{ap} \Big/ \sum_{\substack{P=1 \\ P \neq D}}^{m} S_{ap} > \sum_{P=1}^{D-1} S_{bp} \Big/ \sum_{\substack{P=1 \\ P \neq D}}^{m} S_{bp}$；

（或$\sum_{P=D+1}^{m} S_{ap} \Big/ \sum_{\substack{P=1 \\ P \neq D}}^{m} S_{ap} < \sum_{P=D+1}^{m} S_{bp} \Big/ \sum_{\substack{P=1 \\ P \neq D}}^{m} S_{bp}$），则$S_a$先于$S_b$序号；

若$\sum_{P=1}^{D-1} S_{ap} \Big/ \sum_{\substack{P=1 \\ P \neq D}}^{m} S_{ap} = \sum_{P=1}^{D-1} S_{bp} \Big/ \sum_{\substack{P=1 \\ P \neq D}}^{m} S_{bp}$，则$S_a$不先于$S_b$序号。

并设正规化处理后的表征值离$D$最远为$S_{a1}$、$S_{b1}$，离$D$次远的为$S'_{a2}$、$S'_{b2}$、……，则先比较$S_{a1}$、$S_{b1}$，若$S_{a1} > S_{b1}$，则可认为$S_a$先于$S_b$序号，若$S_{a1} = S_{b1}$，就比较$S_{a2}$，$S_{b2}$来确定$S_a$和$S_b$的序号先后，若经依次比较，仍无法判断其前后，则并列同一序号。

现举例如下：设待排序的优先发展行业为$A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$、$G$、$H$、$I$。专家意见汇总结果如表8-5-1所示。按随机平衡法进行数据处理，得到的排序结果如表8-5-2所示。

优先发展行业的排序为：$E—B—A—D—C—F—I—H—G$。

**专家意见汇总表**　　　　表 8-5-1

| 票数 排序 / 行业 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 10 | 310 | 50 | 30 | 10 | | | |
| B | 40 | 300 | 60 | 10 | 10 | | | | |
| C | | 20 | 10 | 90 | 120 | 140 | 20 | 10 | |
| D | 20 | 10 | 20 | 120 | 160 | 60 | 50 | 10 | |
| E | 320 | 50 | 20 | 20 | | 10 | | | |
| F | | | 20 | | 50 | 150 | 160 | 60 | 20 |
| G | | | | | | 10 | 70 | 160 | 170 |
| H | | 20 | | 40 | 20 | 10 | 110 | 120 | 110 |
| I | 50 | 10 | 10 | 60 | 30 | 40 | 50 | 60 | 100 |

**用随机平衡法得到的排序结果**　　　　表 8-5-2

| 行业 | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 排序 | 3 | 2 | 5 | 4 | 1 | 6 | 9 | 8 | 7 |

## 三、对优先发展对象所作排序的置信度

一般在处理咨询表的统计数据时，为了找出能够反映事物发展趋势的数据，常可采用取中位众数和四分区间的50%置信区间。但对于排序中的数据处理则并不适用，因为在排

序的数据处理中，涉及到的仅是集中多数专家的某种意见和主张的问题。那么，我们应该怎样来评价结论的准确性呢？考虑到评价指标应能反映出专家意见的相对集中或相对分散的不同状况，定义置信度$R$为：

$$R=\alpha(1-\beta)(1-\gamma)$$

式中，$\alpha=X_{max}/\Sigma X_i$，$X_{max}$为最大票数，$X_i$为大于等于$X_{max}$一半的票数，即$X_i\geqslant\frac{1}{2}\times X_{max}$。

$\beta=|X_i|/|D|$（$|X_i|$为$X_i$的个数，$|D|$为有赞成票的那些序号个数）。

$\gamma=|X_j|/|D|$（$|X_j|$为大于等于$X_{max}$的0.707倍的那些票数，即$X_j\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}X_{max}$，$|X_j|$为$X_j$的个数）。

例如，根据表8-5-1的票数分布状况，可以估算出排序结果的置信度$R$如下：

排序结果的置信度　　表8-5-3

| 优先发展行业 | E | B | A | D | C | F | I | H | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 排序结果 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 置信度R(%) | 100 | 100 | 100 | 35 | 21 | 31 | 14 | 16 | 31 |

这表明在下一轮咨询表中，应加强对优先发展行业$C$、$D$、$F$、$G$、$H$、$I$的信息反馈，以提高应答质量，加速专家意见的收敛。

同时，我们又对按随机平衡法得到的结果，分别与按统计中的最小离差法得到的排序结果，及按统计中的最小离差法得到的排序结果，进行了比较，两种不同方法所得到的排序结果相吻合，因而，随机平衡法的可靠性毋庸置疑。

## 四、关于贴近度的计算

根据专家的工作性质和擅长，进行分类比较是有意义的。它可为分析下一轮咨询表的统计数据时，进行更恰当的加权处理，提供科学依据。通过聚类分析，假设专家集合可划分成$q$块：$B_1$，$B_2$，…，$B_q$，则不同的块将得到可能与总的排序不相符合的结果。这就需要计算各块的排序结果与总排序结果的贴近度。关于贴近度的计算方法应根据实际情况加以选定，下面举例说明之。

设排序的序号为：1，2，3，…，$m$，

总的排序结果为：$S_{i1}$，$S_{i2}$，$S_{i3}$，…，$S_{im}$。

块的排序结果为：$S'_{i1}$，$S'_{i2}$，$S'_{i3}$…，$S'_{im}$。

由总的数据排序元素相应偏序顺序序号的隶属度为：

$$\underset{\sim}{A}=(u_{i1},\ u_{i2},\ u_{i3},\ \cdots,\ u_{im})$$

由块的数据排序元素相应的偏序顺序序号的隶属度为：

$$\underset{\sim}{B}=(u'_{i1},\ u'_{i2},\ u'_{i3},\ \cdots,\ u'_{im})$$

则$\underset{\sim}{B}$与$\underset{\sim}{A}$的贴近度（$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$）可按下式计算：

$$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\frac{\sum_{j=1}^{m}\min(\underset{\sim}{A}(u_j),\ \underset{\sim}{B}(u_j))}{\sum_{j=1}^{m}\max(\underset{\sim}{A}(u_j),\ \underset{\sim}{B}(u_j))}$$

今设专家集合划分三块：$B_1$、$B_2$、$B_3$；三类专家子集的排序结果如表8-5-4。

**用随机平衡法得到的排序结果** 表 8-5-4

| 排序 行业 块 | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_1$ | 3 | 2 | 5 | 4 | 1 | 6 | 9 | 7 | 8 |
| $B_2$ | 3 | 2 | 5 | 4 | 1 | 6 | 8 | 7 | 9 |
| $B_3$ | 3 | 2 | 6 | 5 | 1 | 7 | 9 | 8 | 4 |

则按上述公式计算的贴近度如表8-5-5所示。

**块的排序结果与总的排序结果的贴近度** 表 8-5-5

| 专家子块集$B_i(i=1,2,3)$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| 由表8-5-4计算的贴近度（$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$） | 0.662 | 0.904 | 0.826 |

由此可见，对$B_2$类专家意见的加权数$W_2$，应大于$B_3$类专家意见的加权数$W_3$；对$B_3$类专家意见的加权数$W_3$，又应大于$B_1$类专家意见的加权数$W_1$，即 $W_2>W_3>W_1$。

## 五、关于专家意见的收敛速度问题

咨询表设计的好坏，直接关系到专家意见的收敛快慢。因此，在运用Delphi法时，理应根据数据处理的结果，对每一轮的咨询表进行自我评定。我们试行评定的内容包括以下三方面：

1.咨询问题的收缩率$C$

根据置信度的计算，在下一轮的咨询表中，应剔除专家意见相对集中的咨询问题（如置信度达70%以上的咨询问题可以剔除）。对于相对分散的咨询问题，当然应予保留。

设全部咨询问题共有$l$个，保留问题共有$m$个，则

$$C=\frac{l-m}{l}\times 100\%$$

由表8-5-3求得：$C=9-6/9\times 100\%=33\%$。

2.咨询问题的溢出率$f$

专家们在应答问题中，增添的不容忽视的独立内容（设有$n$个）占原有问题的相对比例数，称为溢出率$f$：

$$f=n/l\times 100\%$$

3.汇总结果的清晰度为$g$

设全部咨询问题的总区间共有$r$个子区间（8个子区间），而需要专家们在下一轮咨询表中重点应答的问题共占有6个模糊子区间（如优先发展行业中的$C$与$D$，$F$与$I$以及$G$与$H$的前后顺序问题，共占3个子区间），则有 $g=1-b/r$。

不难判定，汇总结果的清晰度$g=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$。

评定结果表明：若能进一步提高收缩率，则可望再通过1～2轮的咨询，使专家们的意见迅速得到收敛。

## §8-6 科技管理中的综合评价方法[142]

1985年，彭先图、汪培庄、白绍勤，肖定华等用模糊数学方法，讨论如何对科技项目的决策、科技成果的价值作出评价，以加强科技管理的科学化。

评价是科技管理中的一个基本问题。无论是对某一项目进行可行性分析，对一批科研成果的鉴定，还是对一个单位的科技工作质量作出评定，都离不开评价，评价是进行决策的基础。

### 一、因素树结构

要作好评价，首先要确定因素树结构。这就要求分清因素间的并列关系和从属关系。

**例 1** 在对某一项目进行可行性分析时，要考虑的因素有：必要性、可能性、实用性、技术水平等等。这些因素间有的是并列关系，有的是从属关系，可用图8-6-1表示。

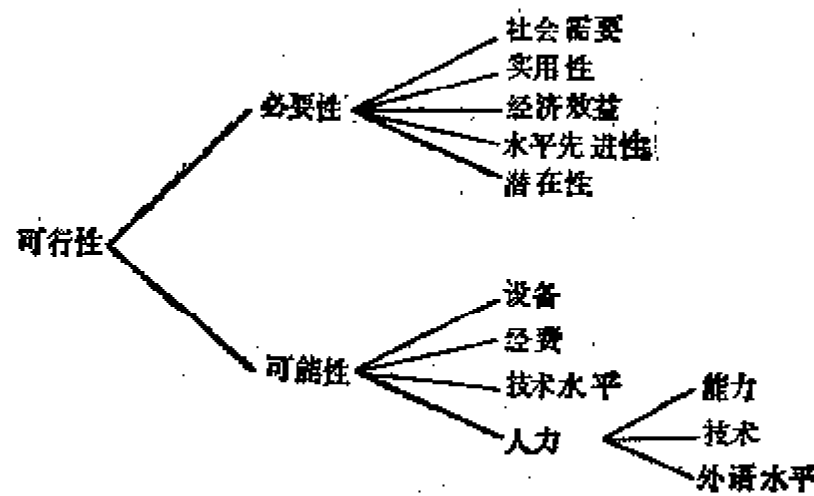


图 8-6-1 可行性因素树

在图8-6-1中，"能力"对"人力"就满足从属关系。相对地说，"人力"叫主因素，"能力"叫子因素。从主因素到子因素可以画一个线段（从左向右或从上往下）。"技术"、"外语水平"与能力之间的关系叫并列关系，它们都是"人力"的子因素。一个主因素联结若干个子因素形成如图8-6-2的图形，叫做一个叉结构。记为主因素一子因素1，子因素2，…，子因素$n$。因素树是由若干个叉复合而成的。

一般地，设因素集合为$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，则$U$按因素间的从属关系画成的图，便是一棵因素树结构。

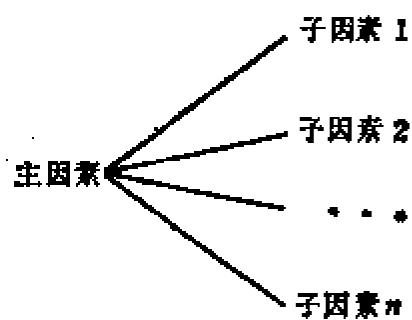


图 8-6-2 因素树中的叉结构

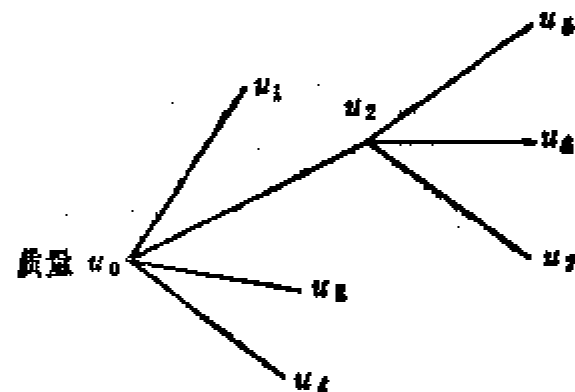


图 8-6-3 科研论文质量因素树

**例 2** 在评价一篇科研论文的质量时，要考虑的因素有：$u_1$，创造性；$u_2$，重要性；$u_3$，正确性；$u_4$，严谨性；$u_5$，问题的迫切性；$u_6$，方法的深刻性；$u_7$，实际意义。因素集为$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_7\}$，因素树如图8-6-3所示。

我们把因素树的末端点称为叶，相应的因素叫叶因素。如图8-6-3中，$u_1$，$u_3$，$u_4$，

$u_5$，$u_6$，$u_7$等是叶因素。不是叶的那些点叫做节，相应的因素称为节因素，如在图8-6-3中，$u_0$和$u_1$是节因素。最左端的点称为根，相应的因素叫根因素，如图8-6-3中的$u_0$。

科技管理的综合评价问题，抽象地来说，就是由专家或管理人员对被评对象（项目、成果、论文、科技队伍、…）就每一叶因素作出单因素的评价，然后运用一定的数学方法就每一个叉进行综合。逐级向左（或向上），直至对根因素作出总的评价为止。

## 二、单因素评价

对每一叶因素的评价，可通过专家评定的方法得到。即请有关方面专家或有关人员，按照设计好的表格对被评对象进行评价。主要有如下几种方法。

1.线段法

以“社会需要”为例说明。如图8-6-4a所示，为了考察某一项目的可行性，对其因素“社会需要”进行评价，画上[0，1]区间，左端点表示很不需要，右端点表示很需要，中点表示一般。让每一参加评价者将自己的评价点在线段的适当位置上，点上三次或五次，记最左点为$x$，最右点为$y$，得到区间[$x$，$y$]。这就是一个人的评价结果（如图8-6-4b）。

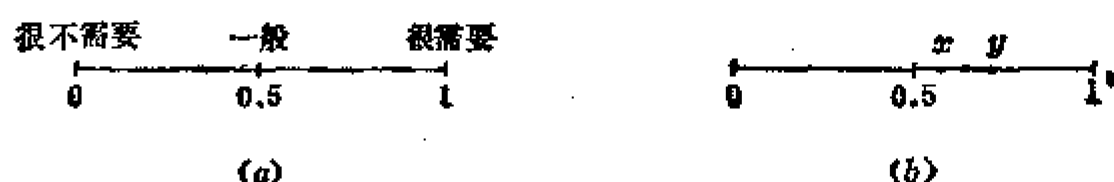



图 8-6-4 线段法评价

设共有$n$人参加评价，将$n$个人的意见综合起来就得到对该叶因素的评价。设这$n$人的评价结果为[$x_i$，$y_i$]，$i=1,2,\cdots,n$。综合意见的一般方法是对每一点$v$计算覆盖频率：

$$\overline{x}(v)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{[x_i,\ y_i]}(v) \qquad (8\text{-}6\text{-}1)$$

其中$x_{[x_i,\ y_i]}$是[0，1]上定义的区间[$x_i$，$y_i$]的特征函数。对一固定的$v$，$\overline{x}(v)$是所有区间[$x_i$，$y_i$]对$v$的覆盖频率。结果$\overline{x}$是一个模糊的评价。

2.表格法

将区间[0,1]离散化，设计如表8-6-1的表格。每一人次的评价是要在表8-6-1中打勾，最后统计各个格子中打勾的频率，得到形如表8-6-2的结果。结果也是一个模糊评价。

3.多级表格法

每一人次的评价是填表8-6-3。所填数字（从0到10）表示的是置信度。例如表8-6-3意味着，评价者对于该项目的社会需要程度，被评为“一般”有十分把握，被评为“较需要”有7分把握，等等。统计结果，逐格求算术平均，得到一模糊评价。

在以上三种方法中，汇总各位专家的意见，可以采用算术平均法($a_1+a_2+\cdots+a_n/n$)，也可以计算加权平均，如（8-6-1）式可改为：

$$\overline{x}(v)=\sum_{i=1}^{n}w_i x_{[x_i,\ y_i]}(v) \qquad (8\text{-}6\text{-}2)$$

其中$w_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。这里加权是对各位专家的意见进行的，即把各位专家的意见不是等同看待。

**评 价 表** 表 8-6-1

| 很不需要 | 较不需要 | 一 般 | 较 需 | 很 需 |
|---|---|---|---|---|
| | | ✓ | ✓ | |

**评 价 结 果** 表 3-6-2

| 很不需要 | 较不需要 | 一 般 | 较 需 | 很 需 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.3 | 0.9 | 0.7 | 0 |

**置 信 度** 表 8-6-3

| 很 不 需 | 较 不 需 | 一 般 | 较 需 | 很 需 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 10 | 7 | 2 |

## 三、逐 级 综 合

逐级综合的过程，是对每一个叉结构进行综合，将对各个子因素的评价综合成对主因素的评价。

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{R}_1\\ \underset{\sim}{R}_2\\ \vdots\\ \underset{\sim}{R}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm}\end{bmatrix}$$

$R$叫做评价矩阵。诸因素的权重分配为：

$$\underset{\sim}{A}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\quad a_i\geqslant 0 \tag{8-6-3}$$

应用广义算子($\dot{*}$，$\dot{+}$)计算

$$\underset{\sim}{A}*\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{B}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m) \tag{8-6-4}$$

其中 $b_j=(a_1\dot{*}r_{1j})\dot{+}(a_2\dot{*}r_{2j})\dot{+}\cdots\dot{+}(a_n\dot{*}r_{nj})$

得到的$\underset{\sim}{B}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m)$便是对主因素$u$的综合评价。

常用广义算子($\dot{*}$,$\dot{+}$)有：（·，+），（·，∨），（∧，⊕），（·，⊕）等等，其中∧=min，∨=max，“·”与“+”分别是普通的乘法和加法，$a\oplus b=\min(1,\ a+b)$。究竟选择哪一组算子，要根据具体情况而定，当（8-6-3）中的$A$不表示概率分布（即$\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 1$）而表示一个可能性分布时，也可以采取（∧、∨）这组算子。

## 四、权 数 分 配 问 题

由于各因素的地位不等，权数分配便成了一个重要问题。权重分配的确定可以由决策者根据经验选定，也可以用统计或专家评分方法。若要按式8-11-4进行综合，首先要确定

权数分配（式8-11-3）。现介绍两种确定方法：

1.集值统计法

设共有$n$个子因素$u_1$，$u_2$，…，$u_n$。设计子因素表格。请若干有经验的专家来打勾，每一专家将自己认为重要的子因素打上勾。统计结果，计算所得的总勾数$k$和第$i$个因素$u_i$得的勾数$k_i$，则$a_i=k_i/k$，便是第$i$个因素的权重，权数分配为

$$\underset{\sim}{A}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n)=(k_1/k,\ k_2/k,\ \cdots,\ k_n/k)$$

这样确定出来的$A$，一般说来不是一个概率分布，而是一个可能性分布，$\sum_{i=1}^{n}a_i\neq1$。

2.两两比较法

设共有$n$个子因素$u_1$，$u_2$，…，$u_n$。要确定它们之间的权数分配，可通过两两比较来完成。即，请有关专家估计因素$u_i$和$u_j$的重要程度之比$u_{ij}$，$i$，$j=1,2,\cdots$，$n$，得出权重比矩阵

$$\begin{array}{c|cccc|} & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ \hline u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{array}$$

显然该矩阵满足$u_{ii}=1$，$i=1,2,\ \cdots n$，（8-6-5）

在理想情况下还应满足：

$$u_{ij}u_{jk}=u_{ik},\quad i,j,k=1,2,\cdots,n \qquad (8\text{-}6\text{-}6)$$

这个式子反映了矩阵的协调性。这时由线性代数可知，该矩阵的最大特征根为单根，且有$\lambda_{max}=n$。但是，通过实际调查得到的权重比矩阵并非绝对协调的，（8-6-6）式并不处处成立。这时有必要对不协调性作出一定的评定。如果协调性很差，有必要重新作出权重比矩阵。为了作出评定，引进两个参数，一个叫一致性指标$CI$，定义为：

$$CI=\lambda_{max}-n/n-1$$

另一个叫平均随机一致性指标$RI$，对于阶数为2、3、4、5、6、7、8、9时，$RI$的值分别为0.00、0.58、0.90、1.12、1.24、1.32、1.41、1.45。用$CI/RI$可表示权重比矩阵的协调性。如果$CI/RI<0.10$，则可以认为评为的结果是协调的。

在矩阵是协调的情况下，求出相应于$\lambda_{max}$的特征向量，将其归一化即为权数分配。

## 五、变 权 问 题

我们以可行性分析为例说明，对一个项目进行可行性分析，常常要考虑两个主要因素，必要性和可能性。通常把必要性和可能性的权数分配取作固定的一对数。这与实际情况并不相符。设可能性为$r_1$，必要性为$r_2$，权数分配为$(a_1,\ a_2)$，则可行性程度为

$$r=a_1r_1+a_2r_2 \qquad (8\text{-}6\text{-}7)$$

当可能性为0，必要性再高，综合起来的可行性仍为0。即$r_1=0$时，即使$r_2=1$，也应有$r=0$。由(8-6-7)计算得$r=a_2r_2=a_2=0$，从而$a_1=1$，反之亦然，即$a_1=0,a_2=1$。可见，权数分配$(a_1,\ a_2)$随着因素的组态$(r_1,\ r_2)$的不同而变化，不应是常值的。

记$k=a_2/a_1$，则$k$在各个不同$r$的之处而不同。在相应点以$k$为斜率的箭头得到变权图，用解析法可求出变权（$a_1$，$a_2$）的权数分配。

# 参 考 文 献


[1] 方开泰编：《聚类分析》，地质出版社，1982.4.

[2] 朱政嘉："模糊K-均质聚类法及其在地质学中的应用"，《长春地质学院学报》1982年，第3期。

[3] 董根银、叶士衡等："模糊聚类和模式识别在金堆城钼矿的应用"，《模糊数学》1982年，第4期。

[4] 张守良、孙景春，异常评价的模糊数学方法，《地质与勘探》，1985年，第5期。

[5] 洪恒令："模糊目标函数聚类法及其应用"，《长春地质学院学报》，1985年，第3期。

[6] 王杰："用地球物理测井数据构造煤的隶属函数"，汪培庄著《模糊集合论及其应用》上海科学技术出版社，1983年。

[7] 吴以仁、宁德怒："模糊集合论在钻孔电磁波法交会自动成图中的应用"，汪培庄著，《模糊集合论及其应用》，上海科学技术出版社，1983年。

[8] 洪恒令："模糊分类法与有序地质划分"，汪培庄著，《模糊集合论及其应用》，1983年。

[9] 苏玉田、李洪志："测井曲线的计算机自动处理及地层对比的数学方法"，《中国矿业学院学报》，1986年，第1期。

[10] 卢国雄："矿产预测的Fuzzy集模型"，《桂林冶金地质学院学报》，1982年，第4期。

[11] 刘承祚、柴俊杰："应用模糊集合论预报矿藏"，同[6]。

[12] 徐仲平："模糊概率与矿产模糊预测"，《模糊数学学会广州会议论文》，1984年8月。

[13] 孙宝田、洪恒令："模糊协方差聚类分析用于夹皮沟矿区外围找金远景区的划分"，《地质与勘探》，1986年，第3期。

[14] 朱裕生、郭履合等："矿床模拟法在矿产预测中的应用"，《矿床地质》1985年，第2期。

[15] 王少豪："利用模糊数学综合评价岩石可钻性分级"，《中南矿冶学院学报》1984年，第1期。

[16] 马旭、李明："用模糊综合评判划分矿床的勘探类型"，《华东地质学院学报》1986年，第1期。

[17] 朱玉仙："模糊综合评判法在水文地质中的应用"，《水文地质与工程地质》1986年，第2期。

[18] 杨瑞林："模糊数学在岩石坚固性分级中的应用"，《金属矿山》1985年，第1期。

[19] 吴恒金："石灰岩矿爆破效果的模糊综合评判"，《爆破》，1985年，第2期。

[20] 陶振宇、彭祖赠："岩体工程分类的模糊数学方法"，《武汉水利电力学院》，1983年1月。

[21] 王靖涛："模糊集合论在岩体的综合评价和工程分类上的运用"，《岩土力学》，1982年，第2期。

[22] 冯保成："运用模糊集合理论综合评价采场稳定性分类"，《模糊数学》1986年，第2期。

[23] 姜增国："相似材料的Fuzzy最佳综合选择"，《武汉工业大学》硕士论文，1985年。

[24] 刘智超："模糊数学在采矿方法选择上的应用"《金属矿山》1986年，第3期。

[25] 云庆夏、黄光球、张永高等："采矿方法选择中的模糊决策"，《有色金属》，1986年，第3期。

[26] 阮孟伍："采矿方法选择的专家咨询系统"，《长沙矿山研究院》1986年8月。

[27] 邬寿平、张跃，"煤矿回采工作面月进度和月产量的模糊预测"，《河北煤炭建筑工程学院科学报告会论文集》，1985年。

[28] 左秀峰、张先尘：“缓倾斜煤层合理开采方式的多目标决策”《中国矿业学院学报》，1986年，第1期。
[29] 吕光华：“决策论在选择采区巷道布置方案中的应用”，《煤炭科学实验》，1985年，第3期。
[30] 祝玉学、张绪珍：“多目标边坡工程的风险决策和模糊决策”，《矿山技术》1985年，第1期。
[31] 彭立世：“用地质观点进行瓦斯突出预测”，《煤矿安全》，1985年，第12期。
[32] 林香民：“矿井通风系统模糊综合评判法”，《煤矿安全》，1985年，第2期。
[33] 吴晋初：“煤田开发评价”《云南省煤矿设计院》，1983年7月。
[34] 乐伟梁、汪应洛：“山西煤炭基地统配矿、地方矿、社队矿合理发展比例”《系统工程理论与实践》，1983年，第4期。
[35] 冯保成：“应用模糊数学理论和方法综合评价矿山建设投资经济效果”，武汉工业大学《中国矿山技术经济研究会论文》，1986年3月。
[36] 田成方、王学寅：“Fuzzy数学方法及微型机技术在选矿破碎生产过程中的应用”《中南矿冶学院学报》，1985年，第3期。
[37] Feng Deyi、Lou Shi bo、Lin Mingzhon, "Applications of Fuzzy Mathematics in Earthquake Hazard Assessment". 《Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches》《Seismological Press》1985.
[38] Feng Deyi、Lou Shibo Lin Mingzhon, "Applications of Fuzzy Mathematics in Earthquake Prediction".《Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches》Seismological Press, 1985.
[39] Lin Mingzhon、Feng Deyi、Jiang Chun and Wu Guoyu, "The Evaluation of Effectiveness of Earthquake Prediction by use of Statistical-Fuzzy Method", 《Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches》 Seismological Press, 1985.
[40] Huang Shiqi, "Fuzzy Bayes Rule and Forecasting Decision", 《Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches》Seimological Press, 1985.
[41] Wang Guangyuan, "On the Formulation of the Fuzziness and Randomness of Earthquake Intensity", 《Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches》 Seismological Press, 1985.
[42] 王光远：“地震烈度的二级模糊评定”，《哈尔滨建筑工程学院》，1983年10月。
[43] 刘锡荟，汪培庄等：“模糊地震烈度”，《中国建筑科学研究院，工程抗震研究所》，1982，No31。
[44] Feng Deyi、Lin Mingzhon、Wu Guoyu、Jing Chun, "A Study on Fuzzy Evaluation of Earthquake Intensity".《Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches》, Seismological Press, 1985.
[45] Auguste C.Boissonnade etal, "Identification of Fuzzy Systems in Civil Engineering" 《Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches》 Seismological Press, 1985.
[46] Felix S.Wong and Timothy J.Ross, "Treatment of Uncertainties in Structural Dynamics Models". 《Fuzzy Mathematics in Earthquake Reseakches》, Seismological Press, 1985.
[47] Jin Guoliang etal, Earthquake Damage Prediction of Aged Civil Buildings and Brick Chimneys in Yentai City", 《Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches》Seismological Press, 1985.

[48] Wu Yucai and Tan Liang, "Application of Fuzzy Mathematics in Seismic Damage Prediction of Single-Story Industrial Buildings", 《Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches》, Seismological Press, 1985.
[49] Liu Xihui, Chen Yiping and Wang Peizhuang, "Decision-Making for Urban Earthquake Disaster Mitigation in a Fuzzy Environment".《Fuzzy Mathematics in Earthquake Researches》Seismological Press, 1985.
[50] 王光远、王文泉："结构模糊优化设计"《哈尔滨建筑工程学院专题论文集》，1985.4。
[51] 王光远、王文泉："抗震结构的模糊优化设计"，《哈尔滨建筑工程学院专题论文集》，1985.4。
[52] 王光远、王文泉："抗震结构的模糊可靠性分析"，《哈尔滨建筑工程学院专题论文集》，1985.4。
[53] 席酉民、汪应洛、陶谦坎，"大型水利工程建设决策研究"，《系统工程理论与实践》1986年，第1期。
[54] 汪培庄、张大志："模糊决策—理论与应用"，《北京师范大学学报》，1985年6月。
[55] Chen Dehang, "Stepwise Regression Forecasting of Lcad Demad and Compute Fuzzy Simulation of Typical Daily Load Pattern".《武汉大学经济管理学报》，1984年。
[56] 张勇传、邴凤山、熊斯毅："模糊集理论与水库优化问题"，《华中工学院学报》1983年，第5期 。
[57] 邓聚龙、邓琦、冯清玺等："地下水位控制系统及最优灰色决策"，《自动化学报》，1985年4月。
[58] 殷学鹏、丛善本、刘峻德："东江水电工程环境影响评价工作总结"，《中南水电》，1986年增刊。
[59] 丛善本、刘峻德："东江水电工程环境影响预断评价因子组合状态评价模型研究"，《中南水电》，1986年增刊。
[60] 殷学鹏、刘峻德等："东江水电工程环境影响评价方法研究"，《中南水电》，1986年增刊。
[61] 李希平、张兆基等："东江水电工程库周区域经济系统的综合优化"，《中南水电》，1986年增刊。
[62] 陈洪、黄金丽："污水处理厂运行管理效果的综合评判"，《模糊数学》，1983年，第2期。
[63] 冯可君、邓瑞玲："多层次综合评判数学模型在选择工程方案中的运用"，《模糊数学》，1985年，第1期。
[64] 张国伍等："港口功能系统分析模型与计算机模拟"，《系统工程》，1985年，第4期。
[65] 王浣尘、吴健中、王鸿祥，"用系统工程方法对上海新港址进行评价和选优"，《系统工程理论与实践》，1984年，第2期。
[66] 李月景："利用模糊聚类分析自动识别汽车类型"，《自动化学报》，1985年，4月。
[67] 李良义，"我国汽车产量的灰色预测"，《武汉工学院学报》，1985年，第3期。
[68] 徐肆东、王晓波等："模糊数学在化纤工艺综合评价中的应用"，《模糊数学》，1983年，第1期。
[69] 王震源、李法朝："Fuzzy积分在评判过程中的应用"，《模糊数学》，1985年，第1期。
[70] 傅维海等："钢材金相图的Fuzzy检验"，《模糊数学》，1985年，第3期。
[71] 马咸尧、郑萍："低合金铜铸件的蠕变性能的灰色预测"，《模糊数学》，1985年，第2期。
[72] 马咸尧、郑萍："用灰色系统理论研究铁素体球墨铸铁冲击韧性"，《模糊数学》，1985年，第2期。

[73] 李华、沈大荣：“工程材料力学性能的模糊聚类分析”，《西北建筑工程学院》，1986年，第1期。
[74] 李月景、许伟明：“利用模糊集隶属原理自动识别机械零件”，《上海机械学院学报》，1983年，第3期。
[75] 谢素卿、黄泽堃：Fuzzy聚类分析在成组技术（GT）中的应用”，《河北工学院学报》，1986年，第2期。
[76] 谢素卿、张亚苓：“模糊数学在新产品开发决策中的应用”，《河北工学院学报》，1986年，第1期。
[77] 王清印、赵润华、王义闹：“关于邯郸市机械工业、工业的区间灰色预测模型”，《河北煤炭建筑工程学院论文集》，1985年。
[78] 李宝绶：“模糊动力学系统分析”，《信息与控制》，1981年，第1期。
[79] 赵红、李太航、沈祖梁等：“模糊系统模型辨识、控制及在高炉冶炼中的实际应用”，《自动化学报》，1983年，第3期。
[80] 李太航、沈祖梁等：“Fuzzy语义推理的自学习算法及在高炉冶炼中的应用”，《自动化学报》，1984年，第4期。
[81] 邓聚龙：“Fuzzy控制的稳定性问题”，《模糊数学》1983年，第3期。
[82] 邓聚龙：“最小信息量的最优控制”，《模糊数学》，1983年，第4期。
[83] Wei-min Cheng、Shou-Je Ren、Chiu-Feng Wu、Tee-Hsing Tsuei: “An Exprssion For Fuzzy Controller”，《Madan M.Gupta, Fuzzy Information and Decision Processes 1982》.
[84] 宋大鹏：“Fuzzy控制器的数学模型和算法分析”，《模糊数学》，1983年，第2期。
[85] 李宝授、刘志俊：“用模糊集理论设计一类控制器”，《自动化学报》，1980年，第1期。
[86] 汪朝群：“带有不确定参数控制系统的模糊控制设计”，《自动化学报》，1983年，第4期。
[87] 张励，“模糊控制器设计”，《北京工业大学学报》，1983年，第2期。
[88] 黄金丽：“自组织Fuzzy控制器设计”，《模糊数学》，1983年，第2期。
[89] 邵世煌、丁纪凯：“用微型计算机实现模糊控制的试验研究”，《自动化学报》，1983年，第4期。
[90] 涂象初、汪培庄：“自寻优*PID*调节器与人工智能”，《模糊数学》，1985年，第3期。
[91] 唐多元、寺野寿郎、管野道夫：“生产过程的语言模型及模糊最佳控制”，《模糊数学》，1983年，第2期。
[92] P.J.King and E.H.Mamdani, “The Application of Fuzzy Control Systems to Industrial Processes”，《Madan M.Gupta Fuzzy Automata and Decision Processes 1977》.
[93] Leuritz P.Holmblad and Jene-Jorgen Ostergoard, “Control of A Cement Kiln By Fuzzy Logic”.《Madan M. Gupta Fuzzy Informatioa and Decision Processes 1982》.
[94] J.J.Ostergoard, “Fuzzy Logic Control of A Heat Exchanger Process”，《Fuzzy Automata and Decision Processes》Madan M.Gupta, 1977.
[95] 吴秋峰、刘元亮等：“模糊逻辑在柴油机故障诊断中应用的试验”。《信息与控制》，1981年，第3期。
[96] 王浣尘、周斯富、苏懋康：“社会经济模型体系”，《系统工程理论与实践》1986年，第1期。
[97] 席酉民、汪应洛、陶谦坎：“决策指标的估价方法及权的探讨”，《系统工程理论与实践》

1986年，第3期。
[98] 郑维敏："关于知识库"，《系统工程理论与实践》，1984年，第2期。
[99] 王浣尘："动模模式经济控制论模型原理简介"，《系统工程》，1985年，第1期。
[100] 冯保成："模糊数学在投入产出分析中的应用"，《模糊数学》，1987年，第1期。
[101] 吴健中、王浣尘、苏懋康："新疆宏观社会经济模型-SD"，《系统工程》，1985年，第4期。
[102] 王毓基、向元望、具兴亚等："株洲市经济、科技、社会发展规划总体模型"，《系统工程》，1986年，第6期。
[103] 刘启明："试论中心城市群在城市经济区中的若干问题"《经济科学》，1986年，第2期。
[104] Janusz Kacprzyk and Andrzej Straszak, "Application of Fuzzy Decision-Making Models For Determining Optimal Policies in Stable, Integrated Regional Development", 《Fuzzy Sets Theory & Applications to Policy Analysis & Information Systems, 1980》.
[105] 邓聚龙："模糊协调决策的三级模型"，《系统工程理论与实践》，1983年，第4期。
[106] 邓聚龙："灰色系统理论与投资决策的量化"，《投资与建设》，1986年，第3期。
[107] 袁万融："应用灰色系统理论对湖北省全民所有制工业技术进步的预测"，《模糊数学》、(灰色系统专辑)，1985年，第二期。
[108] 王学萌："农工业区划中多目标灰色局势决策"，《模糊数学》(灰色系统专集)，1985年，第2期。
[109] 王成斌："关于工厂地址选择的数学模型"，《系统工程理论与实践》，1983年，第4期。
[110] 刘之琥、赵义强、耿春仁："经济区的模糊分类法"，《太原工学院学报》，1984年，3月。
[111] 陈国权、俞肇熊："模糊生产对应"，《模糊数学》，1985年，第1期。
[112] 郑振秀：审计的模糊性与模糊综合审计"，《经济与管理研究》，1986年，第1期。
[113] 葛明浩："大型管理指挥系统的结构分析"《北京工业大学学报》，1982年，第1期。
[114] 张弘、黄天任、徐爱新、葛明浩："企业经营中多级模糊决策之初探"，《北京工业大学学报》，1984年，第4期。
[115] 陈跃鹏、叶曙光：管理系统决策方法的探讨"，《系统工程》，1985年，第3期。
[116] 吴卫国："管理系统的模糊诊断"，《系统工程》，1986年，第3期。
[117] 王毅："网络一树管理组织机构"，《系统工程》，1986年，第1期。
[118] Dan B. Rins, "The Performance of Fuzzy Algorithm Models for Aggregate Planning Under Differing Cost Structures", 《Fuzzy Information and decision processes》, Madan M.Gupta, 1982.
[119] 顾培亮、刘兴、殷淑俨、赵允兴："中外合资经营企业谈判的目标规划模型及经济评价"，《系统工程理论与实践》，1986年，第3期。
[120] 刘之琥、赵义强、耿春仁："模糊计划管理方法"，《太原工学院》，1984年，3月。
[121] 刘樵良："用模糊集分析作业网络"，《信息与控制》，1983年，第1期。
[122] 陈大海、潘裕焕、薛劲松："一台设备n个工件多目标排序的模糊产生式系统"，《系统工程理论与实践》，1986年，第3期。
[123] 崔朝栋："用模糊概率确定PERT网络计划的关键路线"，《大自然探索》，1986年，第1期。
[124] 虞英军："Fuzzy模式在确定功能评价系数中的应用"，《系统工程理论与实践》，1985年，第3期。
[125] 吴卫国："全面质量管理中的Fuzzy因果分析"，《系统工程》，1986年，第3期。

[126] 邹刚、高峰："投入产出分析与企业财务决策支持系统"，《系统工程》，1986年，第3期。
[127] 孟昭孝、郝英、罗景仁："物质分配的模糊数学方法"，《西北大学计算机系》，1982年，11月。
[128] 张弘、黄天任、葛明浩："人力资源分配中的图树选择法"，《北京工业大学学报》，1982年，第3期。
[129] 赵仲琪："模糊数学在投标决策中的应用"，《西安冶金建筑工程学院学报》，1986年，第4期。
[130] 葛明浩、张弘、黄天任："企业部门考评中的综合判定法"。《北京工业大学学报》，1982年，第2期。
[131] 冯刍："企业领导选拔中的多准则模糊决策"，《重庆交通学院学报》，1985年，第1期。
[132] 汪应洛："人才规划的系统分析方法"，《系统工程理论与实践》，1984年，第2期。
[133] 黄天任、张弘、徐爱新、葛明浩："模糊数学在人才预测、规划中的应用"，《北京工业大学学报》，1984年，第3期。
[134] 易德生："灰色模型（GM）与人才预测"，《大自然探索》，1986年，第4期。
[135] 戴建设、邝硕："大学教育投资分配的模糊递阶多目标决策模型和算法"，《系统工程》，1986年，第1期。
[136] 冯保成："高等工业学校办学水平评估设想方案"，《武汉工业大学学报》，1986年，3月。
[137] 汪元美、张仁裕、周良驹："大学总体效能评估方案、模型与算法"，《湖南大学学报》，1985年，5月。
[138] 冯保成："高等工业学校学科（专业）评估设想方案"，《武汉工业大学学报》，1986年，3月。
[139] 王克文、汪元美："大学教育质量全面评估方案、模型与算法"。
[140] 冯保成："运用模糊集理论综合评价高校教师的素质"，《教育与研究》，1985年，第3期。
[141] 张弘、黄天任、徐爱新、葛明浩："科学技术预测中的模糊排序法"，《北京工业大学学报》，1983年，第4期。
[142] 彭先图、汪培庄、白昭勤、肖兴华："科技管理中的综合评价方法"，《北京师范大学学报》。
[143] 张阎："Fuzzy数学在研究所发展方向决策中的应用"，《模糊数学》，1984年，第2期。
[144] 迟忠先、薛源福、曹桂琴等："科技人员管理的数学模型及其分析方法"，《大连工学院学报》，1982年，第4期。
[145] 顾品良："运用模糊集合理论综合评价科研成果"，《西安交通大学学报》，1983年，第2期。
[146] Didler Dubois, Henrl Prade,《Fuzzy Sets and Systems (Theory and Applications)》, Academic, 1980.
[147] Paul P.Wang & S.K.Chang《Fuzzy Sets (Theory & Applications to Policy Analysis & Information Systems)》, New York and London, 1980.
[148] Madan M.Gupta,《Fuzzy Information and Decision Processes》。N.H.P.C, 1982.
[149] 汪培庄：《模糊集合论及其应用》，上海科学技术出版社，1983年。
[150] （日）浅居喜代治等著，赵汝怀译，《模糊系统理论入门》，北京师范大学出版社，1982年。
[151] 汪培庄著：《糊模集与随机集落影》，北京师范大学出版社，1985年。